Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
et Informatique

Année universitaire 19-20
Filières : SMA
Topologie (S_6)

Série $n°6$

Exercice1 :

Soit E et F deux e.v.n f une application linéaire de E dans F, $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que f est continue sur E ssi f est bornée sur $B_\circ(a,r)$.

Exercice 2 :

Soit C un ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Banach X. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de C et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = 1$, alors la série $\sum \alpha_n x_n$ est convergente et sa limite appartient à C.

Exercice 3 :

Soient X un espace de Banach, Y un e.v.n, $L : X \to Y$ une application linéaire continue et C un sous-ensemble convexe fermé borné de X. On note B_Y la boule unitée fermée de Y.

1. Montrer que si $r > 0$ vérifie
$$2rB_Y \subset L(C) + rB_Y$$
alors
$$rB_Y \subset L(C)$$
2. On se propose de montrer que $Int\overline{L(C)} = IntL(C)$. Soit $y \in Int\overline{L(C)}$.
   a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $y + 4\varepsilon B_Y \subset L(C) + \varepsilon B_Y$.
   b) Montrer qu'il existe $x \in C$ tel que $\|y - L(x)\| \leq \varepsilon$.
   c) Montrer que $4\varepsilon B_Y \subset L(C - x) + 2\varepsilon B_Y$. En déduire que $L(x) + 2\varepsilon B_Y \subset L(C)$.
   d) Montrer que $y + \varepsilon B_Y \subset L(C)$. Conclure.

Exercice 4 :

Soient E un espace de Banach et F un s.e.v. férmé de E. On suppose qu'il existe une suite (x_n) de E telle que : $\lim\limits_{\substack{m\to+\infty \\ n\to+\infty}} d(x_m - x_n, F) = 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $d(x_n, F) \longrightarrow d(x, F)$.

Exercice 5 :

Soient E un e.v.n et F un s.e.v. férmé de E. On suppose que $F \neq E$. Montrer que $\forall\, c \in]0,1[$, $\exists\, x \in S(0,1)$ tel que $d(x,F) \geq c$.

Exercice 6 :

Soient E et F deux espaces de Banach, G un e.v.n et $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire.

1. **Montrer que B est continue si et seulement si $\exists\, C > 0$ telle que :**

$$\forall\,(x,y) \in E \times F\ ,\ \|B(x,y)\| \leq C\|x\|\|y\|.$$

2. **On suppose que :**

   i) Pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto B(x,y)$ est continue.

   ii) Pour tout $y \in F$, l'application $x \mapsto B(x,y)$ est continue.

   Montrer que B est continue.

Exercice 7 :

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. On pose pour tout $\dot{x} \in E/kerf$, $\overline{f}(\dot{x}) = f(x)$.

1. **Montrer que $\overline{f}$ définie une application linéaire continue de $E/kerf$ vers F.**
2. **Montrer que $\|\overline{f}\| = \|f\|$.**
3. **On suppose que E et F sont des espces de Banach et que f est surjective. Montrer que $\overline{f}$ est bijective et que $\overline{f}^{-1}$ est continue.**

Exercice 8 :

Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue et surjective.

1. **Soit $A \subset E$. Montrer que $f(A)$ est fermé si et seulement si $A + kerf$ est fermé.**
2. **Montrer qu'il existe $c > 0$ telle que :**

$$d(x, f^{-1}(y)) \leq c\|y - f(x)\| \quad \forall\, x \in E\,, \forall\, y \in F$$