

## Chapitre 4

# Eléments finis de Lagrange

La construction d'une méthode d'éléments finis nécessite la donnée d'un maillage, de noeuds et d'un espace de polynômes, qui doivent être choisis de manière cohérente. Les éléments finis de type Lagrange font intervenir comme "degrés de liberté" (c.à.d. les valeurs qui permettent de déterminer entièrement une fonction) les valeurs de la fonction aux noeuds. Ils sont très largement utilisés dans les applications. Il existe d'autres familles d'éléments finis, comme par exemple les éléments finis de type Hermite qui font également intervenir les valeurs des dérivées directionnelles. Dans le cadre de ce cours, nous n'aborderons que les éléments finis de type Lagrange, et nous renvoyons aux ouvrages cités en introduction pour d'autres éléments.

### 4.1 Espace d'approximation

### 4.1.1 Cohérence “locale”

Soit  $\mathcal{T}$  un maillage de  $\Omega$ , pour tout élément  $K$  de  $\mathcal{T}$ , on note  $\Sigma_K$  l'ensemble des noeuds de l'élément. On suppose que chaque élément a  $N_\ell$  noeuds  $K : \Sigma_K = \{a_1, \dots, a_{N_\ell}\}$ , qui ne sont pas forcément ses sommets. On note  $P$  un espace de dimension finie constitué de polynômes, qui définit la méthode d'éléments finis choisie.

**Définition 4.1 (Unisolvançe, élément fini de Lagrange)** Soit  $K$  un élément et  $\Sigma_K = (a_i)_{i=1, \dots, N_\ell}$  un ensemble de noeuds de  $K$ . Soit  $P$  un espace de polynômes de dimension finie. On dit que le triplet  $(K, \Sigma_K, P)$  est un élément fini de Lagrange si  $\Sigma_K$  est  $P$ -unisolvant, c'est à dire si pour tout  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{N_\ell}) \in \mathbb{R}^{N_\ell}$ , il existe un unique élément  $f \in P$  tel que  $f(a_i) = \alpha_i \quad \forall i = 1 \dots N_\ell$ . Pour  $i = 1, \dots, N_\ell$ , on appelle degré de liberté la forme linéaire  $\zeta_i$  définie par  $\zeta_i(p) = p(a_i)$ , pour tout  $p \in P$ . La propriété d'unisolvançe équivaut à dire que la famille  $(\zeta_i)_{i=1, \dots, N_\ell}$  forme une base de  $P'$  (espace dual de  $P$ ).

La  $P$ -unisolvançe revient à dire que toute fonction de  $P$  est entièrement déterminée par ses valeurs aux noeuds.

**Exemple : l'élément fini de Lagrange  $P_1$**  Prenons par exemple, en dimension 1, l'élément  $K = [a_1, a_2]$ , avec  $\Sigma_K = \{a_1, a_2\}$ , et  $P = P_1$  (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1). Le triplet  $(K, \Sigma_K, P)$  est unisolvant s'il existe une unique fonction  $f$  de  $P$  telle que :

$$\begin{cases} f(a_1) = \alpha_1 \\ f(a_2) = \alpha_2 \end{cases}$$

Or toute fonction  $f$  de  $P$  s'exprime sous la forme  $f(x) = \lambda x + \mu$  et le système

$$\begin{cases} \lambda a_1 + \mu = \alpha_1 \\ \lambda a_2 + \mu = \alpha_2 \end{cases}$$

détermine  $\lambda$  et  $\mu$  de manière unique.

De même si on considère le cas  $d = 2$ . On prend comme élément  $K$  un triangle et comme noeuds les trois sommets,  $a_1, a_2, a_3$  du triangle. Soit  $P = P_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu\}$  l'ensemble des fonctions affines. Alors le triplet  $(K, \Sigma_K, P)$  est un élément fini de Lagrange car  $f \in P$  est entièrement déterminée par  $f(a_1), f(a_2)$  et  $f(a_3)$ .

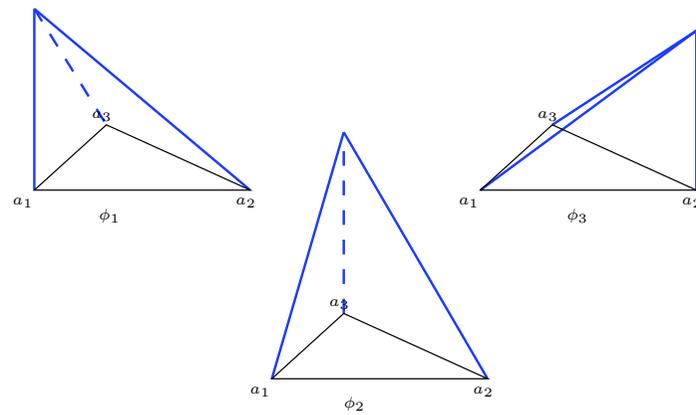
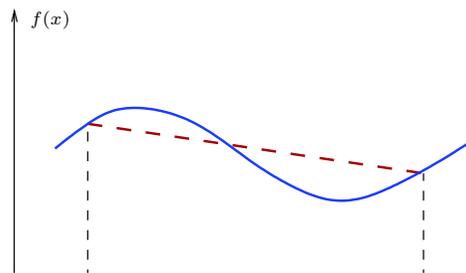
FIGURE 4.1 – fonctions de base locales pour l'élément fini de Lagrange  $P_1$  en dimension 2



FIGURE 4.2 – Interpolée  $P_1$  sur  $[a_1, a_2]$  (en trait pointillé) d'une fonction régulière (en trait continu)

**Définition 4.2 (Fonctions de base locales)** Si  $(K, \Sigma_K, P)$  est un élément fini de Lagrange, alors toute fonction  $f$  de  $P$  peut s'écrire :

$$f = \sum_{i=1}^{N_\ell} f(a_i) f_i$$

avec  $f_i \in P$  et  $f_i(a_j) = \delta_{ij}$ . Les fonctions  $f_i$  sont appelées fonctions de base locales.

Pour l'élément fini de Lagrange  $P_1$  en dimension 2 considéré plus haut, les fonctions de base locales sont décrites sur la figure 4.1

**Définition 4.3 (Interpolée)** Soit  $(K, \Sigma_K, P)$  un élément fini de Lagrange, et soit  $v \in C(K, \mathbb{R})$ . L'interpolée de  $v$  est la fonction  $\Pi v \in P$  définie par :

$$\Pi v = \sum_{i=1}^{N_\ell} v(a_i) f_i$$

On montre sur la figure 4.2 un exemple d'interpolée pour l'élément fini de Lagrange  $P_1$  en dimension 1. L'étude de  $\|v - \Pi v\|$  va nous permettre d'établir une majoration de l'erreur de consistance  $d(u, H_N)$ .

**Remarque 4.4** Pour que le triplet  $(K, \Sigma_K, P)$  soit un élément fini de Lagrange, il faut, mais il ne suffit pas, que  $\dim P = \text{card} \Sigma_K$ . Par exemple si  $P = P_1$  et qu'on prend comme noeuds du triangle deux sommets et le milieu de l'arête joignant les deux sommets, (voir figure 4.3),  $(K, \Sigma_K, P)$  n'est pas un élément fini de Lagrange.

**Proposition 4.5 (Critère de détermination)** Soit  $(K, \Sigma, P)$  un triplet constitué d'un élément, d'un ensemble de noeuds et d'un espace de polynômes, tel que :

$$\dim P = \text{card} \Sigma = N_\ell \quad (4.1)$$

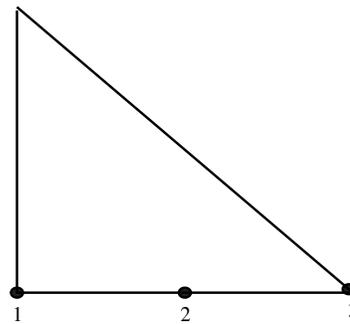


FIGURE 4.3 – Exemple de triangle à trois noeuds qui n'est pas un élément fini de Lagrange)

Alors

$$\text{si } \exists! f \in P; f = 0 \text{ sur } \Sigma \quad (4.2)$$

ou si

$$\forall i \in \{1 \dots N_\ell\} \exists f_i \in P \quad f_i(a_j) = \delta_{ij} \quad (4.3)$$

alors  $(K, \Sigma, P)$  est un élément fini de Lagrange.

**Démonstration :** Soit :

$$\phi : P \rightarrow \mathbb{R}^{N_\ell}$$

$$f \mapsto (f(a_i))_{i=1}^{N_\ell}$$

L'application  $\phi$  est linéaire de  $P$  dans  $\mathbb{R}^{N_\ell}$ , et, par hypothèse  $\text{card } s\Sigma = \dim P$ . Donc  $\phi$  est une application linéaire continue de  $P$  dans  $\mathbb{R}^{N_\ell}$ , avec  $\dim P = \dim(\mathbb{R}^{N_\ell}) = N_\ell$ . Si  $(K, \Sigma, P)$  vérifie la condition (4.2) alors  $\phi$  est injective. En effet, si  $\phi(f) = 0$ , alors  $f(a_i) = 0, \forall i = 1, \dots, N_\ell$ , et donc par hypothèse,  $f = 0$ . Donc  $\phi$  est une application linéaire,  $\phi$  est injective de  $P$  dans  $\mathbb{R}^{N_\ell}$  avec  $\dim P = N_\ell$ . On en déduit que  $\phi$  est bijective. Donc toute fonction de  $P$  est entièrement déterminée par ses valeurs aux noeuds :  $(K, \Sigma, P)$  est donc un élément fini de Lagrange.

On montre facilement que si la condition (4.3) est vérifiée alors  $\phi$  est surjective. Donc  $\phi$  est bijective, et  $(K, \Sigma, P)$  est un élément fini de Lagrange. ■

**Proposition 4.6** Soit  $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$ , un élément fini de Lagrange, où  $\bar{\Sigma}$  est l'ensemble des noeuds de  $\bar{K}$  et  $\bar{P}$  un espace de fonctions de dimension finie, et soit  $F$  une bijection de  $\bar{K}$  dans  $K$ , où  $K$  est une maille d'un maillage éléments finis. On pose  $\Sigma = F(\bar{\Sigma})$  et  $P = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}; f \circ F \in \bar{P}\}$  (voir figure 4.4). Alors le triplet  $(K, \Sigma, P)$  est un élément fini de Lagrange.

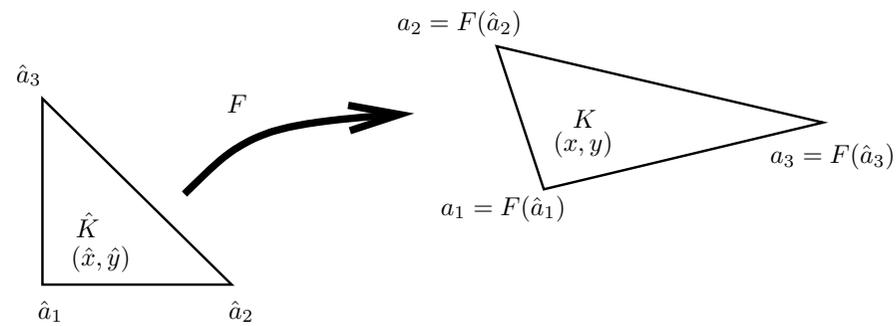


FIGURE 4.4 – Transformation  $F$

**Démonstration :** Supposons que les hypothèses de la proposition sont réalisées. On veut donc montrer que  $(\Sigma, P)$  est unisolvant. Soit  $\Sigma = (a_1, \dots, a_{N_\ell})$ , et soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{N_\ell}) \in \mathbb{R}^{N_\ell}$ . On veut montrer qu'il existe une unique fonction  $f \in P$  telle que

$$f(a_i) = \alpha_i, \quad \forall i = 1, \dots, N_\ell.$$

Or par hypothèse,  $(\bar{\Sigma}, \bar{P})$  est unisolvant. Donc il existe une unique fonction  $\bar{f} \in \bar{P}$  telle que

$$\bar{f}(\bar{a}_i) = \alpha_i, \quad \forall i = 1, \dots, N_\ell,$$

(où  $(\bar{a}_i)_{i=1, \dots, N_\ell}$  désignent les noeuds de  $\bar{K}$ ). Soit  $F$  la bijection de  $\bar{K}$  sur  $K$ , on pose  $f = \bar{f} \circ F^{-1}$ . Or par hypothèse,  $a_i = F(\bar{a}_i)$ . On a donc :  $f(a_i) = \bar{f} \circ F^{-1}(a_i) = \bar{f}(\bar{a}_i) = \alpha_i$ . On a ainsi montré l'existence de  $f$  telle que  $f(a_i) = \alpha_i$ .

Montrons maintenant que  $f$  est unique. Supposons qu'il existe  $f$  et  $g \in P$  telles que :

$$f(a_i) = g(a_i) = \alpha_i, \quad \forall i = 1, \dots, N_\ell.$$

Soit  $h = f - g$  on a donc :

$$h(a_i) = 0 \quad \forall i = 1 \dots N_\ell.$$

On a donc  $h \circ F(\bar{a}_i) = h(a_i) = 0$ . Or  $h \circ F \in \bar{P}$ , et comme  $(\bar{\Sigma}, \bar{P})$  est unisolvant, on en déduit que  $h \circ F = 0$ . Comme, pour tout  $x \in K$ , on a  $h(x) = h \circ F \circ F^{-1}(x) = h \circ F(F^{-1}(x)) = 0$ , on en conclut que  $h = 0$ . ■

**Définition 4.7 (Eléments affine-équivalents)** . Sous les hypothèses de la proposition 4.6, si la bijection  $F$  est affine, on dit que les éléments finis  $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$  et  $(K, \Sigma, P)$  sont affine-équivalents.

