La théorie des EDPs :Partie II

Pr. M. Rhoudaf

Master M2I

ENSAM Meknès

31 octobre 2018

Notations et définitions

Dans tout ce chapitre, on note par X un espace de Banach réel reflexif et par X' son dual topologique.

Pour tout $u \in X$ et tout $f \in X'$, la notation $f(u)$ désigne le produit de dualité $\langle f, u \rangle$ entre X' et X. De plus, on suppose dans tout ce qui suit que T est opérateur défini de l'espace X tout entier vers son dual topologique X'.

Le symbole de convergence $\rightarrow$ désigne la convergence forte dans X (resp. X') et $\rightharpoonup$ désigne celui de la convergence faible dans X (resp. X').

Définition

On dit que T est continue en $u \in X$, si pour toute suite (u_n) d'éléments de X on a : $u_n \to u$ dans X implique que $T(u_n) \to T(u)$ dans X'.

Définition

On dit que T est demi-continu en $u \in X$, si pour toute suite (u_n) d'éléments de X on a : $u_n \to u$ dans X implique que $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ dans X'.

Définition

On dit que T est faiblement continu en $u \in X$, si pour toute suite (u_n) d'éléments de X on a : $u_n \rightharpoonup u$ dans X implique que $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ dans X'.

Définition

On dit que T est hémi-continu sur X, si pour tout $u, v \in X$ et toute suite de

Définition

On dit que T est continue en $u \in X$, si pour toute suite (u_n) d'éléments de X on a : $u_n \to u$ dans X implique que $T(u_n) \to T(u)$ dans X'.

Définition

On dit que T est demi-continu en $u \in X$, si pour toute suite (u_n) d'éléments de X on a : $u_n \to u$ dans X implique que $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ dans X'.

Définition

On dit que T est faiblement continu en $u \in X$, si pour toute suite (u_n) d'éléments de X on a : $u_n \rightharpoonup u$ dans X implique que $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ dans X'.

Définition

On dit que T est hémi-continu sur X, si pour tout $u, v \in X$ et toute suite de

Définition

On dit que T est continue en $u \in X$, si pour toute suite (u_n) d'éléments de X on a : $u_n \to u$ dans X implique que $T(u_n) \to T(u)$ dans X'.

Définition

On dit que T est demi-continu en $u \in X$, si pour toute suite (u_n) d'éléments de X on a : $u_n \to u$ dans X implique que $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ dans X'.

Définition

On dit que T est faiblement continu en $u \in X$, si pour toute suite (u_n) d'éléments de X on a : $u_n \rightharpoonup u$ dans X implique que $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ dans X'.

Définition

On dit que T est hémi-continu sur X, si pour tout $u, v \in X$ et toute suite de

Définition

On dit que T est continue en $u \in X$, si pour toute suite (u_n) d'éléments de X on a : $u_n \to u$ dans X implique que $T(u_n) \to T(u)$ dans X'.

Définition

On dit que T est demi-continu en $u \in X$, si pour toute suite (u_n) d'éléments de X on a : $u_n \to u$ dans X implique que $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ dans X'.

Définition

On dit que T est faiblement continu en $u \in X$, si pour toute suite (u_n) d'éléments de X on a : $u_n \rightharpoonup u$ dans X implique que $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ dans X'.

Définition

On dit que T est hémi-continu sur X, si pour tout $u, v \in X$ et toute suite de

Définition

On dit que T est :

1. *Monotone, si pour tout $u, v \in X$ on a $\langle T(u) - T(v), u - v \rangle \geq 0$.*
2. *Strictement monotone, si pour tout $u \neq v \in X$ on a $\langle T(u) - T(v), u - v \rangle > 0$.*

Ces deux classes sont notées respectivement (MON) et $(MON)_s$

Définition

On dit que T est fortement monotone s'il existe une fonction continue, strictement monotone $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ avec $g(0) = 0$ telle que : $\langle T(u) - T(v), u - v \rangle \geq g(\|u - v\|)\|u - v\|$ pour tout $u, v \in X$.

Cette classe est notée par $(MON)_f$

Définition

On dit que T est :

1. *Monotone, si pour tout $u, v \in X$ on a $\langle T(u) - T(v), u - v \rangle \geq 0$.*
2. *Strictement monotone, si pour tout $u \neq v \in X$ on a*

   $\langle T(u) - T(v), u - v \rangle > 0$.

Ces deux classes sont notées respectivement (MON) et $(MON)_s$

Définition

On dit que T est fortement monotone s'il existe une fonction continue, strictement monotone $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ avec $g(0) = 0$ telle que :

$\langle T(u) - T(v), u - v \rangle \geq g(\|u - v\|)\|u - v\|$ *pour tout $u, v \in X$.*

Cette classe est notée par $(MON)_f$

Définition

On dit que T est borné s'il transforme tout borné de X en un borné de X', autrement dit : si $\|u\|_X \leq C_1$, alors il existe $C_2 > 0$ telle que $\|T(u)\|_{X'} \leq C_2$.

Cette classe est notée par (B).

Définition

On dit que T est quasi-borné si : $\|u\|_X \leq C_1$ et $|\langle Tu, u\rangle| \leq C_2$, alors il existe $C_3 > 0$ telle que $\|T(u)\|_{X'} \leq C_3$.

Cette classe est notée par (QB).

Définition

On dit que T est localement borné si pour tout $u \in X$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de u tel que $T(\mathcal{U})$ est un borné de X'.

Définition

On dit que T est borné s'il transforme tout borné de X en un borné de X', autrement dit : si $\|u\|_X \leq C_1$, alors il existe $C_2 > 0$ telle que $\|T(u)\|_{X'} \leq C_2$.

Cette classe est notée par (B).

Définition

On dit que T est quasi-borné si : $\|u\|_X \leq C_1$ et $|\langle Tu, u\rangle| \leq C_2$, alors il existe $C_3 > 0$ telle que $\|T(u)\|_{X'} \leq C_3$.

Cette classe est notée par (QB).

Définition

On dit que T est localement borné si pour tout $u \in X$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de u tel que $T(\mathcal{U})$ est un borné de X'.

Définition

On dit que T est borné s'il transforme tout borné de X en un borné de X', autrement dit : si $\|u\|_X \leq C_1$, alors il existe $C_2 > 0$ telle que $\|T(u)\|_{X'} \leq C_2$.

Cette classe est notée par (B).

Définition

On dit que T est quasi-borné si : $\|u\|_X \leq C_1$ et $|\langle Tu, u\rangle| \leq C_2$, alors il existe $C_3 > 0$ telle que $\|T(u)\|_{X'} \leq C_3$.

Cette classe est notée par (QB).

Définition

On dit que T est localement borné si pour tout $u \in X$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de u tel que $T(\mathcal{U})$ est un borné de X'.

Définition

On dit que T est compact si pour tout borné A de X, $T(A)$ est relativement compact dans X'.

On note par $(COMP)$ la classe des opérateurs compacts et par $(LCOMP)$ celle des opérateurs linéaires compacts.

Définition

On dit que T est compact si pour tout borné A de X, $T(A)$ est relativement compact dans X'.

On note par $(COMP)$ la classe des opérateurs compacts et par $(LCOMP)$ celle des opérateurs linéaires compacts.

Définition

On dit que T est quasi-monotone si pour toute suite (u_n) dans X on a :

$u_n \rightharpoonup u$ *dans* X *implique que* $\limsup\langle T(u_n) - T(u), u_n - u\rangle \geq 0.$

Cette classe est notée par (QM).

