Cours Geometrie différentielle

Filière : SMA

S VI

Professeur : Saïd Fahlaoui

Chapitre 3 : Courbes gauches.

1) Formules de Frenet.

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ une courbe géométrique paramétrée par sa longueur d'arc : $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Donc : $\forall s \in I \ \|\varphi'(s)\| = 1$.

On note $T(s) = \varphi'(s)$ le vecteur tangent unitaire

On a : $\|T(s)\|^2 = 1$. c'est à dire : $\langle T(s) | T(s) \rangle = 1$

donc $2\langle T'(s) | T(s) \rangle = 0$. le vecteur $T'(s)$ est orthogonal à $T(s)$. [on suppose que $T'(s) \neq 0$] on pose alors

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}.$$

$N(s)$ est le vecteur normal principal unitaire.

Définition 1. La courbure $K(s)$ de la courbe Γ au point $\varphi(s)$ est :

$$k(s) = \|T'(s)\| = \|\varphi''(s)\|$$

Remarques.

1) On suppose dans cette définition que la courbe Γ est de classe $\mathcal{C}^2$

2) Par définition de la courbure elle est toujours positive (ou nulle). Lorsque la courbe est plane elle coïncide avec la valeur absolue de la courbure définie sur $\mathbb{R}^2$

3) Le vecteur normal unitaire est défini si la courbure est non nulle.

4) De la définition on en déduit que :

$$T'(s) = K(s) \cdot N(s)$$

le vecteur binormal est : $B(s) = T(s) \wedge N(s)$

Alors : $\{T(s), N(s), B(s)\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$

C'est le repère de Frenet. (ou repère mobile :)

On a : $T'(s) = K(s) N(s)$.

$$0 = \langle T(s) | N(s) \rangle' = \langle T'(s) | N(s) \rangle + \langle T(s) | N'(s) \rangle$$

d'où $\langle T(s) | N'(s) \rangle = -\langle T'(s) | N(s) \rangle = -K(s)$

Définition 2

La torsion $\tau(s)$ à la courbe Γ au point $\varphi(s)$ est :

$$\tau(s) = \langle B(s) | N'(s) \rangle$$

Remarque.

On a : $B'(s)$ est orthogonal à $B(s)$

$$\langle N(s) | B'(s) \rangle = -\langle N'(s) | B(s) \rangle = -\tau(s)$$

$$\langle T(s) | B'(s) \rangle = -\langle T'(s) | B(s) \rangle = 0$$

On obtient alors les formules de Frenet.. sous une forme matricielle.

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K(s) & 0 \\ -K(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

<u>Remarque</u>.

Le vecteur normal et le vecteur binormal ne sont bien définis que lorsque la courbure ne s'annule pas.

Dans ce cas la torsion est nulle ssi la courbe est plane

<u>Exercice</u>.

Montrer qu'une courbe gauche dont la courbure ne s'annule pas est incluse dans un plan si et seulement si sa torsion est nulle.

Paramétrisation quelconque.

Proposition 1

Soit Γ une courbe géométrique régulière donnée par une paramétrisation quelconque : $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$t \longrightarrow \gamma(t)$

La courbure de Γ au point $\gamma(t)$ est donnée par :

$$K(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

Preuve. on pose $T(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$

$\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\| \cdot T(t)$. $\Rightarrow \gamma''(t) = \|\gamma'(t)\| T'(t) + a(t) \cdot T(t)$.

où $a(t)$ est une fonction qu'on cherche pas à calculer.

or : $\langle T'(t) | T(t) \rangle = 0$ car. $\|T(t)\| = 1$.

d'où $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = \|\gamma'(t)\|^2 \cdot \|T(s) \wedge T'(t)\| = \|\gamma'(t)\|^3 K(t)$

Proposition 2

Soit Γ une courbe géométrique donnée par une paramétrisation quelconque $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$. La torsion de Γ au point $\gamma(t)$ est
$t \longrightarrow \gamma(t)$

donnée par : $\tau(t) = \dfrac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$

Exercice.

Démontrer la proposition 2. [indication : utiliser une paramétrisation par l'abscisse curviligne. $\psi(s) = \gamma \circ \alpha(s)$ avec $t = \alpha(s)$]

Exemple 1. (Hélice circulaire)

Soit Γ la courbe géométrique donnée par sa paramétrisation par longueur d'arc :

$$\psi(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

où a et b sont des paramètres réels. Alors on a :

$$K(s) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Exemple 2.

Soit Γ la courbe géométrique paramétrée par

$$\gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3) \in \mathbb{R}^3$$

on a : $\|\gamma'(t)\| = 3\sqrt{2}\,(1+t^2)$ et $T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 1\right)$

on pose $t = tg\,\theta/2$. $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Soit ψ la paramétrisation par longueur d'arc, elle vérifie

$$\psi'(\theta) = T(tg\,\theta/2) = \frac{1}{2}(\cos\theta, \sin\theta, 1)$$

donc $\psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta, -\cos\theta, \theta)$. donc

$\psi''(\theta) = K(\theta)\, N(\theta)$ avec $K(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $N(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$

$= \left(-\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 0\right)$ $\quad B(\theta) = T(\theta) \wedge N(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta, -\sin\theta, 0)$

donc $\tau(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = K(\theta)$