**Remarque 4.8** Soient  $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$  et  $(K, \Sigma, P)$  deux éléments finis affine-équivalents. Si les fonctions de base

locales de  $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$ . (resp. de  $(K, \Sigma, P)$ ) sont affines, alors celles de  $\bar{K}$  (resp.  $K$ ) le sont aussi, et on a :

$$\begin{cases} \bar{f}_i = f_i \circ F, \\ f_i = \bar{f}_i \circ F^{-1}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, \text{card}\Sigma$$

La preuve de cette remarque fait l'objet de l'exercice 55.

**Proposition 4.9 (Interpolation)** *Sous les hypothèses de la proposition 4.10 page 140, soient  $\Pi_{\bar{K}}$  et  $\Pi_K$  les opérateurs d'interpolation respectifs sur  $\bar{K}$  et  $K$ , voir définition 4.3 page 137. Soient  $v \in C(K, \mathbb{R})$ ,  $\Pi_{\bar{K}}v$  et  $\Pi_Kv$  les interpolées respectives de  $v$  sur  $(\bar{K}, \bar{P})$  et  $(K, P)$ , alors on a :*

$$\Pi_Kv \circ F = \Pi_{\bar{K}}(v \circ F)$$

**Démonstration :** Remarquons tout d'abord que  $\Pi_Kv \circ F$  et  $\Pi_{\bar{K}}(v \circ F)$  sont toutes deux des fonctions définies de  $\bar{K}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , voir figure 4.5. Remarquons ensuite que, par définition de l'interpolée,  $\Pi_Kv \in P$ . Comme

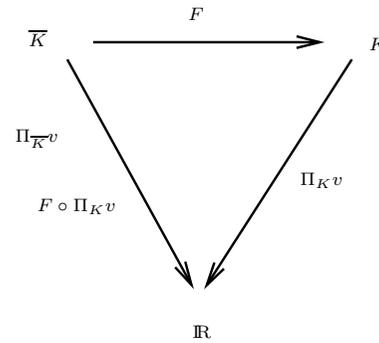


FIGURE 4.5 – Opérateurs d'interpolation  $\Pi_{\bar{K}}$  et  $\Pi_K$

$(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$  est l'élément de référence, on a donc :

$$\Pi_K v \circ F \in \bar{P}$$

On a aussi, par définition de l'interpolée :  $\Pi_{\bar{K}}(v \circ F) \in \bar{P}$ . On en déduit que  $\Pi_K v \circ F$  et  $\Pi_{\bar{K}}(v \circ F)$  sont toutes deux des fonctions de  $\bar{P}$ . Comme l'élément  $(\bar{K}, \bar{P}, \bar{\Sigma})$  est unisolvant (car c'est un élément fini de Lagrange), toute fonction de  $\bar{P}$  est uniquement déterminée par ses valeurs aux noeuds de  $\bar{\Sigma}$ . Pour montrer l'égalité de  $\Pi_K v \circ F$  et  $\Pi_{\bar{K}}(v \circ F)$ , il suffit donc de montrer que :

$$\Pi_{\bar{K}}(v \circ F)(\bar{a}_i) = \Pi_K v \circ F(\bar{a}_i), \quad i = 1, \dots, N_\ell,$$

où  $N_\ell = \text{card} \bar{\Sigma}$ . Décomposons  $\Pi_{\bar{K}}(v \circ F)$  sur les fonctions de base locales  $(\bar{f}_j), j = 1, \dots, N_\ell$ . On obtient :

$$\Pi_{\bar{K}}(v \circ F)(\bar{a}_i) = \sum_{j=1}^{N_\ell} v \circ F(\bar{a}_j) \bar{f}_j(\bar{a}_i).$$

On a donc :

$$\Pi_{\bar{K}}(v \circ F)(\bar{a}_i) = v \circ \left( \sum_{j=1}^{N_\ell} F(\bar{a}_j) \bar{f}_j \right) (\bar{a}_i) = v \circ F(\bar{a}_i) = v(a_i).$$

Mais on a aussi :

$$\Pi_K v \circ F(\bar{a}_i) = \Pi_K v(F(\bar{a}_i)) = \Pi_K v(a_i) = v(a_i).$$

D'où l'égalité. ■

### 4.1.2 Construction de $H_N$ et conformité

Nous allons considérer deux cas : le cas où l'espace  $H$  est l'espace  $H^1$  tout entier, et le cas où l'espace  $H$  est l'espace  $H_0^1$

**Cas  $H = H^1(\Omega)$**

Plaçons-nous ici dans le cas où  $H = H^1(\Omega)$ , où  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert borné polygonal (si  $d = 2$ , polyédrique si  $d = 3$ ). Soit  $\mathcal{T}$  un maillage éléments finis, avec  $\mathcal{T} = (K_\ell)_{\ell=1,\dots,L}$ , où les éléments finis  $K_\ell$  sont fermés et tels que  $\cup_{\ell=1}^L K_\ell = \bar{\Omega}$ . Soit  $\mathcal{S} = (S_i)_{i=1,\dots,M}$  l'ensemble des noeuds du maillage éléments finis, avec  $S_i \in \bar{\Omega}$ ,  $\forall i = 1, \dots, M$ . On cherche à construire une méthode d'éléments finis de Lagrange ; donc à chaque élément  $K_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, L$ , est associé un ensemble de noeuds  $\Sigma_\ell = \mathcal{S} \cap K_\ell$ , et un espace  $P_\ell$  de polynômes. On veut que chaque triplet  $(K_\ell, \Sigma_\ell, P_\ell)$  soit un élément fini de Lagrange. On définit les fonctions de base globales  $(\phi_i)_{i=1,\dots,M}$ , par :

$$\phi_i|_{K_\ell} \in P_\ell \quad \forall i = 1, \dots, M; \quad \forall \ell = 1; \dots, L, \quad (4.4)$$

et

$$\phi_i(S_j) = \delta_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, M, \quad \forall j = 1, \dots, M. \quad (4.5)$$

Chaque fonction  $\phi_i$  est définie de manière unique, grâce au caractère unisolvant de  $(K_\ell, \Sigma_\ell, P_\ell)$ ,  $\ell = 1, \dots, L$ . On pose  $H_N = Vect(\phi_1, \dots, \phi_M)$ . Pour obtenir une méthode d'éléments finis conforme, il reste à s'assurer que  $H_N \subset H^1$ .

Une manière de construire l'espace  $H_N$  est de construire un maillage à partir d'un élément de référence, grâce à la proposition suivante, qui se déduit facilement de la proposition 4.6 page 138

**Proposition 4.10 (Elément fini de référence)** *Soit  $\mathcal{T}$  un maillage constitué d'éléments  $K$ . On appelle élément fini de référence un élément fini de Lagrange  $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$ , où  $\bar{\Sigma}$  est l'ensemble des noeuds de  $\bar{K}$  et  $\bar{P}$  un espace de fonctions, de dimension finie, tel que, pour tout autre élément  $K \in \mathcal{T}$ , il existe une bijection  $F : \bar{K} \rightarrow K$  telle que  $\Sigma = F(\bar{\Sigma})$  et  $P = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}; f \circ F \in \bar{P}\}$  (voir figure 4.4). Le triplet  $(K, \Sigma, P)$  est un élément fini de Lagrange.*

**Proposition 4.11 (Critère de conformité, cas  $H^1$ )** Soit  $\Omega$  un ouvert polygonal (ou polyédrique) de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $3$ . Soit  $\mathcal{T} = (K_\ell)_{\ell=1,\dots,L}$ , un maillage éléments finis de  $\Omega$ ,  $\mathcal{S} = (S_i)_{i=1,\dots,M}$  l'ensemble des noeuds de maillage. On se place sous les hypothèses de la proposition 4.10 ; soient  $(\phi_i)_{i=1,\dots,M}$  les fonctions de base globales, vérifiant (4.4) et (4.5), et on suppose de plus que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$\text{Pour toute arête (ou face si } d = 3) \epsilon = K_{\ell_1} \cap K_{\ell_2}, \text{ on a : } \Sigma_{\ell_1} \cap \epsilon = \Sigma_{\ell_2} \cap \epsilon \text{ et } P_{\ell_1}|_\epsilon = P_{\ell_2}|_\epsilon, \quad (4.6)$$

où  $P_{\ell_1}|_\epsilon$  (resp.  $P_{\ell_2}|_\epsilon$ ) désigne l'ensemble des restrictions des fonctions de  $P_{\ell_1}$  (resp.  $P_{\ell_2}$ ) à  $\epsilon$ ,

$$\text{Si } \epsilon \text{ est un côté de } K_\ell, (\Sigma_\ell \cap \epsilon, P_\ell|_\epsilon) \text{ est unisolvant.} \quad (4.7)$$

Alors on a :  $H_N \subset C(\bar{\Omega})$  et  $H_N \subset H^1(\Omega)$ . On a donc ainsi construit une méthode d'éléments finis conformes. (Notons que les côtés de  $K_\ell$  sont des arêtes en 2D et des faces en 3D.)

**Démonstration :** Pour montrer que  $H_N \subset C(\bar{\Omega})$  et  $H_N \subset H^1(\Omega)$ , il suffit de montrer que pour chaque fonction de base globale  $\phi_i$ , on a  $\phi_i \in C(\bar{\Omega})$  et  $\phi_i \in H^1(\Omega)$ . Or par hypothèse, (4.4), chaque fonction  $\phi_i$  est polynômiale par morceaux. De plus, grâce à l'hypothèse (4.6), on a raccord des polynômes sur les interfaces des éléments, ce qui assure la continuité de  $\phi_i$ . Il reste à montrer que  $\phi_i \in H^1(\Omega)$  pour tout  $i = 1, \dots, M$ . Comme  $\phi_i \in C(\bar{\Omega})$ , il est évident que  $\phi_i \in L^2(\Omega)$  (car  $\Omega$  est un ouvert borné, donc  $\phi_i \in L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ ).

Montrons maintenant que les dérivées faibles  $D_j \phi_i$ ,  $j = 1, \dots, d$ , appartiennent à  $L^2(\Omega)$ . Par définition, la fonction  $\phi_i$  admet une dérivée faible dans  $L^2(\Omega)$  s'il existe une fonction  $\psi_{i,j} \in L^2(\Omega)$  telle que :

$$\int_{\Omega} \phi_i(x) \partial_j \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} \psi_{i,j}(x) \varphi(x) dx, \quad (4.8)$$

pour toute fonction  $\varphi \in C_c^1(\Omega)$  (on rappelle que  $C_c^1(\Omega)$  désigne l'ensemble des fonctions de classe  $C^1$  à support compact, et que  $\partial_j$  désigne la dérivée classique par rapport à la  $j$ -ème variable). Or, comme  $\bar{\Omega} = \bigcup_{\ell=1}^L K_\ell$ , on a :

$$\int_{\Omega} \phi_i(x) D_j \varphi(x) dx = \sum_{\ell=1}^L \int_{K_\ell} \phi_i(x) D_j \varphi(x) dx.$$

Sur chaque élément  $K_\ell$ , la fonction  $\phi_i$  est polynômiale. On peut donc appliquer la formule de Green, et on a :

$$\int_{K_\ell} \phi_i(x) \partial_j \varphi(x) dx = \int_{\partial K_\ell} \phi_i(x) \varphi(x) n_j(x) d\gamma(x) - \int_{K_\ell} \partial_j \phi_i(x) \varphi(x) dx,$$

où  $n_j(x)$  est la  $j$ -ième composante du vecteur unitaire normal à  $\partial K_\ell$  en  $x$ , extérieur à  $K_\ell$ . Mais, si on note  $\mathcal{E}_{int}$  l'ensemble des arêtes intérieures du maillage (i.e. celles qui ne sont pas sur le bord), on a :

$$\begin{aligned} X &= \sum_{\ell=1}^L \int_{\partial K_\ell} \phi_i(x) \varphi(x) n_j(x) d\gamma(x) = \int_{\partial \bar{\Omega}} \phi_i(x) \varphi(x) n_j(x) d\gamma(x) \\ &+ \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}_{int}} \int [(\phi_i(x) \varphi(x) n_j(x))|_{K_{\ell_1}} + (\phi_i(x) \varphi(x) n_j(x))|_{K_{\ell_2}}] d\gamma(x). \end{aligned}$$

où  $K_{\ell_1}$  et  $K_{\ell_2}$  désignent les deux éléments dont  $\epsilon$  est l'interface.