Remarque

(autre définition)

La quasimonotonie peut encore s'écrire sous la forme :

$T \in (QM)$ *si* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* X *implique* $\limsup\langle T(u_n), u_n - u\rangle \geq 0.$

Et donc, $T \in (QM)$ *si et seulement si* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* X *et*

$\limsup\langle T(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$ *impliquent que* $\lim\langle T(u_n), u_n - u\rangle = 0.$

Définition

On dit que T est quasi-monotone si pour toute suite (u_n) dans X on a :

$u_n \rightharpoonup u$ dans X implique que $\limsup \langle T(u_n) - T(u), u_n - u \rangle \geq 0$.

Cette classe est notée par (QM).

Remarque

(autre définition)

La quasimonotonie peut encore s'écrire sous la forme :

$T \in (QM)$ si $u_n \rightharpoonup u$ dans X implique $\limsup \langle T(u_n), u_n - u \rangle \geq 0$.

Et donc, $T \in (QM)$ si et seulement si $u_n \rightharpoonup u$ dans X et

$\limsup \langle T(u_n), u_n - u \rangle \leq 0$ impliquent que $\lim \langle T(u_n), u_n - u \rangle = 0$.

Définition

On dit que T est pseudo-monotone si pour toute suite (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X et $\limsup \langle T(u_n), u_n - u \rangle \leq 0$, on a : $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ dans X' et $\langle T(u_n), u_n \rangle \to \langle T(u), u \rangle$.

Cette classe est notée par (PM).

Proposition

(PM par Brézis)

$T \in (PM)$ si et seulement si pour toute suite (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X et $\limsup \langle T(u_n), u_n - u \rangle \leq 0$, on a

liminf $\langle T(u_n), u_n - v \rangle \geq \langle T(u), u - v \rangle$ pour tout $v \in X$.

On note par $(PM)_B$ la classe des opérateurs qui vérifient l'assertion du côté

Définition

On dit que T est pseudo-monotone si pour toute suite (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X et $\limsup \langle T(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$, on a : $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ dans X' et $\langle T(u_n), u_n\rangle \to \langle T(u), u\rangle$.

Cette classe est notée par (PM).

Proposition

(PM par Brézis)

$T \in (PM)$ si et seulement si pour toute suite (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X et $\limsup \langle T(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$, on a

liminf $\langle T(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle T(u), u - v\rangle$ pour tout $v \in X$.

On note par $(PM)_B$ la classe des opérateurs qui vérifient l'assertion du côté droit de la proposition.

<u>Démonstration</u>

Soit $(u_n) \in X$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ et $\limsup \langle T(u_n), u_n - u \rangle \leq 0$.

1) $\Rightarrow$].

La pseudo-monotonie de T implique que

$\liminf \langle T(u_n), u_n - v \rangle = \lim \langle T(u_n), u_n - v \rangle = \langle T(u), u - v \rangle$ pour tout $v \in X$.

Et donc $(PM) \subset (PM)_B$.

2)$\Leftarrow$].

Puisque $T \in (PM)_B$, alors $\liminf \langle T(u_n), u_n - v \rangle \geq \langle T(u), u - v \rangle$ pour tout $v \in X$ et pour $v = u$, on aura $\liminf \langle T(u_n), u_n - u \rangle \geq 0$, ce qui donne

$$lim \langle T(u_n), u_n - u \rangle = 0.$$

D'autre part, pour tout $v \in X$, on peut écrire

$\liminf \langle T(u_n), u - v \rangle = \liminf \left(\langle T(u_n), u_n - v \rangle + \langle T(u_n), u - u_n \rangle \right)$

$= \liminf \langle T(u_n), u_n - v \rangle \geq \langle T(u), u - v \rangle$

D'où en prenant $z = u - v$ pour tout $v \in X$ on aura

$\liminf \langle T(u_n), z \rangle \geq \langle T(u), z \rangle$ ce qui implique que $\lim \langle T(u_n), z \rangle \geq \langle T(u), z \rangle$

pour tout $z \in X$. Et donc

$$T(u_n) \rightharpoonup T(u) \quad dans \quad X'$$

De plus, on a $\lim \langle T(u_n), u_n \rangle = \lim \langle T(u_n), u_n - u \rangle + \lim \langle T(u_n), u \rangle = \langle T(u), u \rangle$

et par suite $(PM)_B \subset (PM)$. ■

Définition

On dit que T est de classe (S_+) si pour toute suite (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X et $\limsup\langle T(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$, on a : $T(u_n) \to T(u)$ dans X'.

Définition

On dit que T est de classe $(\mathcal{M})$ si pour toute suite (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X, $T(u_n) \rightharpoonup \chi$ dans X' et $\limsup\langle T(u_n), u_n\rangle \leq \langle \chi, u\rangle$, on a : $T(u) = \chi$.

Définition

On dit que T est de classe (S_+) si pour toute suite (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X et $\limsup\langle T(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$, on a : $T(u_n) \to T(u)$ dans X'.

Définition

On dit que T est de classe $(\mathcal{M})$ si pour toute suite (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X, $T(u_n) \rightharpoonup \chi$ dans X' et $\limsup\langle T(u_n), u_n\rangle \leq \langle \chi, u\rangle$, on a : $T(u) = \chi$.

Définition

On dit que T est de classe (S) si pour toute suite (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X et $\limsup\langle T(u_n), u_n - u\rangle = 0$, on a $u_n \to u$ dans X.

Définition

On dit que T est de classe (S_0) si pour toute suite (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X, $T(u_n) \rightharpoonup \chi$ dans X' et $\limsup\langle T(u_n), u_n\rangle = \langle \chi, u\rangle$, on a : $u_n \to u$ dans X.

Définition

On dit que T est de classe (S) si pour toute suite (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X et $\limsup \langle T(u_n), u_n - u\rangle = 0$, on a $u_n \to u$ dans X.

Définition

On dit que T est de classe (S_0) si pour toute suite (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X, $T(u_n) \rightharpoonup \chi$ dans X' et $\limsup \langle T(u_n), u_n\rangle = \langle \chi, u\rangle$, on a : $u_n \to u$ dans X.

Remarque

1. *Il est clair que $(PM) \subset (\mathcal{M})$.*
2. *La classe $(\mathcal{M})$ est utilisée lorsque l'existence d'une la solution est basée sur la méthode de Galerkin.*

Proposition

1. *Si $T \in (PM)$ et localement borné, alors T est demi-continu.*
2. *Si T est demi-continu, alors il est localement borné.*
3. *Si T est monotone, alors il est localement borné.*

Remarque

1. *Il est clair que* $(PM) \subset (\mathcal{M})$.
2. *La classe* $(\mathcal{M})$ *est utilisée lorsque l'existence d'une la solution est basée sur la méthode de Galerkin.*

Proposition

1. *Si* $T \in (PM)$ *et localement borné, alors* T *est demi-continu.*
2. *Si* T *est demi-continu, alors il est localement borné.*
3. *Si* T *est monotone, alors il est localement borné.*

Démonstration

La preuve de 1) et 2) à faire en exercice.

3) Supposons qu'il existe $u_0 \in X$ où T n'est pas localement borné. Considérons $\widehat{T}(u) = T(u + u_0)$. On peut supposer que $u_0 = 0$.

T n'est localement borné en $u_0 = 0$ implique qu'il existe une suite (x_n) dans X telle que : $x_n \to 0$ dans X, mais $\|T(x_n)\| \to \infty$. D'après la monotonie de T, on a $\langle T(x_n) - T(u), x_n - u\rangle \geq 0$ et $\langle T(x_n) - T(-u), x_n + u\rangle \geq 0$ pour tout $u \in X$.

Donc $\begin{cases} 0 \leq & \langle T(x_n), x_n\rangle - \langle T(x_n), u\rangle - \langle T(u), x_n - u\rangle \\ 0 \leq & \langle T(x_n), x_n\rangle + \langle T(x_n), u\rangle - \langle T(-u), x_n + u\rangle \end{cases}$

D'où, $\begin{cases} |\langle T(x_n), u\rangle| \leq & \|T(x_n)\|.\|x_n\| + \|T(u)\|.\|x_n - u\| \\ |\langle T(x_n), u\rangle| \leq & \|T(x_n)\|.\|x_n\| + \|T(-u)\|.\|x_n + u\| \end{cases}$.

Notons $w_n = \frac{T(x_n)}{1+\|T(x_n)\|.\|x_n\|}$. On observe que $\sup |\langle w_n, u\rangle| < \infty$ pour tout $u \in X$ (car $\|T(x_n)\| \to \infty$). Par vertu du théorème de Banach-Steinhaus, on déduit qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|w_n\| \leq M$ pour tout n.

Par suite, on a : $M\|x_n\| \leq \frac{1}{2}$ pour n assez grand (car $x_n \to 0$) et

$\|T(x_n)\| = \|w_n\| (1 + \|T(x_n)\|.\|x_n\|) \leq M (1 + \|T(x_n)\|.\|x_n\|)$

$\leq M + \frac{1}{2}\|T(x_n)\|$

ce qui est absurde puisque $\|T(x_n)\| \to \infty$. $\blacksquare$

Proposition

1. *Si T est faiblement continu, alors $T \in (\mathcal{M})$.*
2. *Si $T \in (MON)$ et T est hemicontinu, alors $T \in (PM)$.*

Démonstration

La preuve de 1) est à faire en exercice.

2) Soit (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X et $\limsup\langle T(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$.

Par monotonie de T, on peut écrire $0 \leq \limsup\langle T(u_n) - T(u), u_n - u\rangle \leq 0$,

donc $\lim\langle T(u_n), u_n - u\rangle = \lim\langle T(u), u_n - u\rangle = 0$.

Soient $v \in X$, $t \in]0, 1]$ et $w = (1-t)u + tv$. On $0 \leq \langle T(u_n) - T(w), u_n - w\rangle$

ce qui implique que,

Proposition

1. *Si T est faiblement continu, alors $T \in (\mathcal{M})$.*
2. *Si $T \in (MON)$ et T est hemicontinu, alors $T \in (PM)$.*

Démonstration

La preuve de 1) est à faire en exercice.

2) Soit (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X et $\limsup\langle T(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$.

Par monotonie de T, on peut écrire $0 \leq \limsup\langle T(u_n) - T(u), u_n - u\rangle \leq 0$,

donc $\lim\langle T(u_n), u_n - u\rangle = \lim\langle T(u), u_n - u\rangle = 0$.

Soient $v \in X$, $t \in]0, 1]$ et $w = (1-t)u + tv$. On $0 \leq \langle T(u_n) - T(w), u_n - w\rangle$

ce qui implique que,

$t\langle T(u_n), u-v\rangle \geq -\langle T(u_n), u_n-u\rangle + \langle T(w), u_n-u\rangle - t\langle T(w), v-u\rangle$.

Donc, $t \liminf \langle T(u_n), u-v\rangle \geq t\langle T(w), u-v\rangle$. Divisons par t et faisons tendre t vers 0^+, on obtient par hémicontinuité $\liminf \langle T(u_n), u-v\rangle \geq \langle T(u), u-v\rangle$.

D'où

$\liminf \langle T(u_n), u_n-v\rangle = \liminf \left(\langle T(u_n), u_n-u\rangle + \langle T(u_n), u-v\rangle\right) \geq$

$\langle T(u), u-v\rangle$ pour tout $v \in X$ qui est la pseudo-monotonie de T. ■

Définition

Soit X un espace de Banach reflexif et soit $A : X \to X'$ un opérateur.

A est dit du type du "Calcul des variations" s'il est borné et si on peut le représenter par :

$$(P_0) \qquad A(v) = A(v, v);$$

où $(u, v) \mapsto A(u, v)$ est un opérateur de $X \times X \to X'$ ayant les propriétés suivantes :

$$(P_1) \qquad \begin{cases} \forall u \in X, v \mapsto A(u, v) \text{ est hémicontinue bornée de } X \to X', \\ \langle A(u, u) - A(u, v), u - v \rangle \geq 0. \end{cases}$$

$$(P_2) \qquad \forall v \in X, u \mapsto A(u, v) \text{ est hémicontinue bornée de } X \to X'$$

$$(P_3) \qquad \begin{cases} Si \quad u_n \rightharpoonup u \quad dans \quad X et \quad si \quad \langle A(u_n, u_n) - A(u_n, u), u_n - u\rangle \to 0 \\ \quad alors, \quad \forall v \in X, A(u_n, v) \rightharpoonup A(u, v) \quad dans \quad X'. \end{cases}$$

$$(P_4) \qquad \begin{cases} Si \quad u_n \rightharpoonup u \quad dans \quad X et \quad si \quad A(u_n, v) \rightharpoonup \psi \quad dans \quad X', \\ \quad alors, \quad \langle A(u_n, v), u_n\rangle \to \langle \psi, u\rangle. \end{cases}$$

Proposition

Si A est un opérateur de type de calcul des variations, alors A est pseudo-monotone.

Démonstration

Soit (u_n) une suite d'éléments de X telle que :

$$(1.1.1) \qquad \begin{cases} u_n \rightharpoonup u \;\; dans \;\; X \\ \limsup \langle A(u_n), u_n - u \rangle \leq 0. \end{cases}$$

1). On va d'abord montrer qu'on peut extraire une sous-suite notée encore (u_n) telle que

$$(1.1.2) \qquad X_n = \langle A(u_n, u_n) - A(u_n, u), u_n - u \rangle \to 0.$$

En effet, on peut extraire une sous-suite notée encore (u_n) telle que $A(u_n, u) \rightharpoonup \chi$ dans X' (car $A(u_n, u)$ est bornée dans X') et alors d'après la propriété (P_4), on aura $\langle A(u_n, u), u_n \rangle \to \langle \chi, u \rangle$ et donc $\langle A(u_n, u), u_n - u \rangle \to 0$. Cela, joint à l'hypothèse (1.1.1) montre que $\limsup X_n \leq 0$ et comme d'après

2). On peut alors utiliser (P_3), donc

$$\langle A(u_n, v), u_n - u\rangle \to 0, \forall v \in X. \tag{1.1.3}$$

Comme $X_n \geq 0$, on a par combinaison avec (1.1.3),

$$\langle A(u_n), u_n - u\rangle \geq \langle A(u_n, u), u_n - u\rangle \to 0$$

ce qui joint à (1.1.1) donne

$$\langle A(u_n), u_n - u\rangle \to 0. \tag{1.1.4}$$

3). On utilise maintenant le fait que

$$\langle A(u_n) - A(u_n, w), u_n - w\rangle \geq 0, \forall w \in X,$$

avec $w = (1-\theta)u + \theta v$, $\theta \in 0, 1[$, il vient

$$\theta\langle A(u_n), u - v\rangle \geq -\langle A(u_n), u_n - u\rangle + \langle A(u_n, w), u_n - u\rangle + \theta\langle A(u_n, w), u - v\rangle$$

et en utilisant (1.1.4), (1.1.3) et (1.1.2) on en déduit

$$\theta \liminf\langle A(u_n), u - v\rangle \geq \theta \liminf\langle A(u_n, w), u - v\rangle = \theta\langle A(u, w), u - v\rangle$$

et donc divisant par θ et utilisant (1.1.4),

$$\liminf\langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(u, (1-\theta)u + \theta v), u - v\rangle$$

et faisant $\theta \to O$, on en déduit que $A \in (PM)$. ■

Remarque

Dans tout ce qui suit on suppose que les opérateurs en question sont demi-continus.