Comme  $\varphi$  est à support compact,

$$\int_{\partial \bar{\Omega}} \phi_i(x) \varphi(x) n_j(x) d\gamma(x) = 0.$$

Comme  $\phi_i$  et  $\varphi$  sont continues et comme  $n_j(x)|_{K_{\ell_1}} = -n_j(x)|_{K_{\ell_2}}$  pour tout  $x \in \epsilon$ , on en déduit que  $X = 0$ . En reportant dans (4.1.2), on obtient donc que :

$$\int_{\Omega} \phi_i(x) \partial_j \varphi(x) dx = - \sum_{\ell=1}^L \int_{K_\ell} \partial_j \phi_i(x) \varphi(x) dx.$$

Soit  $\psi_{i,j}$  la fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  définie presque partout par

$$\psi_{ij} \Big|_{K_\ell} = -\partial_j \phi_i.$$

Comme  $\partial_j \phi_i$  est une fonction polynômiale par morceaux, on a  $\psi_{i,j} \in L^2(\Omega)$  qui vérifie (4.8), ce qui termine la démonstration. ■

**Cas**  $H = H_0^1(\Omega)$

Plaçons-nous maintenant dans le cas où  $H = H_0^1(\Omega)$ . On décompose alors l'ensemble  $\mathcal{S}$  des noeuds du maillage :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}$$

où

$$\mathcal{S}_{int} = \{S_i, i = 1, \dots, N\} \subset \Omega$$

est l'ensemble des noeuds intérieurs à  $\Omega$  et

$$\mathcal{S}_{ext} = \{S_i, i = N + 1, \dots, M\} \subset \partial\Omega$$

est l'ensemble des noeuds de la frontière. Les fonctions de base globales sont alors les fonctions  $\phi_i, i = 1, \dots, N$  telles que

$$\phi_i|_{K_\ell} \in P_\ell, \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall \ell = 1, \dots, L \quad (4.9)$$

$$\phi_i(S_j) = \delta_{ij}, \forall j = 1, \dots, N, \quad (4.10)$$

et on pose là encore  $H_N = \text{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ . On a alors encore le résultat suivant :

**Proposition 4.12 (Critère de conformité, cas  $H_0^1$ )** *Soit  $\Omega$  un ouvert polygonal (ou polyédrique) de  $\mathbb{R}^d, d = 2$  ou  $3$ . Soit  $\mathcal{T} = (K_\ell)_{\ell=1, \dots, L}$  un maillage éléments finis de  $\Omega$ ,  $\mathcal{S} = (S_i)_{i=1, \dots, M} = \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}$  l'ensemble des noeuds du maillage. On se place sous les hypothèses de la proposition 4.6. On suppose que les fonctions de base globale  $(\phi_i)_{i=1, \dots, M}$  vérifient (4.9) et (4.10), et que les conditions (4.6) et (4.7) sont vérifiées. Alors on a :  $H_N \subset C(\bar{\Omega})$  et  $H_N \subset H_0^1(\Omega)$*

**Démonstration :** La preuve de cette proposition est laissée à titre d'exercice. ■

**Remarque 4.13 (Éléments finis conformes dans  $H^2(\Omega)$ )** On a construit un espace d'approximation  $H_N$  inclus dans  $C(\bar{\Omega})$ . En général, on n'a pas  $H_N \subset C^1(\bar{\Omega})$ , et donc on n'a pas non plus  $H_N \subset H^2(\Omega)$  (en dimension 1 d'espace,  $H^2(\Omega) \subset C^1(\Omega)$ ). Même si on augmente le degré de l'espace des polynômes, on n'obtiendra pas l'inclusion  $H_N \subset C^1(\bar{\Omega})$ . Si on prend par exemple les polynômes de degré 2 sur les éléments, on n'a pas de condition pour assurer le raccord, des dérivées aux interfaces. Pour obtenir ce raccord, les éléments finis de Lagrange ne suffisent pas : il faut prendre des éléments de type Hermite, pour lesquels les degrés de liberté ne sont plus seulement les valeurs de la fonction aux noeuds, mais aussi les valeurs de ses dérivées aux noeuds. Les éléments finis de Hermite seront par exemple bien adaptés à l'approximation des problèmes elliptiques d'ordre 4, dont un exemple est l'équation :

$$\Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ , et avec des conditions aux limites adéquates, que nous ne détaillerons pas ici. On peut, en fonction de ces conditions aux limites, trouver un espace de Hilbert  $H$  et une formulation faible de (4.13), qui s'écrit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \Delta u(x) \Delta \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \\ u \in H, \forall \varphi \in H. \end{cases}$$

Pour que cette formulation ait un sens, il faut que  $\Delta u \in L^2(\Omega)$  et  $\Delta \varphi \in L^2(\Omega)$ , et donc que  $H \subset H^2(\Omega)$ . Pour construire une approximation par éléments finis conforme de ce problème, il faut donc choisir  $H_N \subset H^2(\Omega)$ , et le choix des éléments finis de Hermite semble donc indiqué.

## 4.2 Exemples

Pour chaque méthode d'élément fini de Lagrange, on définit :

1. un élément de référence  $\bar{K}$
2. des fonctions de base locales sur  $\bar{K}$
3. une bijection  $F_{\ell}$  de  $\bar{K}$  sur  $K_{\ell}$ , pour  $\ell = 1, \dots, L$ , où  $L$  est le nombre d'éléments du maillage.

### 4.2.1 Élément fini de Lagrange $P1$ sur triangle ( $d = 2$ )

Le maillage du domaine est constitué de  $L$  triangles  $(K_\ell)_{\ell=1,\dots,L}$ , et les polynômes d'approximation sont de degré 1.

Élément fini de référence : on choisit le triangle  $\bar{K}$  de sommets  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ , et  $\bar{P} = \{\psi : K \rightarrow \mathbb{R}(x, y) \mapsto ax + by + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ .

**Proposition 4.14 (Unisolvance)** Soit  $\bar{\Sigma} = (\bar{a}_i)_{i=1,2,3}$  avec  $\bar{a}_1 = (0, 0)$ ,  $\bar{a}_2 = (1, 0)$  et  $\bar{a}_3 = (0, 1)$ , et

$$\bar{P} = \{\psi; K \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto a + bx + cy, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

Alors le couple  $(\bar{\Sigma}, \bar{P})$  est unisolvant.

**Démonstration** : Soit  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ , et  $\psi \in \bar{P}$ . On suppose que  $\psi(\bar{a}_i) = \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . La fonction  $\psi$  est de la forme  $\psi(x, y) = a + bx + cy$  et on a donc :

$$\begin{cases} a = \alpha_1 \\ a + b = \alpha_2 \\ a + c = \alpha_3 \end{cases}$$

d'où  $c = \alpha_3 - \alpha_1$ ,  $b_1 = \alpha_2 - \alpha_1$  et  $b_2 = \alpha_3 - \alpha_2$ . La connaissance de  $\psi$  aux noeuds  $(\bar{a}_i)_{i=1,2,3}$  détermine donc entièrement la fonction  $\psi$ . ■

Fonctions de bases locales.

Les fonctions de base locales sur l'élément fini de référence  $\bar{K}$  sont définies par  $\bar{\phi}_i \in \bar{P}$   $\bar{\phi}_i(\bar{a}_j) = \delta_{ij}$ , ce qui détermine les  $\bar{\phi}$  ; de manière unique, comme on vient de le voir. Et on a donc

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1(\bar{x}, \bar{y}) = 1 - \bar{x} - \bar{y} \\ \bar{\phi}_2(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \\ \bar{\phi}_3(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}. \end{cases}$$

### Transformation $F_\ell$

On construit ici une bijection affine qui transforme  $\bar{K}$  le triangle de référence en un autre triangle  $K$  du maillage. On cherche donc  $\ell : \bar{K} \rightarrow K$ , telle que

$$F_\ell(\bar{a}_i) = a_i \quad i = 1, \dots, 3$$

où  $\Sigma = (a_i)_{i=1,2,3}$  est l'ensemble des sommets de  $K$ . Notons  $(x_i, y_i)$  les coordonnées de  $a_i, i = 1, 2, 3$ . Comme  $F_\ell$  est une fonction affine de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , elle s'écrit sous la forme.

$$F_\ell(\bar{x}, \bar{y}) = (\beta_1 + \gamma_1 \bar{x} + \delta_1 \bar{y}, \beta_2 + \gamma_2 \bar{x} + \delta_2 \bar{y})$$

et on cherche  $\beta_i, \gamma_i, \delta_i, \quad i = 1, 2$  tels que :

$$\begin{cases} F_\ell((0, 0)) = (x_1, y_1) \\ F_\ell((1, 0)) = (x_2, y_2) \\ F_\ell((0, 1)) = (x_3, y_3). \end{cases}$$

Une résolution de système élémentaire amène alors à :

$$F_\ell(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 - x_1)\bar{x} + (x_3 - x_1)\bar{y} \\ y_1 + (y_2 - y_1)\bar{x} + (y_3 - y_1)\bar{y} \end{pmatrix}$$

D'après la remarque 4.8 page 139, si on note  $\bar{\phi}_k, k = 1, 2, 3$  les fonctions de base locales de l'élément de référence  $(\bar{K}, \bar{\Sigma}, \bar{P})$ , et  $\phi_k^{(\ell)}, k = 1, 2, 3$  les fonctions de base locales de l'élément  $(K_\ell, \Sigma_\ell, P_\ell)$ , on a  $\phi_k^{(\ell)} = \bar{\phi}_k \circ F_\ell^{-1}$

Si on note maintenant  $(\phi_i)_{i=1, \dots, N}$  les fonctions de base globales, on a :

$$\phi_i \Big|_{K_\ell} = \phi_k^{(\ell)},$$

où  $i = ng(\ell, k)$  est l'indice du  $k$ -ième noeud de l'élément  $\ell$  dans la numérotation globale. Notons que l'élément fini de Lagrange ainsi défini vérifie les critères de cohérence 4.6 page 141 et (4.7) page 141. Pour compléter la définition de l'espace d'approximation  $H_N$ , il ne reste qu'à déterminer les "noeuds liés", de la façon dont on a traité le cas de l'espace  $H_0^1(\Omega)$ .

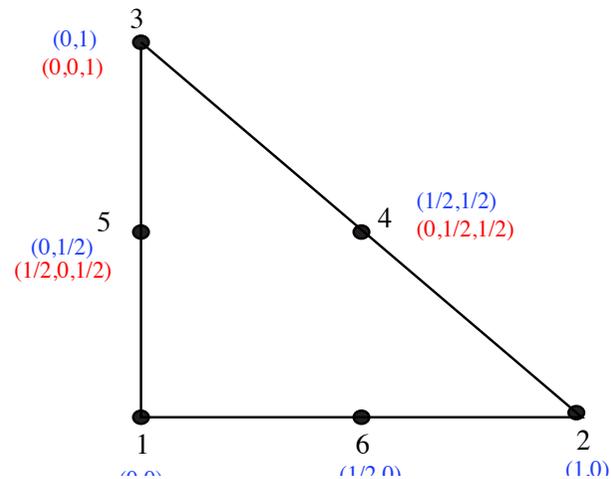
Il faut également insister sur le fait que cet élément est très souvent utilisé, en raison de sa facilité d'implantation et de la structure creuse des systèmes linéaires qu'il génère. Il est particulièrement bien adapté lorsqu'on cherche des solutions dans l'espace  $H^1(\Omega)$ . Il se généralise facilement en trois dimensions d'espace, où on utilise alors des tétraèdres, avec toujours comme espace de polynôme l'espace des fonctions affines.

### 4.2.2 Élément fini triangulaire $P_2$

Comme le titre du paragraphe l'indique, on considère un maillage triangulaire, et un espace de polynômes de degré 2 pour construire l'espace d'approximation.

Élément fini de référence On choisit comme élément fini de référence le triangle de sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  et  $(0,1)$ , voir Figure 4.6 et on prend pour  $\Sigma$  :

$$\bar{\Sigma} = \left\{ (0, 0), (1, 0), (0, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right) \right\}$$



$$\begin{array}{ccc} (0,0) & (1/2,0) & (1,0) \\ (1,0,0) & (1/2,1/2,0) & (0,1,0) \end{array}$$

FIGURE 4.6 – Élément de référence pour les éléments finis P2, avec coordonnées cartésiennes et barycentriques des noeuds

Fonctions de base locales Les fonctions de base locales sont définies à partir des coordonnées barycentriques. On rappelle que les coordonnées barycentriques d'un point  $\mathbf{x}$  du triangle  $\bar{K}$  de sommets  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont les réels  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tels que :

$$\mathbf{x} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

Dans le cas du triangle de référence  $\bar{K}$  de sommets  $(0,0), (1,0)$  et  $(0,1)$ , les coordonnées barycentriques d'un point  $\{\mathbf{x}\}$  de coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  sont donc :  $\lambda_1 = 1 - x - y, \lambda_2 = x, \lambda_3 = y$ . Par définition, on a  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$  et  $\lambda_i \geq 0$  (car le triangle  $\bar{K}$  est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses sommets). On peut alors déterminer les fonctions de base en fonction des coordonnées barycentriques des six noeuds de  $\bar{K}$  exprimés par leurs coordonnées barycentriques :  $a_1 = (1, 0, 0), a_2 = (0, 1, 0), a_3 = (0, 0, 1), a_4 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), a_5 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), a_6 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ . Les fonctions de base sont telles que  $\phi_i \in P_2$ , et  $\phi_i(a_j) = \delta_{ij}, \forall i = 1, \dots, 6, \text{ for all } j = 1, \dots, 6$ . Commençons par  $\phi_1$  ; on veut  $\phi_1(a_1) = 1$ , et  $\phi_1(a_i) = 0, \forall i = 2, \dots, 6$ . La fonction  $\phi_1$  définie par

$$\phi_1(x, y) = 2\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{2})$$

convient, et comme le couple  $(\bar{\Sigma}, P2)$  est unisolvant, c'est la seule fonction qui convient. Par symétrie, on définit

$$\phi_2(x, y) = 2\lambda_2(\lambda_2 - \frac{1}{2}),$$

et

$$\phi_3(x, y) = 2\lambda_3(\lambda_3 - \frac{1}{2}).$$

Les fonctions de base associées aux noeuds  $a_4, a_5, a_6$  sont alors

$$\phi_4(x, y) = 4\lambda_2\lambda_3,$$

$$\begin{aligned}\phi_5(x, y) &= 4\lambda_1\lambda_3, \\ \text{et } \phi_6(x, y) &= 4\lambda_1\lambda_2.\end{aligned}$$

Il est facile de voir que ces fonctions forment une famille libre d'éléments de  $P_2$  et comme  $\text{card } \bar{\Sigma} = \text{card } P_2$ , le couple  $(\bar{\Sigma}, P_2)$  est bien unisolvant.