Définition

On dit qu'une classe d'opérateurs (C) vérifie la structure du cône si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $T_1 + T_2 \in (C)$ *pour tout* $T_1, T_2 \in (C)$.
2. $\alpha T \in (C)$ *pour tout* $T \in (C)$ *et tout* $\alpha > 0$.

Proposition

Les classes $(PM), (QM), (S_+)$ et $(\mathcal{M})$ vérifient la structure du cône.

Démonstration

On démontre la propriété pour la classe (PM) et le même argument s'applique pour les autres classes.

Soient $T_1, T_2 \in (PM)$ et $\alpha > 0$.

Soit (u_n) dans X telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X et $\limsup\langle T(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$ où $T = T_1 + T_2$.

D'abord, on montre que $\limsup\langle T_i(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$ pour $i = 1, 2$. En effet, supposons par exemple que $\limsup\langle T_1(u_n), u_n - u\rangle = d > 0$. Prenons une sous-suite notée encore (u_n) telle que $\lim\langle T_1(u_n), u_n - u\rangle = d$. Donc, pour cette sous-suite, on aura $\limsup\langle T_2(u_n), u_n - u\rangle \leq -d < 0$. Comme $T_2 \in (PM)$, on obtient $T_2(u_n) \rightharpoonup T_2(u)$ et $\langle T_2(u_n), u_n\rangle \to \langle T_2(u), u\rangle$. D'où $\lim\langle T_2(u_n), u_n - u\rangle = 0$ ce qui est absurde.

D'autre part, la pseudo-monotonie de T donne $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ et $\langle Tu_n), u_n\rangle \to \langle T(u), u\rangle$, ce qui implique que $\alpha T(u_n) \rightharpoonup \alpha T(u)$ et $\langle \alpha T(u_n), u_n\rangle \to \langle \alpha T(u), u\rangle$.■

Proposition

la classe $(\mathcal{M})$ ne vérifie pas la structure du cône.

Démonstration

On montre qu'il existe deux opérateurs T_1 et T_2 dans la classe $(\mathcal{M})$, mais $T_1 + T_2$ n'est pas dans $(\mathcal{M})$. En effet, soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel muni d'une base orthonormée (e_n). et soit I l'identité de $\mathcal{H}$ et soit T un opérateur défini sur $\mathcal{H}$ par : $T(u) = \frac{u}{1+\|u\|}$.

Il est facile de vérifier que T et $-I$ sont dans la classe $(\mathcal{M})$.

D'autre part, on affirme que $S = T - I$ n'est pas un élément de $(\mathcal{M})$. En effet, soit $u_n = e_1 + e_n \rightharpoonup e_1 = u$.

On a $S(u_n) = \frac{u_n}{1+\|u_n\|} + (-u_n) = \frac{e_1+e_n}{1+\|e_1+e_n\|} - (e_1 + e_n) = \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} - 1\right)(e_1 + e_n) \rightharpoonup \left(\frac{-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right) e_1 = \chi$.

Et $\limsup\langle S(u_n), u_n\rangle = \langle \frac{-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}(e_1 + e_n), e_1 + e_n\rangle = \frac{-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\|e_1 + e_n\|^2 = \frac{-2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} < \frac{-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \langle\chi, u\rangle$.

Mais, $S(u) = \frac{e_1}{1+\|e_1\|} = \frac{e_1}{2} \neq \chi = \left(\frac{-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right) e_1$. Donc, S n'est pas dans la classe $(\mathcal{M})$.■

Proposition

$(MON)_f \subset (S_+) \subset (PM) \subset (QM)$.

Démonstration

- Il est facile de voir que $(MON)_f \subset (S_+)$.
- Montrons que $(S_+) \subset (PM)$. Soient $T \in (S_+)$ et $(u_n) \in X$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X et $\limsup \langle T(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$ dans X'.
  Comme $T \in (S_+)$, on a $u_n \to u$ et par la demi-continuité on aura $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ et donc $\langle T(u_n), u_n\rangle \to \langle T(u), u\rangle$, par suite $T \in (PM)$.

- Montrons que $(PM) \subset (QM)$. En effet, soit $(u_n) \in X$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X. Prouvons que $\limsup \langle T(u_n), u_n - u \rangle \geq 0$. Sinon, on aura $\limsup \langle T(u_n), u_n - u \rangle < 0$ et par pseudo-monotonie de T, on peut écrire $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ et $\langle T(u_n), u_n \rangle \to \langle T(u), u \rangle$, ce qui implique que $\lim \langle T(u_n), u_n - u \rangle = 0$ ce qui est absurde. Donc $T \in (QM)$. $\blacksquare$

On peut résumé la classification des classes d'opérateurs monotones dans la proposition suivante :

Proposition

1. $(MON)_f \subset (S_+) \subset (PM) \subset (QM)$
2. $(LCOMP) \subset (COMP) \subset (QM)$
3. $(MON) \subset (PM) \subset (\mathcal{M})$

Démonstration (en exercice)

Proposition

1. $(S_+) + (QM) = (S_+)$
2. *Si* T *est demi-continu et* $(T + S) \in (S_+)$ *pour tout* $S \in (S_+)$, *alors* $T \in (QM)$.

Remarque

Puisque $(COMP) \subset (QM)$, *alors* $(S_+) + (COMP) = (S_+)$.

Dans cette section, on rappelle les principaux théorèmes d'existences (pour les démonstrations de ces théorèmes voir le livre de J.L. Lions [5].

Théorème

Soit X un espace de Banach réflexif et soit $A : X \to X'$ un opérateur ayant les propriétés suivantes :

(P_1) *A est borné hémicontinu,*

(P_2) *A est monotone,*

(P_3) *A est coercive, i.e., $\frac{\langle A(v), v\rangle}{\|v\|} \to \infty$ si $\|v\| \to \infty$.*

Alors A est surjectif de $X \to X'$, i.e. pour tout $f \in X'$, il existe $u \in X$ tel que

$$(PV) \qquad A(u) = f.$$

Remarque

Il faut noter que les propriétés (P_1) et (P_2) (i.e. A borné hémicontinu et monotone) impliquent que :

1. *A est pseudo-monotone.*
2. *A est continu de $(X,$ fort$)$ vers $(X',$ faible$)$.*
3. *Si A est strictement monotone, alors le problème (PV) admet une solution unique*

Voici dans le sens de l'unicité de la solution un résultat plus raffiné.

Théorème

(unicité de la solution)

On se place dans les hypothèses du théorème précédent et on suppose en outre que :

(P_4) *la norme* $\|\|_X$ *est strictement convexe,*

(P_5) $A(u) = A(v) \Rightarrow \|u| = \|v\|.$

Alors le problème (PV) *admet une solution unique.*

Théorème

Soit X un espace de Banach réflexif et soit $A : X \to X'$ un opérateur ayant les propriétés suivantes :

(P_6) *A est pseudo-monotone,*

(P_3) *A est coercive, i.e., $\frac{\langle A(v),v\rangle}{\|v\|} \to \infty$ si $\|v\| \to \infty$.*

Alors A est surjectif de $X \to X'$, i.e. pour tout $f \in X'$, il existe $u \in X$ tel que

$$(PV) \qquad A(u) = f.$$

Théorème

Soit X un espace de Banach réflexif et soit A un opérateur de $X \to X'$.