Transformation  $F_\ell$  La bijection  $F_\ell$  qui permet de passer de l'élément fini de référence  $\bar{K}$  à l'élément  $K_\ell$  a déjà été vue dans le cas de l'élément fini  $P_1$  c'est la fonction affine définie par :

$$F_\ell(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 - x_1)x + (x_3 - x_1)y \\ y_1 + (y_2 - y_1)x + (y_3 - y_1)y \end{pmatrix}$$

où  $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$  sont les coordonnées respectives des trois sommets du triangle  $K_\ell$ . Comme cette transformation est affine, les coordonnées barycentriques restent inchangées par cette transformation.

On peut montrer (ce n'est pas facile) que l'erreur d'interpolation  $\|u - u_N\|_{H^1}$  est contrôlée, en éléments finis  $P_1$  et  $P_2$  par les inégalités suivantes :

$$P1 : \text{ si } u \in H^2(\Omega), \text{ on a } \|u - u_N\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)}$$

$$P2 : \text{ si } u \in H^3(\Omega), \text{ on a } \|u - u_N\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^2\|u\|_{H^3(\Omega)}.$$

On peut généraliser les éléments finis  $P_1$  et  $P_2$  aux éléments finis  $P_k$  sur triangles, pour  $k \geq 1$ . On prend toujours le même élément de référence, dont on divise chaque côté en  $k$  intervalles. Les extrémités de ces intervalles sont les noeuds du maillage. On a donc  $3k$  noeuds, qu'on peut repérer par leurs coordonnées barycentriques, qui prennent les valeurs  $0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, 1$ . On peut montrer que si  $u \in H^{k+1}$ , alors

$$\|u_N - u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k\|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

### 4.2.3 Éléments finis sur quadrangles

#### Le cas rectangulaire

On prend comme élément fini de référence le carré  $\bar{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ , et comme noeuds les coins de ce carré :

$$a_1 = (1, -1), a_2 = (1, 1), a_3 = (-1, 1), \text{ et } a_4 = (-1, -1).$$

On prend comme espace de polynômes

$$P = \{f : \bar{K} \rightarrow \mathbb{R}; f \in Q_1\}$$

où  $Q_1 = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f(x, y) = a + bx + cy + dxy, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$  Le couple  $(\Sigma, P)$  est unsolvant. Les fonctions de base locales sont les fonctions :

$$\phi_1(x, y) = -\frac{1}{4}(x+1)(y-1)$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{1}{4}(x+1)(y+1)$$

$$\phi_3(x, y) = -\frac{1}{4}(x-1)(y+1)$$

$$\phi_4(x, y) = \frac{1}{4}(x-1)(y-1).$$

La transformation  $F_\ell$  permet de passer de l'élément de référence carré  $\bar{K}$  à un rectangle quelconque du maillage  $K_\ell$ . Si on considère un rectangle  $K_\ell$  parallèle aux axes, dont les noeuds sont notés  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_1, y_2)$ , les noeuds du rectangle  $K_\ell$ , la bijection  $F_\ell$  s'écrit :

$$F_\ell(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (x_2 - x_1)x + x_2 + x_1 \\ (y_2 - y_1)y + y_2 + y_1 \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant le cas d'un maillage quadrangulaire quelconque. Dans ce cas, on choisit toujours comme élément de référence le carré unité. La transformation  $F_\ell$  qui transforme l'élément de référence en un quadrangle  $K_\ell$  est toujours affine, mais par contre, les composantes de  $F_\ell((x, y))$  dépendent maintenant de  $x$  et de  $y$  voir exercice 54 page 163. En conséquence, le fait que  $f \in Q_1$  n'entraîne plus que  $f \circ F_\ell \in Q_1$ . Les fonctions de base seront donc des polynômes  $Q_1$  sur l'élément de référence  $\bar{K}$ , mais pas sur les éléments "courants"  $K_\ell$ .

**Eléments finis d'ordre supérieur** Comme dans le cas d'un maillage triangulaire, on peut choisir un espace de polynômes d'ordre supérieur,  $Q_k$ , pour les fonctions de base de l'élément de référence  $\bar{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ . On choisit alors comme ensemble de noeuds :  $\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_k = \{(x, y) \in \bar{K}, (x, y) \in \{-1, -1 + \frac{1}{k}, -1 + \frac{2}{k}, \dots, 1\}^2\}$ . On peut montrer facilement que  $(\bar{\Sigma}_k, Q_k)$  est unisolvant. Là encore, si la solution exacte de problème continu est suffisamment régulière, on peut démontrer l'estimation d'erreur suivante (voir [3]) :

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} h^k.$$

Exprimons par exemple l'espace des polynômes  $Q_2$ . On a :

$$Q_2 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7xy^2 + a_8x^2y + a_9x^2y^2, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 9\}$$

L'espace  $Q_2$  comporte donc neuf degrés de liberté. On a donc besoin de neuf noeuds dans  $\bar{\Sigma}$  pour que le couple  $(\bar{\Sigma}, Q_2)$  soit unisolvant (voir exercice 59 page 165). On peut alors utiliser comme noeuds sur le carré de référence  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  :

$$\bar{\Sigma} = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$$

En général, on préfère pourtant supprimer le noeud central (0,0) et choisir :

$$\Sigma^* = \bar{\Sigma} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Il faut donc un degré de liberté en moins pour l'espace des polynômes. On définit alors :

$$Q_2^* = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7xy^2 + a_8x^2y, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 8\}$$

Le couple  $(\Sigma^*, Q_2^*)$  est unisolvant (voir exercice 60 page 165), et on peut montrer que l'élément  $Q_2^*$  est aussi précis (et plus facile à mettre en oeuvre que l'élément  $Q_2$ ).

(et plus facile à mettre en oeuvre que l'élément  $\mathcal{Q}_2$ ).

### 4.3 Construction du système linéaire

On construit ici le système linéaire pour un problème à conditions aux limites mixtes de manière à envisager plusieurs types de conditions aux limites. Soit  $\Omega$  un ouvert polygonal<sup>1</sup>, on suppose que  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  avec  $\text{mes}(\Gamma_0) \neq 0$ . On va imposer des conditions de Dirichlet sur  $\Gamma_0$  et des conditions de Fourier sur  $\Gamma_1$ ; c'est ce qu'on appelle des conditions "mixtes". On se donne donc des fonctions  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_0 : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g_1 : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , et on cherche à approcher  $u$  solution de :

$$\begin{cases} -\text{div}(p(x)\nabla u(x)) + q(x)u(x) = f(x), x \in \Omega, \\ u = g_0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ p(x)\nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x) + \sigma u(x) = g_1(x), x \in \Gamma_1, \end{cases} \quad (4.11)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur unitaire normal à  $\partial\Omega$  extérieure à  $\Omega$ . Pour assurer l'existence et unicité du problème (4.11), (voir exercice 42), on se place sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} p(x) \geq \alpha > 0, p.p. x \in \Omega \\ q \geq 0 \\ \sigma \geq 0 \\ \text{mes}(\Gamma_0) > 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Pour obtenir une formulation variationnelle, on introduit l'espace

$$H_{\Gamma_0, g_0}^1 = \{u \in H^1(\Omega); u = g_0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

et l'espace vectoriel associé :

$$H = H_{\Gamma_0, 0}^1 = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$$

---

1. Dans le cas où la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  n'est pas polygonaire mais courbe, il faut considérer des éléments finis dits "isoparamétriques" que nous verrons plus loin

Notons que  $H$  est un espace de Hilbert. Par contre, attention, l'espace  $H_{\Gamma_0, g_0}^1$  n'est pas un espace vectoriel. On va chercher  $u$  solution de (4.11) sous la forme  $u = \tilde{u} + u_0$ , avec  $u_0 \in H_{\Gamma_0, g_0}^1$  et  $\tilde{u} \in H_{\Gamma_0, 0}^1$ . Soit  $v \in H$ , on multiplie (4.11) par  $v$  et on intègre sur  $\Omega$ . On obtient :

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(p(x)\nabla u(x))v(x)dx + \int_{\Omega} q(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H.$$

En appliquant la formule de Green, il vient alors :

$$\int_{\Omega} p(x)\nabla u(x)\nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} p(x)\nabla u(x)nv(x)d\gamma(x) + \int_{\Omega} qu(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H.$$

Comme  $v = 0$  sur  $\Gamma_0$  on a :

$$\int_{\partial\Omega} p(x)\nabla u(x)nv(x)d\gamma(x) = \int_{\Gamma_1} p\nabla u(x)nv(x)d\gamma(x).$$

Mais sur  $\Gamma_1$ , la condition de Fourier s'écrit :  $\nabla u \cdot n = -\sigma u + g_1$ , et on a donc

$$\int_{\Omega} p(x)\nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\Gamma_1} p(x)\sigma u(x)v(x)d\gamma(x) + \int_{\Omega} qu(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx + \int_{\Gamma_1} g_1(x)v(x)d\gamma(x).$$

On peut écrire cette égalité sous la forme :  $a(u, v) = \tilde{T}(v)$ , avec  $a(u, v) = a_{\Omega}(u, v) + a_{\Gamma_1}(u, v)$ , où :

$$\begin{cases} a_{\Omega}(u, v) = \int_{\Omega} p(x)\nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\Omega} q(x)u(x)v(x)dx, \\ a_{\Gamma}(u, v) = \int_{\Gamma_1} p(x)\sigma(x)u(x)v(x)d\gamma(x), \end{cases}$$

et  $\tilde{T}(v) = T_{\Omega}(v) + T_{\Gamma_1}(v)$ , avec

$$T_{\Omega}(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \text{ et } T_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} g_1(x)v(x)d\gamma(x).$$

On en déduit une formulation faible associée à (4.11) :

$$\begin{cases} \text{chercher } \tilde{u} \in H \\ a(u_0 + \tilde{u}, v) = \tilde{T}(v), \forall v \in H, \end{cases} \quad (4.13)$$

où  $u_0 \in H^1(\Omega)$  est un relèvement de  $g_0$ , c'est à dire une fonction de  $H^1(\Omega)$  telle que  $u_0 = g_0$  sur  $\Gamma$ . Le problème (4.13) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{u} \in H \\ a(\tilde{u}, v) = T(v), \forall v \in H. \end{cases} \quad (4.14)$$

où  $T(v) = \tilde{T}(v) - a(u_0, v)$ . Sous les hypothèses (4.12), on peut alors appliquer le théorème de Lax Milgram (voir théorème 3.6 page 100) au problème (4.14) pour déduire l'existence et l'unicité de la solution de (4.13); notons que, comme la forme bilinéaire  $a$  est symétrique, ce problème admet aussi une formulation variationnelle :

$$\begin{cases} J(u) = \min_{v \in H_{\Gamma_0, g_0}^1} J(v), \\ J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) + T(v), \forall v \in H_{\Gamma_0, g_0}^1. \end{cases} \quad (4.15)$$

Dans ce cas, les méthodes de Ritz et Galerkin sont équivalentes. Remarquons que l'on peut choisir  $u_0$  de manière abstraite, tant que  $u_0$  vérifie  $u_0 = g_0$  sur  $\Gamma_0$  et  $u_0 \in H^1$ . Intéressons nous maintenant à la méthode d'approximation variationnelle. On approche l'espace  $H$  par  $H_N = Vect\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  et on remplace (4.14) par :

$$\begin{cases} \tilde{u}_N \in H_N \\ a(\tilde{u}_N, \phi_i) = T(\phi_i) - a(u_0, \phi_i), \forall i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (4.16)$$

On pose maintenant  $\tilde{u}_N = \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j \phi_j$ . Le problème (4.16) est alors équivalent au système linéaire :

$$\mathcal{K}\tilde{U} = \mathcal{G},$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{K}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i), i, j = 1, \dots, N, \\ \tilde{U} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N), \\ \mathcal{G}_i = T(\phi_i) - a(u_0, \phi_i), i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

L'implantation numérique de la méthode d'approximation nécessite donc de :

1. construire  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{G}$
2. résoudre  $\mathcal{K}\tilde{U} = \mathcal{G}$ .

Commençons par la construction de l'espace  $H_N$  et des fonctions de base pour une discrétisation par éléments finis de Lagrange du problème (4.14).

### 4.3.1 Construction de $H_N$ et $\Phi_i$

On considère une discrétisation à l'aide d'éléments finis de Lagrange, qu'on note :  $(K_\ell, \Sigma_\ell, P_\ell)$   $\ell = 1, \dots, L$ , où  $L$  est le nombre d'éléments. On note  $S_i, i = 1, \dots, M$ , les noeuds du maillage, et  $\phi_1, \dots, \phi_N$ , les fonctions de base, avec  $N \leq M$ . On peut avoir deux types de noeuds :

- les noeuds libres :  $S_i \notin \Gamma_0$ . On a  $N$  noeuds libres
- les noeuds liés :  $S_i \in \Gamma_0$ . On a  $M - N$  noeuds liés.

Notons qu'on a intérêt à mettre des noeuds à l'intersection de  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  (ce seront des noeuds liés). Grâce à ceci, et à la cohérence globale et locale des éléments finis de Lagrange, on a  $H_N \subset H$ . On a donc bien des éléments finis

conformes. Récapitulons alors les notations :

- $M$  : nombre de noeuds total
- $N$  : nombre de noeuds libres
- $M_0 = M - N$  : nombre de noeuds liés
- $J_0 = \{ \text{indices des noeuds liés} \} \subset \{1, \dots, M\}$ . On a  $\text{card}J_0 = M_0$
- $J = \{ \text{indices des noeuds libres} \} = \{1 \dots M\} \setminus J_0$ . On a  $\text{card}J = N$ .