Si A est de type de calcul des variations, alors A est surjectif de $X \to X'$, i.e.

pour tout $f \in X'$, il existe $u \in X$ tel que

$$(PV) \qquad\qquad A(u) = f.$$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ (avec $N \geq 2$) et Γ sa frontière.

On considère le problème elliptique non linéaire de type Dirichlet suivant :

$$(P_1) \quad \begin{cases} A(u) = f & dans \quad \Omega \\ u \equiv 0 & sur \quad \Gamma, \end{cases}$$

avec

$$(2.1.1) \quad A(u) = -div\big(a(x,u,\nabla u)\big) = -\sum_{i=1}^{N} D_i\big(a_i(x,u,\nabla u)\big),$$

où $a = (a_i)_{1 \leq i \leq N}$ est une famille de fonctions définies sur $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Le but de cette première section est de montrer que le problème de type Dirichlet (P_1) admet au moins une solution dans le cas variationnel (c-à-d, lorsque le deuxième membre f est dans un espace dual).

Hypothèses

(H_1) **Conditions de Croissances** :

Chaque $a_i(x, \eta, \zeta)$ est une fonction de Carathéodory, i.e., mesurable en x pour tout (η, ζ) fixé dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et continue en (η, ζ) pour tout x fixé dans Ω.

Pour un certain $p > 1$ il existe une constante $C_1 > 0$ et une fonction $k \in L^{p'}(\Omega)$ telles que,

$$|a_i(x, \eta, \zeta)| \leq C_1 \big(k(x) + |\eta|^{\frac{q}{p'}} + |\zeta|^{p-1} \big),$$

pour p.p. $x \in \Omega$, tout $(\eta, \zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, tout $i = 1, 2, ..., N$ et où

$$\begin{cases} 1 \leq q < \frac{Np}{N-p} & si \quad p < N \\ 1 \leq q < \infty & si \quad p = N \end{cases}$$

ou, respectivement,

$$|a_i(x,\eta,\zeta)| \leq h(|\eta|)\big(k(x) + |\zeta|^{p-1}\big),$$

où $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue, si $p > N$.

$(H_2)_L$ **Condition de monotonie large** : Pour p.p. $x \in \Omega$ et tout $(\eta,\zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ on suppose que,

$$\sum_{i=1}^{N} \big(a_i(x,\eta,\zeta) - a_i(x,\eta,\zeta^*)\big)\big(\zeta_i - \zeta_i^*\big) \geq 0.$$

(H_3) **Condition d'ellipticité** : Il existe une constante $C_0 > 0$ et une fonction $k_0 \in L^1(\Omega)$ tel que,

$$\sum_{i=1}^{N} (a_i(x,\eta,\zeta)\zeta_i \geq C_0|\zeta|^p - k_0(x),$$

On peut associer à l'opérateur A la forme semi-linéaire de Dirichlet définie par,

$$b(u,v)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}a_i(x,u,\nabla u)D_iv(x)dx, \forall u,v\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.1.2}$$

Proposition

Si l'hypothèse (H_1) est satisfaite, alors la forme semi-linéaire $b(.,.)$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration

Par vertue de l'inégalité du Holder, on peut écrire

$$|b(u,v)| \leq \sum_{i=1}^{N} \|a_i(x,u,\nabla u)\|_{p'} \|D_i v(x)\|_p,$$

avec

$$|a_i(x,u,\nabla u)|^{p'} \leq C\left(|k(x)|^{p'} + |u(x)|^q + |\nabla u(x)|^p\right), \quad si \quad p \leq N$$

ou

$$|a_i(x,u,\nabla u)|^{p'} \leq Ch(|u(x)|)^{p'}\left(|k(x)|^{p'} + |\nabla u(x)|^p\right), \quad si \quad p > N.$$

Utilisons les injections de Sobolev, on obtient

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\|u\|_{1,p} \quad si \quad p \leq N$$

et

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leq C\|u\|_{1,p} \ \ si \ \ p > N.$$

Par conséquent, $\|a_i(x, u, \nabla u)\|_{p'}$ est borné une fois que $\|u\|_{1,p}$ est bornée. ■

Donc, l'opérateur A induit une fonctionnelle T bornée et définie de $W_0^{1,p}(\Omega)$ vers son dual $W^{-1,p'}(\Omega)$ par :

$$\langle T(u), v\rangle = b(u, v), \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.1.3}$$

Proposition

Si l'hypothèse (H_1) est satisfaite, alors la fonctionnelle T est continue.

Démonstration (en exercice)

On va montrer que le problème de Dirichlet (P_1) admet au moins une solution faible au sens suivant :

Définition

On dit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *est une solution faible du problème de Dirichlet* (P_1) *si on a :*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u, \nabla u) D_i v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Théorème

(J.P. Goseez-V. Mustonen 1992)

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$*. Supposons que les hypothèses* $(H_1), (H_2)_L$ *et* (H_3) *sont satisfaites. Alors pour tout* $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$*, le problème* (P_1) *admet au moins une solution faible* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*.*

Démonstration

On montre le résultat pour $p \leq N$ et la même démarche s'applique pour $p > N$ en utilisant l'injection de Sobolev correspondante.

Soit T la fonctionnelle associée à l'opérateur A définie par la formule (2.3), i.e.,

$$(2.1.4) \qquad \langle T(u), v\rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} a_i(x, u, \nabla u) D_i v(x) dx, \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Etape I : On montre que la fonctionnelle T associée à A est pseudo-monotone.

En effet, Soit (u_n) une suite d'éléments de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} (2.1.5) \qquad u_n \rightharpoonup u \quad dans \quad W_0^{1,p}(\Omega) \\ (2.1.6) \qquad \limsup \langle T(u_n), u_n - u\rangle \leq 0. \end{cases}$$

Assertion 1 : On affirme que $Tu_n) \rightharpoonup T(u)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$.

D'après l'hypothèse (2.5) et l'injection compacte $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, on a

$$\begin{cases} (2.1.7) \quad D_i(u_n) \rightharpoonup D_i(u) \quad dans \quad L^p(\Omega) \quad \forall i \in \{0, ..., N\} \\ (2.1.8) \quad u_n \to u \qquad\qquad dans \quad L^q(\Omega) \\ (2.1.9) \quad u_n(x) \to u(x) \qquad p.p.dans \quad \Omega. \end{cases}$$

On note que les deux dernières convergences sont pour une sous-suite de (u_n) notée encore (u_n).

Puisque T est bornée, alors on peut écrire pour une sous-suite notée encore (u_n),

$$\begin{cases} (2.1.10) \quad T(u_n) \rightharpoonup g \quad \textit{dans} \quad W^{-1,p'}(\Omega) \\ (2.1.11) \quad a_i(., u_n, \nabla u_n) \rightharpoonup g_i \quad \textit{dans} \quad L^{p'}(\Omega), \forall i \in \{1, ..., N\}, \end{cases}$$

où l'action de g est donné par :

$$\langle g, v \rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega g_i(x) D_i v(x) dx, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

De plus, par vertu de (2.1.6) et (2.1.10) on obtient,

$$(2.1.12) \qquad \limsup \langle T(u_n), u_n \rangle \leq \langle g, u \rangle.$$

Or la condition de monotonie large $(H_2)_L$ permet d'écrire,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left(a_i(x, u_n, \nabla v) - a_i(x, u_n, \nabla u_n)\right)\left(D_i v - D_i u_n\right) dx \geq 0,$$

pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Donc

$$(2.1.13) \quad \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u_n, \nabla u_n) D_i u_n(x) dx \geq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u_n, \nabla u_n) D_i v(x) dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u_n, \nabla v) D_i u_n dx - \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u_n, \nabla v) D_i v(x) dx.$$

Ainsi, par application de (2.1.8), (2.1.11) et (2.1.12) on aura

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} g_i(x)D_iu(x)dx \geq \limsup \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,u_n,\nabla u_n)D_iu_n(x)dx \geq$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} g_i(x)D_iv(x)dx+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,u,\nabla v)D_iu(x)dx-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,u,\nabla v)D_iv(x)dx.$$

Par conséquent, on aura

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\big(a_i(x,u,\nabla v)-g_i\big)\big(D_iv(x)-D_iu(x)\big)dx \geq 0, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Prenons $v = u + tw$ avec $t > 0$ et $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on aura

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \big(a_i(x, u, \nabla u + t\nabla w) - g_i\big) D_i w(x) dx \geq 0, \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Faisons tendre t vers O^+, on conclut que pour tout $i \in \{1, ..., N\}$ on a

$$a_i(x, u(x), \nabla u(x)) = g_i(x) \quad p.p. \quad dans \quad \Omega.$$

Donc, $T(u) = g$ et alors l'assertion $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ est prouvée.