Pour la programmation des éléments finis, on a besoin de connaître, pour chaque noeud (local) de chaque élément, son numéro dans la numérotation globale. Pour cela on introduit un tableau  $\text{ng}(L, N_\ell)$ , où  $L$  est le nombre d'éléments et  $N_\ell$  est le nombre de noeuds par élément. (on le suppose constant par souci de simplicité,  $N_\ell$  peut en fait dépendre de  $L$ . Exemple : triangle - quadrangle). Pour tout  $\ell \in \{1, \dots, L\}$  et tout  $r \in \{1, \dots, N_\ell\}$ ,  $\text{ng}(\ell, r)$  est alors le numéro global du  $r$ -ième noeud du  $\ell$ -ième élément. On a également besoin de connaître les coordonnées de chaque noeud. On a donc deux tableaux  $x$  et  $y$  de dimension  $M$ , où  $x(i), y(i)$  représentent les coordonnées du  $i$ -ième noeud. Notons que les tableaux  $\text{ng}, x$  et  $y$  sont des données du mailleur (qui est un module externe par rapport au calcul éléments finis proprement dit). Pour les conditions aux limites, on se donne deux tableaux :

- $CF$  : conditions de Fourier
  - $CD$  : conditions de Dirichlet
- (on verra plus tard le format de ces deux tableaux)

### 4.3.2 Construction de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{G}$

On cherche à construire la matrice  $\mathcal{K}$  d'ordre  $(N \times N)$ , définie par :

$$\mathcal{K}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) \quad i, j \in J$$

Ainsi que le vecteur  $\mathcal{G}$ , défini par :

$$\mathcal{G}_i = T(\phi_i) - a(u_0, \phi_i) \quad i \in J \quad \text{card}J = N$$

La première question à résoudre est le choix de  $u_0$ . En effet, contrairement au cas unidimensionnel (voir exercice 38 page 119), il n'est pas toujours évident de trouver  $u_0 \in H_{\Gamma_0, g_0}^1$ . Pour se faciliter la tâche, on commet un "crime variationnel", en remplaçant  $u_0$  par

$$u_{0,N} = \sum_{j \in J_0}^N u_0(S_j) \phi_j.$$

Notons qu'on a pas forcément :  $u_{0,N} \in H_{\Gamma_0, g_0}^1$  ; c'est en ce sens que l'on commet un "crime". Mais par contre, on a bien  $u_{0,N}(S_j) = u_0(S_j)$  pour tout  $j \in J$ . On peut voir la fonction  $u_{0,N}$  comme une approximation non conforme de  $u_0 \in H_{\Gamma_0, g_0}^1$ . On remplace donc  $\mathcal{G}_i$  par :

$$\mathcal{G}_i = T(\phi_i) - \sum_{j \in J_0} g_0(S_j) a(\phi_j, \phi_i).$$

Calculons maintenant  $a(\phi_j, \phi_i)$  pour  $j = 1, \dots, M$ , et  $i = 1, \dots, M$ . On se sert donc pour l'implémentation pratique de la méthode, des fonctions de forme associées aux noeuds "liés", même si dans l'écriture du problème discret théorique, on n'en avait pas besoin.

#### Calcul de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{G}$

1. Calcul des contributions intérieures : on initialise les coefficients de la matrice  $\mathcal{K}$  et les composantes par les contributions provenant de  $a_\Omega$  et  $T_\Omega$ .

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{K}_{ij} = a_\Omega(\phi_j, \phi_i) \\ \mathcal{G}_i = T_\Omega(\phi_i) \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = 1, \dots, N, \\ j = 1, \dots, N. \end{array}$$

2. Calcul des termes de bord de Fourier. On ajoute maintenant à la matrice  $\mathcal{K}$  les contributions de bord :

$$\begin{array}{l} \mathcal{K}_{ij} \leftarrow \mathcal{K}_{ij} + a_{\Gamma_i}(\phi_j, \phi_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N. \\ \mathcal{G}_i \leftarrow \mathcal{G}_i + T_{\Gamma_i}(\phi_i) \quad i = 1 \dots M. \end{array}$$

3. Calcul des termes de bord de Dirichlet. On doit tenir compte ici du relèvement de la condition de bord :

$$\mathcal{G}_i \leftarrow \mathcal{G}_i - \sum_{i \in I_\infty} g_0(N_i) \mathcal{K}_{ij} \quad \forall i \in J$$

Après cette affectation, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{ij} &= a(\phi_j, \phi_i) \quad i, j \in J(\cup J_0) \\ \mathcal{G}_i &= T(\phi_i) - a(u_{0,N}, \phi_i).\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système linéaire

$$\sum_{j \in J} \mathcal{K}_{ij} \alpha_j = \mathcal{G}_i, \quad \forall i \in J. \quad (4.17)$$

4. Prise en compte des noeuds liés. Pour des questions de structure de données, on inclut en général les noeuds liés dans la résolution du système, et on résout donc le système linéaire d'ordre  $M \geq N$  suivant :

$$\sum_{j=1, \dots, N} \tilde{\mathcal{K}}_{ij} \alpha_j = \mathcal{G}_i, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (4.18)$$

avec  $\tilde{\mathcal{K}}_{ij} = \mathcal{K}_{ij}$  pour  $i, j \in J$ ,  $\tilde{\mathcal{K}}_{ij} = 0$  si  $(i, j) \notin J^2$ , et  $i \neq j$ , et  $\tilde{\mathcal{K}}_{ii} = 1$  si  $i \notin J$ . Ces deux systèmes sont équivalents, puisque les valeurs aux noeuds liées sont fixées.

Si par chance on a numéroté les noeuds de manière à ce que tous les noeuds liés soient en fin de numérotation, c.à.d. si  $J = \{1, \dots, N\}$  et  $J_0 = \{N+1, \dots, M\}$ , le système (4.18) est de la forme :

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathcal{K} & 0 \\ \hline \text{---} & \text{---} \\ 0 & Id_M \end{array} \right), \quad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \text{---} \\ \alpha_{N+1} \\ \vdots \\ \alpha_M \end{pmatrix}, \quad \text{et } \mathcal{G} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{G}_N \\ \text{---} \\ \mathcal{G}_{N+1} \\ \vdots \\ \mathcal{G}_M \end{pmatrix}$$

Dans le cas où la numérotation est quelconque, les noeuds liés ne sont pas forcément à la fin, et pour obtenir le système linéaire d'ordre  $M$  (4.18) (donc incluant les inconnues  $\alpha_i, i \in J_0$ , qui n'en sont pas vraiment) on peut adopter deux méthodes :

(a) Première méthode : on force les valeurs aux noeuds liés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{ii} &\leftarrow 1 \text{ pour tout } i \in J_0 \\ \mathcal{K}_{ij} &\leftarrow 0 \text{ pour tout } i \in J_0 \quad j \in \{1 \dots M\} \quad i \neq j \\ \mathcal{G}_i &\leftarrow g_0(S_i) \text{ pour tout } i \in J_0\end{aligned}$$

(b) Deuxième méthode : on force les valeurs aux noeuds liés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{ii} &\leftarrow 10^{20} \quad \forall i \in J_0 \\ \mathcal{G}_i &\leftarrow 10^{20}g_0(S_i) \quad \forall i \in J_0\end{aligned}$$

La deuxième méthode permet d'éviter l'affectation à 0 de coefficients extra-diagonaux de la matrice. Elle est donc un peu moins chère en temps de calcul.

**Conclusion** Après les calculs 1, 2, 3, 4, on a obtenu une matrice  $\mathcal{K}$  d'ordre  $M \times M$  et le vecteur  $\mathcal{G}$  de  $\mathbb{R}^M$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^M$  la solution du système  $\mathcal{K}\alpha = \mathcal{G}$ . Rappelons qu'on a alors :

$$\begin{aligned}u_N &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i, \\ &= \sum_{i \in J} \alpha_i \phi_i + \sum_{i \in J_0} \alpha_i \phi_i\end{aligned}$$

$$u_N = \tilde{u}_N + u_0$$

**Remarque 4.15 (Numérotation des noeuds)** Si on utilise une méthode itérative sans préconditionnement, la numérotation des noeuds n'est pas cruciale. Elle l'est par contre dans le cas d'une méthode directe et si on utilise une méthode itérative avec préconditionnement. Le choix de la numérotation s'effectue pour essayer de minimiser la largeur

iterative avec préconditionnement. Le choix de la numérotation s'efforce pour essayer de minimiser la largeur de bande. On pourra à ce sujet étudier l'influence de la numérotation sur deux cas simples sur la structure de la matrice.

### 4.3.3 Calcul de $a_\Omega$ et $T_\Omega$ , matrices élémentaires.

Détaillons maintenant le calcul des contributions intérieures, c'est à dire  $a_\Omega(\phi_i, \phi_j)$   $i = 1, \dots, M$ ,  $j = 1, \dots, M$  et  $T_\Omega(\phi_i)$   $i = 1, \dots, M$ . Par définition,

$$a_\Omega(\phi_i, \phi_j) = \int_\Omega p(x) \nabla \phi_i(x) \nabla \phi_j(x) dx + \int_\Omega q(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx.$$

Décomposons  $\Omega$  à l'aide du maillage éléments finis.

$$\Omega = \bigcup_{\ell=1}^L K_\ell.$$

En notant  $\theta(\phi_i, \phi_j)(x) = p(x) \nabla \phi_i(x) \nabla \phi_j(x) + q(x) \phi_i(x) \phi_j(x)$ ,

On a donc :

$$a_\Omega(\phi_i, \phi_j) = \sum_{\ell=1}^L \int_{K_\ell} \theta(\phi_i, \phi_j) dx.$$

Pour  $r$  et  $s$  numéros locaux de l'élément  $K_\ell$ , on pose :

$$k_{r,s}^\ell = \int_\ell \theta(\phi_s, \phi_r) dx.$$

On va calculer  $k_{r,s}^\ell$  puis on calcule  $a_\Omega(\phi_i, \phi_j)$ , en effectuant un parcours sur les éléments, ce qui s'exprime par l'algorithme suivant :

Initialisation :  $\mathcal{K}_{ij} \leftarrow 0$ ,  $i = 1, \dots, M$ ,  $j \leq i$ .

Boucle sur les éléments

Pour  $\ell = 1$  à  $L$  faire

    Pour  $r = 1$  à  $N_\ell$  faire

$i = \text{ng}(\ell, r)$  numéro global du noeud  $r$  de l'élément  $\ell$

Pour  $s = 1$  à  $r$  faire

calcul de  $k_{r,s}^\ell$

$j = \text{ng}(\ell, s)$

si  $i \geq j$

$\mathcal{K}_{ij} \leftarrow \mathcal{K}_{ij} + k_{r,s}^\ell$

sinon

$\mathcal{K}_{ji} \leftarrow \mathcal{K}_{ji} + k_{r,s}^\ell$

Fin pour

Fin pour

On a ainsi construit complètement la matrice de rigidité  $\mathcal{K}$ . Il reste à savoir comment calculer

$$k_{r,s}^\ell = \int_{\ell_e} \theta(\phi_s, \phi_r)(x) dx.$$

Ce calcul s'effectue sur l'élément de référence, et non sur les éléments  $K_\ell$ . On calcule ensuite la valeur de  $k_{r,s}^\ell$  par des changements de variable à l'aide de la transformation  $F_\ell$  (voir Figure 4.4 page 138). Notons :

$$F_\ell(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) = (a_0^\ell + a_1^\ell \bar{x} + a_2^\ell \bar{y}, b_0^\ell + b_1^\ell \bar{x} + b_2^\ell \bar{y}) \quad (4.19)$$

Notons que les coefficients  $a_i^\ell$  et  $b_i^\ell$  sont déterminés à partir des connaissances des coordonnées  $(x(i), y(i))$  où  $i = \text{ng}(\ell, r)$ . En effet, on peut déduire les coordonnées locales  $x(r), y(r)$ ,  $r = 1, N_\ell$ , des noeuds de l'élément  $\ell$ , à partir des coordonnées globales des noeuds  $(x(i), y(i))$ , et du tableau  $\text{ng}(\ell, r) = i$ . Sur l'élément courant  $K_\ell$ , le terme élémentaire  $k_{r,s}^\ell$  s'écrit donc

$$k_{r,s}^\ell = \int_{\ell} \theta(\phi_s(x, y), \phi_r(x, y)) dx dy.$$

Or,  $(x, y) = F_\ell(\bar{x}, \bar{y})$ ; donc par changement de variables, on a :

$$k_{r,s}^\ell = \int_{\bar{e}} \theta(\phi_s \circ F_\ell(\bar{x}, \bar{y}), \phi_r \circ F_\ell(\bar{x}, \bar{y})) \text{Jac}_{\bar{x}, \bar{y}}(F_\ell) d\bar{x} d\bar{y}$$

ou  $\text{Jac}_{\bar{x}, \bar{y}}(F_\ell)$  désigne le Jacobien de  $F_\ell$  en  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Or,  $\phi_s \circ F_\ell = \bar{\phi}_s$ , et, puisque  $F_\ell$  est définie par (4.19), on a :

$$\text{Jac}(F_\ell) = \text{Det}(DF_\ell) = \begin{vmatrix} a_1^\ell & b_1^\ell \\ a_2^\ell & b_2^\ell \end{vmatrix} = |a_1^\ell b_2^\ell - a_2^\ell b_1^\ell|$$

donc  $k_{r,s}^\ell = \text{Jac}(F_\ell) \bar{k}_{r,s}$ , où

$$\bar{k}_{r,s} = \int_{\bar{e}} \theta(\bar{\phi}_s(\bar{x}, \bar{y}), \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y})) d\bar{x} d\bar{y}$$

Etudions maintenant ce qu'on obtient pour  $\bar{k}_{r,s}$  dans le cas du problème modèle (4.11), on a :

$$\bar{k}_{r,s} = \int_{\bar{e}} [p(\bar{x}, \bar{y}) \nabla \bar{\phi}_s(\bar{x}, \bar{y}) \nabla \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y}) + q(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\phi}_s(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y})] d\bar{x} d\bar{y}.$$

Les fonctions de base  $\bar{\phi}_s$  et  $\bar{\phi}_r$  sont connues; on peut donc calculer  $\bar{k}_{r,s}$  explicitement si  $p$  et  $q$  sont faciles à intégrer. Si les fonctions  $p$  et  $q$  ou les fonctions de base  $\bar{\phi}$ , sont plus compliquées, on calcule  $\bar{k}_{r,s}$  en effectuant une intégration numérique. Rappelons que le principe d'une intégration numérique est d'approcher l'intégrale d'une fonction continue donnée  $\psi$ ,

$$I = \int_{\bar{e}} \psi(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}, \text{ par } \tilde{I} = \sum_{i=1}^{NP_I} \omega_i(P_i) \psi(P_i),$$

où  $NP_I$  est le nombre de points d'intégration, notés  $P_i$ , qu'on appelle souvent points d'intégration de Gauss, et les coefficients  $\omega_i$  sont les poids associés. Notons que les points  $P_i$  et les poids  $\omega_i$  sont indépendants de  $\psi$ . Prenons par exemple, dans le cas unidimensionnel,  $\bar{K} = [0, 1]$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 1$ , et  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$ . On approche alors

$$I = \int_0^1 \psi(x) dx \text{ par } \tilde{I} = \frac{1}{2}(\psi(0) + \psi(1)).$$

C'est la formule (bien connue) des trapèzes. Notons que dans le cadre d'une méthode, il est nécessaire de s'assurer que la méthode d'intégration numérique choisie soit suffisamment précise pour que :

1. le système  $\mathcal{K}\alpha = \mathcal{G}(N \times N)$  reste inversible,
2. l'ordre de convergence de la méthode reste le même.