<u>**Assertion 2**</u> : On affirme que $\langle T(u_n), u_n\rangle \to \langle T(u), u\rangle$.

Puisque on a déjà montré que $\limsup\langle T(u_n), u_n\rangle \leq \langle g, u\rangle = \langle T(u), u\rangle$, il suffit de montrer que,

$$\liminf\langle T(u_n), u_n\rangle \geq \langle T(u), u\rangle.$$

En effet, en prenant $v = u$ dans l'inégalité (2.1.13) on obtient d'après ce qui précède,

$$\liminf\langle T(u_n), u_n\rangle = \liminf \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u_n, \nabla u_n) D_i u_n(x) dx \geq$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} g_i(x)D_i u(x)dx+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,u,\nabla u)D_i u(x)dx-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} a_i(x,u,\nabla u)D_i u(x)dx$$

$$= \langle T(u), u\rangle$$

et donc l'assertion 2 est prouvée.

Etape II : On montre que la fonctionnelle T est coercive.

En effet, par vertue de la condition d'ellipticité (H_3) et de l'inégalité du Poincaré on peut écrire,

$$\langle T(u), u\rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x, u, \nabla u) D_i u(x) dx \geq$$

$$C_0 \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega k(x) dx \geq C_1 \|u\|_{1,p} - C_2,$$

ce qui donne directement la coercivité de la fonctionnelle T. Et par application des théorèmes d'existence on déduit que le problème (P_1) admet au moins une solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Remarque

Il faut noter que dans la démonstration de la pseudo-monotonie de T, on a utilisé uniquement les hypothèses (H_1) et $(H_2)_L$ et non pas (H_3).

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ (avec $N \geq 2$) et Γ sa frontière.

On considère le problème elliptique non linéaire de type Dirichlet suivant :

$$(P_2) \quad \begin{cases} A(u) = f \quad dans \quad \Omega \\ u \equiv 0 \quad \quad sur \quad \Gamma, \end{cases}$$

avec

$$(2.2.1) \quad A(u) = -div\big(a(x, u, \nabla u)\big) + a_0(x, u, \nabla u),$$

où $\{a = (a_i)_{1 \leq i \leq N}, a_0\}$ est une famille de fonctions définies sur $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Dans ce qui suit on suppose les hypothèses suivantes :

(H_1) **Conditions de croissances** : Les fonctions $a_i, 0 \leq i \leq N$ sont supposées de Carathéodory et il existe des constantes $C, C_0 > 0$ et des fonctions $g, g_0 \in L^{p'}(\Omega)$ (où p' est le conjugué d'un certain $p \in]1, \infty[$) telles que :

$$(2.2.2) \qquad \begin{cases} |a(x,\eta,\xi)| \leq C\left[g(x) + |\eta|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right] & i = 1, \dots, N \\ |a_0(x,\eta,\xi)| \leq C_0\left[g_0(x) + |\eta|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right], & \end{cases}$$

pour presque partout $x \in \Omega$, tout $\eta \in \mathbb{R}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(H_2) **Condition de monotonie stricte** : Pour presque partout $x \in \Omega$, tout $\eta \in \mathbb{R}$ et tout $\xi \neq \xi' \in \mathbb{R}^N$, on a :

$$\left(a(x,\zeta,\xi) - a(x,\zeta,\xi')\right)\left(\xi - \xi'\right) > 0.$$

(H_3) **Condition d'ellipticité** : Il existe une constante $\alpha > 0$ et une fonction $\theta \in L^1(\Omega)$ telles que :

$$a(x, \eta, \xi).\xi \geq \alpha|\xi|^p - \theta(x),$$

pour presque partout $x \in \Omega$ et tout $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{N+1}$.

(H_4) **Donnée variationnelle** : On suppose que la donnée f est dans $W^{-1,p'}(\Omega)$.

On associe à l'opérateur A, la fonctionnelle T définie de $W_0^{1,p}(\Omega)$ vers son dual $W^{-1,p'}(\Omega)$ par :

$$\langle T(u), v\rangle = \int_\Omega a_0(x, u, \nabla u)v(x)dx + \int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla v dx \qquad (2.2.3)$$

Définition

Une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *est dite solution faible du problème* (P_2) *si et seulement si pour tout* $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *on a :*

$$\langle T(u), v\rangle = \langle f, v\rangle.$$

Proposition

Suppose que (H_1) *est satisfaite. Alors la fonctionnelle* T *est bornée de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *vers son dual* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Démonstration (en exercice).

Le but de ce paragraphe est de montrer que le problème (P_2) admet une solution faible au sens de la définition précédente.

Théorème

Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_4)$ sont satisfaites. Alors le problème (P_2) admet au moins une solution faible u dans l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration

Soit (u_n) une suite d'éléments de $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que :

$$(2.2.4) \qquad \begin{cases} u_n \rightharpoonup u \quad \textit{dans} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \\ \limsup \langle T(u_n), U_n - u \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Assertion 1 : $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ p.p. dans Ω.

D'après les conditions de croissances (H_1), il est facile de monter que :

$$\left\{\begin{array}{c} a_0(x,u_n,\nabla u_n) \quad est \quad \text{bornée} \quad dans \quad L^{p'}(\Omega) \\ a_i(x,u_n,\nabla u_n) \quad est \quad \text{bornée} \quad dans \quad L^{p'}(\Omega) \quad pour \quad tout \quad i=1,...,N. \end{array}\right.$$

Donc pour une sous-suite on peut écrire :

$$(2.2.5) \qquad \left\{\begin{array}{c} a_0(x,u_n,\nabla u_n) \rightharpoonup h_0 \quad dans \quad L^{p'}(\Omega) \\ a_i(x,u_n,\nabla u_n) \rightharpoonup h_i \quad dans \quad L^{p'}(\Omega) \quad pour \quad tout \quad i=1,...,N. \end{array}\right.$$

Posons $h = (h_i)_{0 \leq i \leq N}$, on aura :

$$(2.2.6) \qquad \langle h, v \rangle = \int_\Omega h_0(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega h_i(x)D_i v(x)dx, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

D'autre part, l'injection compacte $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ donne :

$$(2.2.7) \qquad u_n \to u \quad dans \quad L^p(\Omega).$$

D'où, on déduit par (H_1) que :

$$(2.2.8) \qquad \begin{cases} u_n(x) \to u(x) \quad p.p. \quad dans \quad \Omega \\ a_i(x, u_n, \nabla u) \to a_i(x, u, \nabla u) \quad dans \quad L^{p'}(\Omega) \quad pour \quad tout \quad i = 1, ..., N \end{cases}$$

Ainsi, par vertu de (2.2.7) et (2.2.4) on obtient :

$$(2.2.9) \qquad \limsup \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} a_i(x, u_n, \nabla u_n)(D_i u_n(x) - D_i u(x))dx \leq 0.$$

Et puisque par (2.2.4), on a

$$(2.2.10) \qquad D_i u_n \rightharpoonup D_i u \quad dans \quad L^p(\Omega) \quad pour \quad tout \quad i = 1, ..., N,$$

alors (2.2.8) permet d'écrire,

$$(2.2.11) \qquad \lim \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} a_i(x, u_n, \nabla u)(D_i u_n(x) - D_i u(x))dx = 0.$$

Par conséquent, (2.2.9) et (2.2.11) impliquent que,

$$\limsup \int_\Omega g_n(x)dx \leq 0,$$

où on a posé

$$g_n(x) = \left(a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u_n, \nabla u)\right)\left(\nabla u_n(x) - \nabla u(x)\right).$$

Ce qui donne par combinaison avec la condition de monotonie stricte (H_2) :

$$(2.2.12) \qquad \lim \int_\Omega g_n(x)dx = 0.$$

Les fonctions g_n étant positives, g_n tend vers 0 en norme $L^1(\Omega)$; ainsi quitte à extraire une sous-suite, on aura :

$$g_n(x) \to 0 \quad p.p. \quad dans \quad \Omega.$$

Donc il existe une partie B de Ω de mesure nulle tq pour tout $x \in \Omega - B$

$$|u(x)| < +\infty, \quad |\nabla u(x)| < +\infty, \quad |g(x)| < +\infty$$

et $M_x > 0$ tq $|u_n(x)| < +\infty$ car

$$u_n(x) \to u(x) \quad p.p. \quad dans \quad \Omega$$

On écrit en suite g_n sous la forme,

$$g_n(x) = a(x, u_n(x), \nabla u_n(x)).\nabla u_n(x) - a(x, u_n(x), \nabla u_n(x)).\nabla u(x) - a(x, u_n(x), \nabla u(x)).($$

On applique la coercivité (H_3) et deux fois la condition de croissance (H_1), on obtient :

$$\alpha|\nabla u_n(x)|^p - \theta(x) \leq g_n(x) + C\left[|g(x)| + |u_n(x)|^{p-1} + |\nabla u_n(x)|^{p-1}\right]|\nabla u(x)| +$$

$$C\left[|g(x)| + |u_n(x)|^{p-1} + |\nabla u(x)|^{p-1}\right]\left[|\nabla u(x)| + |\nabla u_n(x)|\right]$$

$$\leq C' + C'|\nabla u_n(x)|^{p-1} + C'|\nabla u_n(x)|,$$

où C' est une constante qui dépend de x, mais non pas de n.

Par un raisonnement par absurde, on montre que pour presque tout $x \in \Omega$, la suite $(\nabla u_n(x))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$. On peut donc en extraire une sous-suite notée encore $(\nabla u_n(x))_n$ telle que,

$$\nabla u_n(x) \to \xi \quad p.p. \quad dans \quad \Omega.$$

En passant alors à la limite dans la sous-suite $g_n(x)$, on obtient :

$$(a((x, u(x), \xi) - a((x, u(x), \nabla u(x)))\,.\,(\xi - \nabla u(x)) = 0$$

et la stricte monotonie nous assure alors que $\xi = \nabla u(x)$. Donc un par raisonnement standard, on conclut que pour toute la suite $(u_n)_n$ on a :

$$(2.2.13) \qquad \nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \quad p.p. \quad dans \quad \Omega.$$

Assertion 2 : $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$.

D'après le résultat de convergence (2.2.13), on peut écrire pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\int_\Omega a_0(x, u_n, \nabla u_n) v(x) dx \to \int_\Omega a_0(x, u, \nabla u) v(x) dx$$
$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \nabla v(x) dx \to \int_\Omega a(x, u, \nabla u) \nabla v(x) dx,$$

qui est bien le résultat de convergence,

$$(2.2.14) \qquad T(u_n) \rightharpoonup T(u) \quad dans \quad W^{-1,p'}(\Omega).$$

<u>**Assertion 3**</u> : $\langle T(u_n), u_n\rangle \to \langle T(u), u\rangle$.

Par considération de l'inégalité (2.2.4), il suffit de montrer que,

$$\liminf \langle T(u_n), u_n\rangle \geq \langle T(u), u\rangle.$$

Puisque $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$, il suffit encore de prouver que,

$$\liminf \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n).\nabla u_n(x)dx \geq \int_\Omega a(x, u, \nabla u).\nabla u(x)dx.$$

Pour cela, la condition de monotonie stricte donne

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n).\nabla u_n(x)dx \geq \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n).\nabla u(x)dx +$$

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u).(\nabla u_n(x) - \nabla u(x))dx.$$

Faisons tendre n vers l'infini, on conclut facilement l'assertion 3.

Pour la coercivité de T elle découle de la condition d'ellipticité (H_3). ■

Remarque

Lorsque la partie d'ordre inférieur $a_0(x, u, \nabla u)$ de l'opérateur A est affine par rapport au gradient, i.e. $a_0(x, u, \nabla u) = b_0(x, u) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x, u) D_i u(x)$, alors on peut supposer uniquement la monotonie large.

Exemple 1 (Opérateur sans terme d'ordre inférieur)

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$($N \geq 2$ et $\{g_i, 1 \leq i \leq N\}$ une famille de fonctions de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit f une fonction définie et continue sur Ω.

Considérons l'opérateur différentiel A_1 défini par :

$$(1.3)\ A_1 u(x) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[g_i\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)\right].$$

Le problème classique de Dirichlet associé à A_1 est :

$$(D)\ \begin{cases} u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) & . \\ A(u) = f & dans\ \ \Omega \\ u = 0 & sur\ \ \Gamma. \end{cases}$$

Exemple 1 (Opérateur sans terme d'ordre inférieur)

Soit $v \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$. La formule de Green permet d'écrire :

$$(1.4) \quad \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} g_i\left(D_i u(x)\right) D_i v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Supposons que les fonctions g_i sont continues et satisfont les conditions de croissances suivantes :

$(H_1) \quad |g_i(t)| \leq C_0 \left(1 + |t|^{p-1}\right),$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, tout $1 \leq i \leq N$ et pour un certain $p \in]1, +\infty[$ et que

$(H_2) \quad f \in L^{p'}(\Omega).$

On affirme facilement de l'identité intégrale (1.4) est vérifiée pour tout $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Ainsi, on est amené à donner la définition suivante d'une solution faible du problème (D).

Définition

$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est dite solution faible du problème de Dirichlet avec conditions aux limites (D) si,

$$(W.D) \quad \begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega) & . \\ \sum_{i=1}^N \int_\Omega g_i\left(D_i u(x)\right) D_i v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, & \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

De plus,d'après les conditions de croissances (H_1), on affirme que la forme de Dirichlet semi-linéaire,

$$(1.5) \qquad a(u,v) = \sum_{i=1}^N \int_\Omega g_i\left(D_i u(x)\right) D_i v(x)dx$$

est bien définie et est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (à vérifier).

Donc elle induit une fonctionnelle non linéaire bornée T de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,p'}(\Omega)$ définie par :

$$\langle T(u), v\rangle = a(u,v), \ \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Comme $L^{p'}(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$, l'égalité $(W.D)$ correspond à l'équation,

$$(P) \qquad T(u) = f,$$

où $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

Proposition

Supposons que l'hypothèse (H_1) est satisfaite. Alors T est continue.