Examinons maintenant des éléments en deux dimensions d'espace.

1. Élément fini  $P_1$  sur triangle Prenons  $NP_I = 1$  (on a donc un seul point de Gauss), choisissons  $p_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ , le centre de gravité du triangle  $\bar{K}$ , et  $\omega_1 = 1$ . On approche alors

$$I = \int_{\bar{\ell}} \psi(\bar{x}) d\bar{x} \text{ par } \psi(p_1).$$

On vérifiera que cette intégration numérique est exacte pour les polynômes d'ordre 1 (exercice 58 page 165).

2.  $P_2$  sur triangles. On prend maintenant  $NP_I = 3$ , et on choisit comme points de Gauss :

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), p_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), p_3 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

et les poids d'intégration  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{6}$ . On peut montrer que cette intégration numérique est exacte pour les polynômes d'ordre 2 (voir exercice 58 page 165).

Remarquons que, lors de l'intégration numérique du terme élémentaire

$$k_{r,s}^{\ell} = \int_{\bar{\ell}} [p(\bar{x}, \bar{y})(F_{\ell}(\bar{x}, \bar{y})) \nabla \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \nabla \bar{\phi}_s(\bar{x}, \bar{y}) + q(\bar{x}, \bar{y})(F_{\ell}(\bar{x}, \bar{y})) \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\phi}_s] d\bar{x} d\bar{y},$$

on approche  $k_{r,s}^{\ell}$  par

$$\bar{k}_{r,s}^{\ell} \approx \sum_{i=1}^{NP_I} \omega_i [p(F_i(\mathcal{D}_i)) \nabla \bar{\phi}_r(\mathcal{D}_i) \cdot \nabla \bar{\phi}_s(\mathcal{D}_i) + q(F_i(\mathcal{D}_i)) \bar{\phi}_r(\mathcal{D}_i) \bar{\phi}_s(\mathcal{D}_i)]$$

$$r_{r,s} = \sum_{i=1}^{NP_I} \omega_i [p(F_\ell(x_i)) \psi_r(x_i) \cdot \psi_s(x_i) + q(F_\ell(x_i)) \psi_r(x_i) \psi_s(x_i)]$$

Les valeurs  $\nabla \bar{\phi}_r(P_i)$ ,  $\nabla \bar{\phi}_s(P_i)$ ,  $\bar{\phi}_r(P_i)$  et  $\bar{\phi}_s(P_i)$  sont calculées une fois pour toutes, et dans la boucle sur  $\ell$ , il ne reste donc plus qu'à évaluer les fonctions  $p$  et  $q$  aux points  $F_\ell(P_i)$ . Donnons maintenant un résumé de la mise en oeuvre de la procédure d'intégration numérique (indépendante de  $\ell$ ). Les données de la procédure sont :

- les coefficients  $\omega_i, i = 1, \dots, NP_I$ ,
- les coordonnées  $(xpg(i), ypg(i)), i = 1, \dots, NP_I$  des points de Gauss,
- les valeurs de  $\phi_r, \frac{\partial \phi}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  aux points de Gauss, notées  $\phi(r, i), \phi_x(r, i)$  et  $\phi_y(r, i), r = 1 \dots N_\ell, i = 1, \dots, NP_I$ .

Pour  $\ell$  donné, on cherche à calculer :

$$I = \int_{\bar{K}} p(F_\ell(\bar{x}, \bar{y})) \frac{\partial \phi_r}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \phi_s}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} + \int_e q(F_\ell(\bar{x}, \bar{y})) \phi_r(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \phi_s(\bar{x}, \bar{y}).$$

On propose l'algorithme suivant :

Initialisation :  $I \leftarrow 0$

Pour  $i = 1$  à  $NP_I$ , faire :

$$p_i = p(F_e(P_i))$$

$$q_i = q(F_e(P_i))$$

$$I \leftarrow I + \omega_i (p_i \phi_x(r, i) \phi_y(s, i) + q_i \phi(r, i) \phi(s, i))$$

Fin pour

On procède de même pour le calcul du second membre

$$T_\Omega(\phi_i) = \int_\Omega f(x, y) \phi'_i(x, y) dx dy = \sum_{\ell=1}^L g_\ell, \text{ où } g_\ell = \int_{\ell_e} f(x, y) \phi_i(x, y) dx dy.$$

L'algorithme s'écrit :

Initialisation de  $\mathcal{G}$  à 0 :  $\mathcal{G}_i \leftarrow 0 \quad i = 1$  à  $M$

Pour  $\ell = 1$  à  $L$

Pour  $r = 1$  à  $N_\ell$

$$\text{Calcul de } g_\ell^r = \int_{\ell_e} f(x, y) \phi_r(x, y) dx dy$$

$$i = \text{ng}(\ell, r)$$

$$\mathcal{G}_i \leftarrow \mathcal{G}_i + g_\ell^r$$

Fin pour

Fin pour

Il reste le calcul de  $g_\ell^r$  qui se ramène au calcul de l'élément de référence par changement de variable.

On a :

$$g_\ell^r = \int_{K_\ell} f(x, y) \phi_r(x, y) dx dy = \int_{\bar{K}} f \circ F_\ell(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y}) \text{Jac}_{\bar{x}, \bar{y}}(F_\ell) d\bar{x} d\bar{y}.$$

L'intégration numérique est identique à celle effectuée pour  $\bar{k}_{r,s}$ .

#### 4.3.4 Calcul de $a_{\Gamma_1}$ et $T_{\Gamma_1}$ (contributions des arêtes de bord "Fourier").

Détaillons maintenant le calcul des contributions des bords où s'applique la condition de Fourier, c'est à dire  $a_{\Gamma_1}(\phi_i, \phi_j)$   $i = 1, \dots, M$ ,  $j = 1, \dots, M$  et  $T_{\Gamma_1}(\phi_i)$   $i = 1, \dots, M$ . Par définition,

$$a_{\Gamma_1}(\phi_i, \phi_j) = \int_{\Gamma_1} p(x) \nabla \phi_i(x) \cdot \nabla \phi_j(x) dx + \int_{\Gamma_1} q(x) \phi_i(x) \phi_j(x) dx.$$

Notons que  $a_{\Gamma_1}(\phi_i, \phi_j) = 0$  si  $\phi_i$  et  $\phi_j$  sont associées à des noeuds  $S_i, S_j$  de d'un élément sans arête commune avec les arêtes de la frontière. Soit  $L1$  le nombre d'arêtes  $\epsilon_k, k = 1, \dots, L1$  du maillage incluses dans  $\Gamma_1$ . Rappelons que les noeuds soumis aux conditions de Fourier sont répertoriés dans un tableau  $CF$ , de dimensions  $(L1, 2)$ , qui donne les informations suivantes

1.  $CF(k, 1)$  contient le numéro  $\ell$  de l'élément  $K_\ell$  auquel appartient l'arête  $\epsilon_k$ .
2.  $CF(k, 2)$  contient le premier numéro des noeuds de l'arête  $\epsilon_k$  dans l'élément  $K_\ell$ . On suppose que la numérotation des noeuds locaux a été effectuée de manière "adroite", par exemple dans le sens trigonométrique. Dans ce cas,  $CF(k, 2)$  détermine tous les noeuds de l'arête  $\epsilon_k$  dans l'ordre, puisqu'on connaît le nombre de noeuds par arête et le sens de numérotation des noeuds. Donnons des exemples pour trois cas

le nombre de noeuds par arête et le sens de numérotation des noeuds. Donnons des exemples pour trois cas différents, représentés sur la figure 4.7.

- (a) Dans le premier cas (à droite sur la figure), qui représente un élément fini  $P1$ , on a  $CF(k, 2) = 3$  et le noeud suivant sur l'arête est 1.
- (b) Dans le second cas (au centre sur la figure), qui représente un élément fini  $P2$ , on a  $CF(k, 2) = 3$  et les noeuds suivants sur l'arête sont 4 et 5.
- (c) Enfin dans l'élément  $P1$  "de coin" représenté à gauche sur la figure, on a  $CF(k, 1) = \ell$ ,  $CF(k', 1) = \ell$ ,  $CF(k, 2) = 1$ ,  $CF(k', 2) = 2$ .

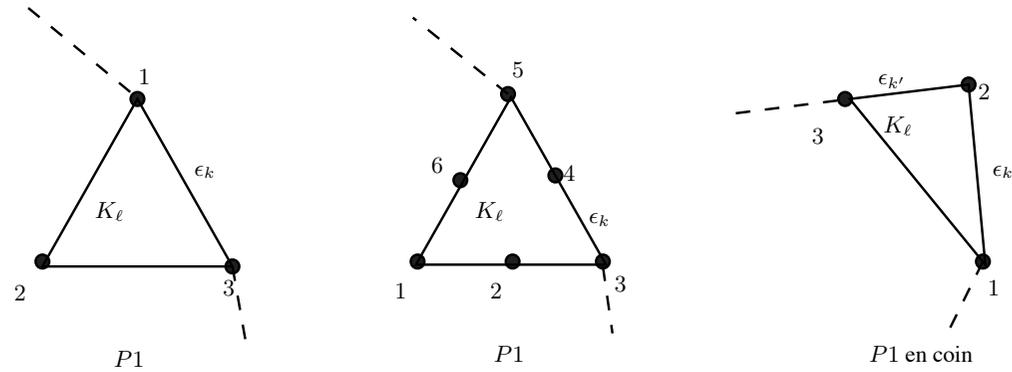


FIGURE 4.7 – Exemples de numérotation d'arête du bord

Pour  $k = 1, \dots, L1$ , on note  $\hat{S}_k$  l'ensemble des noeuds locaux de  $\epsilon_k$ , donnés par  $CF(k, 2)$  en appliquant la règle *ad hoc* (par exemple le sens trigonométrique). On peut alors définir :

$$S_k = \{(r, s) \in (\hat{S}_k)^2 / r < s\}$$

L'algorithme de prise en compte des conditions de Fourier s'écrit alors :

Pour  $k = 1 \dots L1$

$\ell = CF(k, 1)$ .