Démonstration

Soit (u_n) une suite d'éléments de $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Montrons que $T(u_n) \to t(u)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$. En effet, l'inégalité du Hölder

permet d'écrire,

$$\|T(u_n) - T(u)\|_{-1,p'} = sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1} |\langle T(u_n) - T(u), v\rangle| \leq \sum_{i=1}^{N} \|g_i(D_i u_n) - g_i(D_i u)\|_{p'}.$$

Il suffit de prouver que $g_i(D_i u_n) \to g_i(D_i u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$ pour tout $1 \leq i \leq N$.

En effet, puisque $D_i u_n \to D_i u$ dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq i \leq N$, alors il existe

$h_i \in L^p(\Omega)$ telle que (pour une sous-suite) on a :

$$\begin{cases} |D_i u_n(x)| \leq h_i(x), & \forall x \in \Omega \\ D_i u_n(x) \to D_i u(x) & p.p\ x \in \Omega. \end{cases}$$

Or les fonctions g_i sont supposées continues sur Ω, donc

Exemple 1 (Opérateur sans terme d'ordre inférieur)

$$(g_i(D_i u_n(x)))^{p'} \to (g_i(D_i u(x)))^{p'} \quad p.p\ x \in \Omega$$

et par vertue de (H_1), on aura

$$|g_i(D_i u_n(x))|^{p'} \leq C\,(1 + h_i(x)^p)$$

pour p.p. $x \in \Omega$ et pour une certaine constante $C > 0$.

D'où le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet d'écrire (pour une sous-suite) :

$$g_i(D_i u_n) \to g_i(D_i u) \ \ dans \ \ L^{p'}(\Omega)$$

et on a la même convergence pour la suite initiale (par un raisonnement standard de contradiction).

Donc T est continue de $W_0^{1,p}(\Omega)$ vers $W^{-1,p'}(\Omega)$. ■

Maintenant, on passe aux conditions qui permettent à T d'être monotone.

Remarque

Si on suppose la condition de monotonie suivante :

$$(H_3)_l \qquad (g_i(t) - g_i(s))\,(t-s) \geq 0$$

pour tout $t, s \in \mathbb{R}$ et tout $1 \leq i \leq N$, alors T est monotome et puisque il est continue (par (H_1)), il est donc pseudo-monotone.

D'où, $(H_1) + (H_3)_l \Rightarrow T \in (PM)$.

Introduisons maintenant la monotonie stricte :

$$(H_3)_s \qquad (g_i(t) - g_i(s))\,(t-s) > 0$$

pour tout $t \neq s \in \mathbb{R}$ et tout $1 < i < N$

et la condition de coercivité :

$$(H_4) \qquad g_i(t)t \geq C_1|t|^p - C_2$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, tout $1 \leq i \leq N$ et où C_1 et C_2 sont deux constantes strictement positives.

Remarque

Si $(H_3)_s)$ est satisfaite, alors T est strictement monotone.

Proposition

Si $(H_1), (H_3)_s)$ et (H_4) sont satisfaites, alors T est de classe (S_+).

Démonstration

Soit $(u_n) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$(1.6) \quad \begin{cases} u_n \rightharpoonup u \quad dans \quad W_0^{1,p}(\Omega) \\ \limsup \langle T(u_n), u_n - u \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Montrons que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

D'après l'injection compacte $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$, on peut écrire (pour une sous-suite)

$$(1.7) \quad \begin{cases} u_n \to u \quad dans \quad L^p(\Omega) \\ u_n(x) \to u(x) \quad p.p. \quad dans \quad \Omega. \end{cases}$$

D'après (1.6), on a

$$\limsup \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(g_i(D_i u_n(x)) - g_i(D_i u(x))\right)\left(D_i u_n(x) - D_i u(x)\right) dx \leq 0.$$

Donc, $(H_2)_s$ implique :

$$(g_i(D_i u_n(x)) - g_i(D_i u(x)))\,(D_i u_n(x) - D_i u(x)) \to 0 \ p.p. \ \ dans \ \ \Omega,$$

pour tout $i \in \{1, ..., N\}$.

Lemme

Si (t_k) est une suite réelle telle que $(g_i(t_k) - g_i(s))\,(t_k - s) \to 0$ quand $k \to \infty$, alors $t_k \to s$ quand $k \to \infty$.

Exemple 1 (Opérateur sans terme d'ordre inférieur)

Par conséquent, on a

$$(R_1) \qquad D_i u_n(x) \to D_i u_n(x) \ p.p \ \ dans \ \ \Omega.$$

Or d'après ce qui précède, $T \in (PM)$, donc

$$\begin{cases} T(u_n) \rightharpoonup T(u) \\ \langle T(u_n), u_n \rangle \to \langle T(u), u \rangle, \end{cases}$$

ce qui implique que

$$(1.8) \quad \lim \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} g_i(D_i u_n(x)) D_i u_n(x) dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} g_i(D_i u(x)) D_i u(x) dx.$$

Exemple 1 (Opérateur sans terme d'ordre inférieur)

Notons $f_n = \sum_{i=1}^{N} g_i(D_i u_n(x))D_i u_n(x) + C_2$.

D'abord, d'après l'hypothèse (H_4) on a $f_n \geq 0$ et d'après (1.8) on peut écrire

$$\begin{cases} \|f_n\|_1 \to \|f\|_1 \\ f_n(x) \to f(x) \quad p.p \quad dans \quad \Omega, \end{cases}$$

où $f = \sum_{i=1}^{N} g_i(D_i u(x))D_i u(x) + C_2$

Lemme

(E. Hewitt et K. Stromberg)

Si (f_n) est une suite d'éléments de $L^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} f_n \geq 0 \\ \|f_n\|_1 \to \|f\|_1 \\ f_n(x) \to f(x) \quad p.p \quad dans \quad \Omega, \end{cases}$$

Exemple 1 (Opérateur sans terme d'ordre inférieur)

Par utilisation du lemme ci-dessus, on déduit que

$$f_n \to f \quad dans \quad L^1(\Omega).$$

Par conséquent, on aura le résultat de convergence suivant :

$$(1.9) \quad \sum_{i=1}^{N} g_i(D_i u_n) D_i u_n \to \sum_{i=1}^{N} g_i(D_i u) D_i u \quad dans \quad L^1(\Omega).$$

D'où il existe un élément h de $L^1(\Omega)$ tel que pour une sous-suite on aura :

$$\sum_{i=1}^{N} g_i(D_i u_n(x)) D_i u_n(x) \leq h(x) \quad p.p \quad dans \quad \Omega.$$

Or, l'hypothèse (H_4) et (1.9) permettent d'écrire

Exemple 1 (Opérateur sans terme d'ordre inférieur)

$$(1.10) \quad C_1 \sum_{i=1}^{N} |D_i u_n(x)|^p \leq C_2 + h(x) \quad p.p \quad dans \quad \Omega,$$

et donc, le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne (pour une sous-suite) :

$$(1.11) \quad D_i u_n \to D_i u \quad dans \quad L^p(\Omega) \quad pour \quad tout \quad i \in \{1, ..., N\}.$$

Par le raisonnement de contradiction standard, on montre que (1.11) reste vrai pour pour la suite (u_n) toute entière et par suite,

$$u_n \to u \quad dans \quad W_0^{1,p}(\Omega). \blacksquare$$

Remarque

Il faut bien noter que le résultat :

$$(R_1) \qquad D_i u_n(x) \to D_i u_n(x) \ p.p \ \ dans \ \ \Omega$$

est obtenu en utilisant uniquement (H_1) *et* $(H_3)_s$.