Pour chaque  $(r, s) \in S_k$  faire

calcul de  $I_{rs}^\ell = \int_{C_k} p(x)\sigma(x)\phi_r^\ell(x)\phi_s^\ell(x)dx$  (éventuellement avec intégration numérique)

$i = \text{ng}(\ell, r)$

$j = \text{ng}(\ell, s)$

si  $j \leq i$

$\mathcal{K}ij \leftarrow \mathcal{K}ij + I_{rs}^\ell$

sinon

$\mathcal{K}ij \leftarrow \mathcal{K}ji + I_{rs}^\ell$

Fin si

Fin pour

Fin pour

Le calcul de  $I_{rs}^\ell$  s'effectue sur l'élément de référence (avec éventuellement intégration numérique). De même, on

a une procédure similaire pour le calcul de  $T_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} p(x)g_1(x)v(x)d\gamma(x)$ .

$$\mathcal{G}_i \leftarrow \mathcal{G}_i + \int_{\Gamma_2} p(x)g_1(x)\phi_i(x)d\gamma(x)$$

#### 4.3.5 Prise en compte des noeuds liés dans le second membre

Après les calculs précédents, on a maintenant dans  $\mathcal{G}_i$  :

$$\mathcal{G}_i = \int_{\Omega} f(x)\phi_i(x)dx + \int_{\Gamma_1} p(x)g_1(x)\phi_i(x)d\gamma(x)$$

Il faut maintenant retirer du second membre, les combinaisons venant des noeuds liés :

$$\mathcal{G}_i \leftarrow \mathcal{G}_i - \sum_{j \in J_0} g_0(S_j) a(\phi_j, \phi_i)$$

où  $J_0$  est l'ensemble des indices des noeuds liés. On utilise pour cela le tableau  $CD$  qui donne les conditions, de Dirichlet, de dimension  $M_0$  où  $M_0 = \text{card}J_0$ . Pour  $i_0 = 1, \dots, M_0$ ,  $CD(i_0) = j_0 \in J_0$  est le numéro du noeud lié dans la numérotation globale. La procédure est donc la suivante.

```

    Pour  $i_0 = 1, \dots, M_0$ , faire
       $j = CD(i_0)$ 
       $a = g_0(S_j)$ 
      si ( $i \leq j$ )
         $\mathcal{G}_i \leftarrow \mathcal{G}_i - a\mathcal{K}_{ij}$ 
      sinon
         $\mathcal{G}_i \leftarrow \mathcal{G}_i - a\mathcal{K}_{ji}$ 
    Fin si
  Fin pour

```

### 4.3.6 Stockage de la matrice $\mathcal{K}$

Remarquons que la matrice  $\mathcal{K}$  est creuse (et même très creuse), en effet  $a(\phi_j, \phi_i) = 0$  dès que

$$\text{supp}(\phi_i) \cap \text{supp}(\phi_j) = \emptyset$$

Examinons une possibilité de stockage de la matrice  $\mathcal{K}$ . Soit  $NK$  le nombre d'éléments non nuls de la matrice  $\mathcal{K}$ . On peut stocker la matrice dans un seul tableau  $KMAT$  en mettant bout à bout les coefficients non nuls de la première ligne, puis ceux de la deuxième ligne, etc... jusqu'à ceux de la dernière ligne. Pour repérer les éléments de  $\mathcal{K}$  dans le tableau  $KMAT$ , on a alors besoin de pointeurs. Le premier pointeur, nommé,  $IC$  est de dimension  $NK$ . La valeur de  $IC(k)$  est le numéro de la colonne de  $K(k)$ . On introduit alors le pointeur  $IL(\ell)$ ,  $\ell = 1, \dots, NL$ , où  $NL$  est le nombre de lignes, où  $IL(\ell)$  est l'indice dans  $KMAT$  du début de la  $\ell$ -ième ligne. L'identification entre  $KMAT$  et  $\mathcal{K}$  se fait alors par la procédure suivante :

```

  Pour  $k = 1 \dots NK$ 
    si  $IL(m) \leq k < IL(m+1)$  alors
       $KMAT(k) = \mathcal{K}_{m, IC(k)}$ 
    Fin si
  Fin pour

```

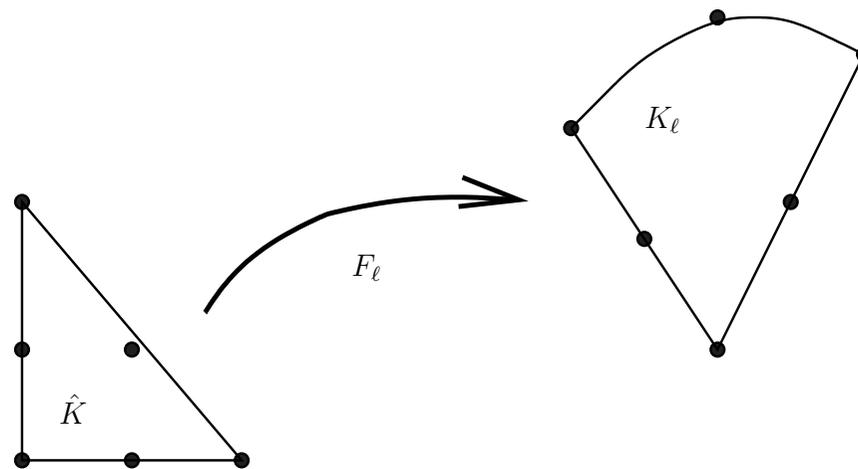


FIGURE 4.8 – Transformation isoparamétrique

La matrice  $\mathcal{K}$  est symétrique définie positive, on peut donc utiliser une méthode de type gradient conjugué préconditionné (voir cours de Licence). Notons que la structure de la matrice dépend de la numérotation des noeuds. Il est donc important d'utiliser des algorithmes performants de maillage et de numérotation.

#### 4.4 Eléments finis isoparamétriques

Dans le cas où  $\Omega$  est polygonal, si on utilise des éléments finis de type  $P_2$ , les noeuds de la frontière sont effectivement sur la frontière même si on les calcule à partir de l'élément fini de référence. Par contre, si le bord est courbe, ce n'est plus vrai. L'utilisation d'éléments finis "isoparamétriques" va permettre de faire en sorte que tous les noeuds frontières soient effectivement sur le bord, comme sur la figure 4.8. Pour obtenir une transformation isoparamétrique, on définit

$$\begin{aligned} F_\ell : K &\rightarrow K_\ell \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

à partir des fonctions de base de l'élément fini de référence :

$$x = \sum_{r=1}^{N_\ell} x_r \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y}), \quad y = \sum_{r=1}^{N_\ell} y_r \bar{\phi}_r(\bar{x}, \bar{y}),$$

où  $N_\ell$  est le nombre de noeuds de l'élément et  $(x_r, y_r)$  sont les coordonnées du  $r$ -ième noeud de  $K_\ell$ . Remarquons que la transformation  $F_\ell$  isoparamétrique  $P_1$  est identique à celle des éléments finis classiques. Par contre, la transformation isoparamétrique  $P_2$  n'est plus affine, alors qu'elle l'est en éléments finis classiques. Notons que les fonctions de base locales vérifient toujours

$$\phi_r^\ell \circ F_\ell = \phi_r, \quad \forall \ell = 1, \dots, L, \quad \forall r = 1, \dots, N_\ell.$$

On peut alors se poser le problème de l'inversibilité de  $F_\ell$ . On ne peut pas malheureusement démontrer que  $F_\ell$  est inversible dans tous les cas, toutefois, cela s'avère être le cas dans la plupart des cas pratiques. L'intérêt de la transformation isoparamétrique est de pouvoir traiter les bords courbes, ainsi que les éléments finis  $Q1$  sur quadrilatères. Notons que le calcul de  $\phi_r^\ell$  est toujours inutile, car on se ramène encore à l'élément de référence.

## 4.5 Analyse d'erreur

### 4.5.1 Erreurs de discrétisation et d'interpolation

On considère toujours le problème modèle (4.11) page 146 sur lequel on a étudié la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis. On rappelle que la formulation faible de ce problème est donnée en (4.14) page 147, et que

sous les hypothèses (4.12) page 146, le problème (4.14) admet une unique solution  $\tilde{u} \in H = H_{\Gamma_0}^1 = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ . La méthode d'approximation variationnelle du problème (4.14) consiste à chercher  $\tilde{u}_N \in H_N = \text{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  solution de (4.16) page 147, où les fonctions  $\phi_1, \dots, \phi_N$  sont les fonctions de base éléments finis associés aux noeuds  $x_1, \dots, x_N$ . Comme les hypothèses (3.21) page 107 sont vérifiées, l'estimation (3.29) page 110 entre  $\tilde{u}$  solution de (4.14) et  $\tilde{u}^{(N)}$  solution de (4.16) est donc vérifiée. On a donc :

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_N\|_{H^1} \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} d(\tilde{u}, H_N),$$

où  $M$  (resp.  $\alpha$ ) est la constante de continuité (resp. de coercivité) de  $a$ . Comme  $u = u_0 + \tilde{u}$ , on a, en posant  $c = \sqrt{\frac{M}{\alpha}}$ ,

$$\|u - u_N\| \leq C \|u - w\| \forall w \in H_N, \quad (4.20)$$

où  $u_N = \tilde{u}_N + u_0$ . Notons que dans l'implantation pratique de la méthode d'éléments finis, lorsqu'on calcule  $T(v) = T(v) - a(u_0, v)$ , on remplace  $u_0$  par  $u_{0,N} \in H_N$ , donc on commet une légère erreur sur  $T$ . De plus, on calcule  $a(\phi_i, \phi_j)$  à l'aide d'intégrations numériques : l'inégalité (4.20) n'est donc vérifiée en pratique que de manière approchée. On supposera cependant, dans la suite de ce paragraphe, que les erreurs commises sont négligeables et que l'inégalité (4.20) est bien vérifiée. De la même manière qu'on a défini l'interpolée sur un élément  $K$ , (voir définition 4.3 page 137, on va maintenant définir l'interpolée sur  $H^1(\Omega)$  tout entier, de manière à établir une majoration de l'erreur de discrétisation grâce à (4.20).

**Définition 4.16 (Interpolée dans  $H_N$ )** . Soit  $u \in H^1(\Omega)$  et  $H_N = \text{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$  où les fonctions  $\phi_1 \dots \phi_N$  sont des fonctions de base éléments finis associées aux noeuds  $S_1 \dots S_N$  d'un maillage éléments finis de  $\Omega$ . Alors on définit l'interpolée de  $u$  dans  $H_N$ ,  $u_I \in H_N$  par :

$$u_I = \sum_{i=1}^N u(S_i) \phi_i.$$

$$u_I = \sum_{i=1}^N u(x_i) \varphi_i.$$

Comme  $u_I \in H_N$ , on peut prendre  $W = u_I$  dans (4.20), ce qui fournit un majorant de l'erreur de discrétisation :

$$\|u - u_N\|_{H^1} \leq C \|u - u_I\|_{H^1}$$

On appelle erreur d'interpolation le terme  $\|u - u_I\|_{H^1}$

### 4.5.2 Erreur d'interpolation en dimension 1

Soit  $\Omega = ]0, 1[$ , on considère un maillage classique, défini par les  $N + 2$  points  $(x_i)_{i=0 \dots N+1}$ , avec  $x_0 = 0$  et  $x_{N+1} = 1$ , et on note

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, N + 1, \quad \text{et } h = \max\{h_i, \quad i = 0, \dots, N + 1\}$$

On va montrer que si  $u \in H^2(]0, 1[)$ , alors on peut obtenir une majoration de l'erreur d'interpolation  $\|u - u_I\|_{H^1}$ .

On rappelle (voir exercice 34 page 119) que si  $u \in H^1(]0, 1[)$  alors  $u$  est continue.

En particulier, on a donc  $H^2(]0, 1[) \subset C^1([0, 1])$ . Remarquons que ce résultat est lié à la dimension 1, voir injection de Sobolev, cours d'analyse fonctionnelle ou [1]. On va démontrer le résultat suivant sur l'erreur d'interpolation.

**Théorème 4.17 (majoration de l'erreur d'interpolation, dimension 1)** *Soit  $u \in H^2(]0, 1[)$ , et soit  $u_I$  son interpolée sur  $H_N = Vect\{\phi_i, \quad i = 1, \dots, N\}$ , où  $\phi_i$  désigne la  $i$ -ème fonction de base élément fini P1 associée au noeud  $x_i$  d'un maillage élément fini de  $]0, 1[$ . Alors il existe  $C \in \mathbb{R}$  ne dépendant que de  $u$ , tel que*

$$\|u - u_I\|_{H^1} \leq Ch. \tag{4.21}$$

**Démonstration :** On veut estimer

$$\|u - u_I\|_{H^1}^2 = |u - u_I|_0^2 + |u - u_I|_1^2$$

où  $|v|_0 = \|v\|_{L^2}$  et  $|v|_1 = \|Dv\|_{L^2}$ . Calculons  $|u - u_I|_1^2$  :

$$|u - u_I|_1^2 = \int_0^1 |u' - u_I'|^2 dx = \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(x) - u_I'(x)|^2 dx.$$

Or pour  $x \in ]x_i, x_{i+1}[$  on a

$$u'_I = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_i} = u'(\xi_i),$$

pour un certain  $\xi_i \in ]x_i, x_{i+1}[$ . On a donc :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(x) - u'_I(x)|^2 dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(x) - u'(\xi_i)|^2 dx.$$

On en déduit que :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(x) - u'_I(x)|^2 dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \int_{\xi_i}^x u''(t) dt \right|^2 dx,$$

et donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(x) - u'_I(x)|^2 dx &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{\xi_i}^x |u''(t)|^2 dt |x - \xi_i| dx \\ &\leq h_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \int_{\xi_i}^x |u''(t)|^2 dt \right) dx, \end{aligned}$$

car  $|x - \xi_i| \leq h_i$ . En réappliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'(x) - u'_I(x)|^2 dx \leq h_i^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(t)|^2 dt$$

En sommant sur  $i$ , ceci entraîne :

$$|u - u_I|_1^2 \leq h^2 \int_0^1 |u''(t)|^2 dt. \quad (4.22)$$

Il reste maintenant à majorer  $|u - u_I|_2 = \int_0^1 |u - u_I|^2 dx$ . Pour  $x \in ]x_i, x_{i+1}[$

Il reste maintenant à majorer  $|u - u_I|_0 = \int_0^1 |u - u_I| dx$ . Pour  $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$|u(x) - u_I(x)|^2 = \left( \int_{x_i}^x (u'(t) - u'_I(t)) dt \right)^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc :

$$|u(x) - u_I(x)|^2 \leq \int_{x_i}^x (u'(t) - u'_I(t))^2 dt \underbrace{|x - x_i|}_{\leq h_i}$$

Par des calculs similaires aux précédents, on obtient donc :

$$\begin{aligned} |u(x) - u_I(x)|^2 &\leq \int_{x_i}^x h_i \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(t)|^2 dt \right) dx h_i \\ &\leq h_i^3 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

En intégrant sur  $[x_i, x_{i+1}]$ , il vient :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u(x) - u_I(x)|^2 dx \leq h_i^4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u''(t))^2 dt,$$

et en sommant sur  $i = 1, \dots, N$  :

$$\int_0^1 (u(x) - u_I(x))^2 dx \leq h^4 \int_0^1 (u''(t))^2 dt.$$

On a donc :

$$|u - u_I|_0 \leq h^2 |u|_2$$

ce qui entraîne, avec (4.22) :

$$\begin{aligned} \|u - u_I\|^2 &\leq h^4 |u|_2^2 + h^2 |u|_2^2 \\ &\leq (1 + h^2) h^2 |u|_2^2 \end{aligned}$$

On en déduit le résultat annoncé. ■

On en déduit le résultat d'estimation d'erreur suivant :

**Corollaire 4.18 (Estimation d'erreur, P1, dimension 1)** Soit  $\Omega = ]0, 1[$ ; soit  $f \in L^2(\Omega)$  et  $u \in H_0^1(\Omega)$  l'unique solution du problème

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \end{cases},$$

et  $u_{\mathcal{T}}$  l'approximation éléments finis P1 obtenue sur un maillage admissible  $\mathcal{T}$  de pas  $h_{\mathcal{T}} = \max_{i=1, \dots, N} \{h_i\}$ . Alors il existe  $C \in \mathbb{R}$  ne dépendant que de  $\Omega$  et  $f$  tel que  $\|u - u_{\mathcal{T}}\| < Ch$ .

Ce résultat se généralise au cas de plusieurs dimensions d'espace (voir Ciarlet) ; si  $\Omega$  un ouvert polygonal convexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , le résultat des conditions géométriques sur le maillage, nécessaires pour obtenir le résultat d'interpolation. Par exemple pour un maillage triangulaire en deux dimensions d'espace, intervient une condition d'angle : on demande que la famille de maillages considérée soit telle qu'il existe  $\beta > 0$  tel que  $\beta \leq \theta \leq \pi - \beta$  pour tout angle  $\theta$  du maillage.

**Remarque 4.19 (Sur les techniques d'estimation d'erreur)** Lorsqu'on a voulu montrer des estimations d'erreur pour la méthode des différences finies, on a utilisé le principe de positivité, la consistance et la stabilité en norme  $L^\infty$ . En volumes finis et éléments finis, on n'utilise pas le principe de positivité. En volumes finis, la stabilité en norme  $L^2$  est obtenue grâce à l'inégalité de Poincaré discrète, et la consistance est en fait la consistance des flux. Notons qu'en volumes finis on se sert aussi de la conservativité des flux numériques pour la preuve de convergence. Enfin, en éléments finis, la stabilité est obtenue grâce à la coercivité de la forme bilinéaire, et la consistance provient du contrôle de l'erreur d'interpolation.

Même si le principe de positivité n'est pas explicitement utilisé pour les preuves de convergence des éléments finis et volumes finis, il est toutefois intéressant de voir à quelles conditions ce principe est respecté, car il est parfois très important en pratique.

Revenons d'abord le cas du schéma volumes finis sur un maillage  $\mathcal{T}$  admissible pour la discrétisation de l'équation

représentons à nouveau le cas du schéma volumes finis sur un maillage  $\mathcal{T}$  admissible pour la discrétisation de l'équation (3.1).

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rappelons que le schéma volumes finis s'écrit :

$$\sum_{K \in \mathcal{C}} \left( \sum_{\sigma \in \xi_K \cap \xi_{int}} \tau_{K,L}(u_K - u_L) + \sum_{\sigma \in \xi_K \cap \xi_{ext}} \tau_{K,\sigma} u_K \right) = |K| f_K, \quad (4.23)$$

avec

$$\tau_{K,L} = \frac{|K||L|}{d(x_K, x_L)} \text{ et } \tau_{K,\sigma} = \frac{|\sigma|}{d(x_K, \partial\Omega)},$$

où  $|K|$ , (resp.  $|\sigma|$ ) désigne la mesure de Lebesgue en dimension  $d$  (resp.  $d-1$ ) de  $K$  (resp.  $\sigma$ ).

Notons que les coefficients  $\tau_{K,L}$  et  $\tau_{K,\sigma}$  sont positifs, grâce au fait que le maillage est admissible (et donc  $X_K \vec{X}_L = d(X_K, X_L) n_{\vec{K}L}$ , où  $X_K \vec{X}_L$  désigne le vecteur d'extrémités  $X_K$  et  $X_L$  et  $n_{\vec{K}L}$  la normale unitaire à  $K|L$  sortante de  $K$ ).

Notons que le schéma (4.23) s'écrit comme une somme de termes d'échange entre les mailles  $K$  et  $L$ , avec des coefficients  $\tau_{KL}$  positifs. C'est grâce à cette propriété que l'on montre facilement que le principe de positivité est vérifié. Considérons maintenant la méthode des éléments finis  $P1$ , pour la résolution du problème (3.1) sur maillage triangulaire. On sait (voir par exemple Ciarlet) que si le maillage satisfait la condition faible de Delaunay (qui stipule que la somme de deux angles opposés à une même arête doit être inférieure à  $\pi$ ), alors le principe du maximum est vérifié. Ce résultat peut se retrouver en écrivant le schéma éléments finis sous la forme d'un schéma volumes finis.

### 4.5.3 Super convergence

On considère ici un ouvert  $\Omega$  polygonal convexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , et on suppose que  $f \in L^2(\Omega)$ . On s'intéresse à l'approximation par éléments finis  $P1$  de la solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  du problème (3.5). On a vu dans le paragraphe précédent (corollaire 4.18) qu'on peut estimer l'erreur en norme  $L^2$  entre la solution exacte  $u$  et la solution approchée par éléments finis  $P1$ ; en effet, comme l'erreur d'interpolation est d'ordre  $h$ , on déduit une estimation

sur l'erreur de discrétisation, également d'ordre  $h$ . En fait, si la solution  $u$  de (3.1) est dans  $H^2$ , il se produit un "petit miracle", car on peut montrer grâce à une technique astucieuse, dite "truc d'Aubin-Nitsche", que l'erreur de discrétisation en norme  $L^2$  est en fait d'ordre 2.

**Théorème 4.20 (Super convergence des éléments finis P1)** Soit  $\Omega$  un ouvert polygonal convexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ ; soit  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u$  solution de (3.5),  $u_{\mathcal{T}}$  la solution approchée obtenue par éléments finis P1, sur un maillage éléments finis  $\mathcal{T}$ . Soit

$$h_{\mathcal{T}} = \max_{K \in \mathcal{T}} \text{diam} K.$$

Alors il existe  $C \in \mathbb{R}$  ne dépendant que de  $\Omega$  et  $f$  tel que :

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \text{ et } \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2.$$

**Démonstration :** Par le théorème de régularité 3.9 page 102, il existe  $C_1 \in \mathbb{R}_+$  ne dépendant que de  $\Omega$  tel que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce à ce résultat, on a obtenu (voir le théorème 4.18) qu'il existe  $C_2$  ne dépendant que de  $\Omega$ ,  $\beta$  et tel que

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L^2} h$$

Soit maintenant  $e_{\mathcal{T}} = u - u_{\mathcal{T}}$  et  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  vérifiant

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi(x) \cdot \nabla \psi(x) dx = \int_{\Omega} e_{\mathcal{T}}(x) \psi(x) dx, \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \quad (4.24)$$

On peut aussi dire que  $\varphi$  est la solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = e_{\mathcal{T}} \text{ dans } \Omega \\ \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme  $e \in L^2(\Omega)$ , par le théorème 3.9, il existe  $C_3 \in \mathbb{R}_+$  ne dépendant que  $\Omega$  tel que

$$\|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \leq C_3 \|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Or  $\|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} e_{\mathcal{T}}(x)e_{\mathcal{T}}(x)dx = \int_{\Omega} \nabla\varphi(x) \cdot \nabla e(x)dx$ , en prenant  $\psi = e_{\mathcal{T}}$  dans (4.24).

Soit  $\varphi_{\mathcal{T}}$  la solution approchée par éléments finis P1 du problème (4.24), c.à.d solution de :

$$\begin{cases} \varphi_{\mathcal{T}} \in V_{\mathcal{T},0} = \{v \in C(\bar{\Omega}); v|_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}, v|_{\partial\Omega} = 0\} \\ \int_{\Omega} \nabla\varphi_{\mathcal{T}}(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} e(x)v(x) dx, \forall v \in V_{\mathcal{T},0} \end{cases} \quad (4.25)$$

On sait que  $u_{\mathcal{T}}$  vérifie :

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi_{\mathcal{T}}(x) \cdot \nabla(u - u_{\mathcal{T}})(x) dx = 0;$$

on peut donc écrire que :

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \nabla(\varphi - \varphi_{\mathcal{T}})(x) \cdot \nabla(u - u_{\mathcal{T}})(x) dx \geq \|\varphi - \varphi_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)}$$

D'après le théorème 4.18, on a :

$$\|\varphi - \varphi_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|e\|_{L^2(\Omega)} h_{\mathcal{T}} \text{ et } \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L^2(\Omega)} h_{\mathcal{T}}.$$

On en déduit que :

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} h_{\mathcal{T}}^2.$$

Ce qui démontre le théorème.

#### 4.5.4 Traitement des singularités

Les estimations d'erreur obtenues au paragraphe précédent reposent sur la régularité  $H^2$  de  $u$ . Que se passe-t-il si cette régularité n'est plus vérifiée ? Par exemple, si le domaine  $\Omega$  possède un coin rentrant, on sait que dans ce cas, la solution  $u$  du problème (3.5) n'est plus dans  $H^2(\Omega)$ , mais dans un espace  $H^{1+s}(\Omega)$ , où  $s$  dépend de l'angle du coin rentrant. Considérons donc pour fixer les idées le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \text{ où } \Omega \text{ est un ouvert} \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ polyg\u00f4nal avec un coin rentrant.} \end{cases}$$

Pour approcher correctement la singularité, on peut raffiner le maillage dans le voisinage du coin. On peut également, lorsque cela est possible, modifier l'espace d'approximation pour tenir compte de la singularité. Dans le cas d'un polyg\u00f4ne avec un coin rentrant par exemple, on sait trouver  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  (et  $\psi \notin H^2(\Omega)$ ) telle que si  $u$  est solution de (3.5) avec  $f \in L^2(\Omega)$ , alors il existe un unique  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $u - \alpha\psi \in H^2(\Omega)$ .

Examinons le cas d'une approximation par éléments finis de Lagrange. Dans le cas où  $u$  est régulière, l'espace d'approximation est

$$V_{\mathcal{T}} = \text{Vect}\{\phi_i, i = 1, N_{\mathcal{T}}\},$$

où  $N_{\mathcal{T}}$  est le nombre de n\u00f4uds internes du maillage  $\mathcal{T}$  de  $\Omega$  consid\u00e9r\u00e9 et  $(\phi_i)_{i=1, N_{\mathcal{T}}}$  la famille des fonctions de forme associ\u00e9es aux n\u00f4uds.

Dans le cas d'une singularit\u00e9 port\u00e9e par la fonction  $\psi$  introduite ci-dessus, on modifie l'espace  $V$  et on prend maintenant :  $V_{\mathcal{T}} = \text{Vect}\{\phi_i, i = 1, N_{\mathcal{T}}\} \oplus \mathbb{R}\psi$ . Notons que  $V_{\mathcal{T}} \subset H_0^1(\Omega)$ , car  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ . Reprenons maintenant l'estimation d'erreur. Gr\u00e2ce au lemme de C\u00e9a, on a toujours

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1} \leq \frac{M}{\alpha} \|u - w\|_{H^1(\Omega)}, \forall w \in V_{\mathcal{T}}.$$

On a donc également :

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1} \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \alpha\psi - w\|_{H^1(\Omega)}, \forall w \in V_{\mathcal{T}}.$$

puisque  $\alpha\psi + w \in V_{\mathcal{T}}$ . Or,  $u - \alpha\psi = \tilde{u} \in H^2(\Omega)$ .

Donc  $\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1} \leq \frac{M}{\alpha} \|\tilde{u} - w\|_{H^1(\Omega)}, \forall w \in V_{\mathcal{T}}$ .

Et grâce aux résultats d'interpolation qu'on a admis, si on note  $\tilde{u}_I$  l'interpolée de  $\tilde{u}$  dans  $V_{\mathcal{T}}$ , on a :

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \|\tilde{u} - \tilde{u}_I\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} C_2 \|\tilde{u}\|_{H^2(\Omega)} h.$$

On obtient donc encore une estimation d'erreur en  $h$ .

Examinons maintenant le système linéaire obtenu avec cette nouvelle approximation. On effectue un développement de Galerkin sur la base de  $V_{\mathcal{T}}$ . On pose

$$u_{\mathcal{T}} = \sum_{i=1, N_{\mathcal{T}}} u_i \phi_i + \gamma \psi.$$

Le problème discrétisé revient donc à chercher

$$\begin{cases} (u_s)_{i=1, N_{\mathcal{T}}} \subset \mathbb{R}^N \text{ et } \gamma \in \mathbb{R} \text{ t.q.} \\ \sum_{j=1, N_{\mathcal{T}}} u_j \int_{\Omega} \nabla \phi_j(x) \cdot \nabla \phi_i(x) dx + \gamma \int_{\Omega} \nabla \psi(x) \cdot \nabla \phi_i(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \phi_i(x) dx, \forall i = 1, N_{\mathcal{T}} \\ \sum_{j=1, N_{\mathcal{T}}} u_j \int_{\Omega} \nabla \phi_j(x) \cdot \nabla \psi(x) dx + \gamma \int_{\Omega} \nabla \psi(x) \cdot \nabla \psi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx. \end{cases}$$

On obtient donc un système linéaire de  $N_{\mathcal{T}} + 1$  équations à  $N_{\mathcal{T}} + 1$  inconnues.

## 4.6 Exercices

**Exercice 48 (Eléments finis P1 pour le problème de Dirichlet)** *Corrigé en page 165*

Soit  $f \in L^2(]0, 1[)$ . On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in ]0, 1[, \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned}$$