Module d'Algèbre 6 - SMA -S4 / Série 1 2020-2021

Exercice 1. Soit E un ensemble quelconque muni d'une relation d'équivalence R. Sur une partie A non vide de E, on défini la relation binaire R_A par :

$$\forall x,\ y \in E,\ x\ R_A y \Leftrightarrow x \in A,\ y \in A \text{ et } xRy.$$

1. Montrer que R_A est une relation d'équivalence sur A. Quelles sont ses classes d'équivalence.
2. En notant respectivement par $p : E \to E/R$ la projection canonique induite par R, $p_A : A \to E/R$ sa restriction sur A et $q : A \to A/R_A$ la projection canonique induite par R_A, montrer qi'il existe une application $j_A : A/R_A \to E/R$ telle que $p_A = j_A \circ q$.
3. Montrer que j_A est en fait injective et canonique (j_A est appelée *injection canonique* de A/R_A dans E/R).

Exercice 2. Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne (l.c.i.) T supposée associative. Montrer alors que

$$G \text{ est un groupe} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (i)\ \exists e \in G\ /\ \forall x \in G\ eTx = x \\ (ii)\ \forall x \in G\ \exists x' \in G\ /\ xTx' = e \end{array}$$

Exercice 3.

1. Caractériser les groupes $(G, .)$ pour lesquels l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \to & G \\ & x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

   est un automorphisme.
2. Soit $(G, .)$ un groupe et $a \in G$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{Z} & \to & G \\ & k & \mapsto & a^k \end{array}$$

   est un homomorphisme de groupes.

Exercice 4. Soit K un sous-ensemble non vide d'un groupe fini G. Soit

$$N_G(K) = \{g \in G\ /\ g^{-!}Kg = K\} \quad \text{et} \quad C_G(K) = \{g \in G\ /\ \forall x \in K,\ g^{-!}xg = x\}$$

respectivement appelés le normalisateur et le centralisateur de K dans G.

1. Montrer que $N_G(K)$ et $C_G(K)$ sont des sous-groupes de G et que $C_G(K) \subseteq N_G(K)$.
2. Montrer que $N_G(K) = G$ si et seulement si $K = \bigcup_{g \in G} g^{-!}Kg$.

Exercice 5. Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe multiplicatif G. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 6. On désigne par U l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que

1. U est isomorphe au groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{C}^*/U$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{*+}$.

Exercice 7. Soit Q_8 le sous-groupe de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ engendré par les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et B sont d'ordres 4 et que $BA = A^3B$.
2. En déduire que Q_8 est un groupe non abélien d'ordre 8.

Le groupe Q_8 est appelé *groupe des quaternions*. (On fera une recherche sur l'intérêt en Physique de ce groupe et celui des *octonions*).

Exercice 8.

1. Si tous les sous-groupes d'un groupe G sont d'ordres finis, G est-il aussi d'ordre fini ?
2. Si G est un groupe abélien, on note par $T(G)$ l'ensemble de ses éléments d'ordre fini. Vérifier que $T(G)$ est un sous-groupe de G et déterminer $T(T(G))$.

Exercice 9. Soit $(G, .)$ un groupe d'ordre fini n.

1. Montrer que si n est premier, alors G est cyclique.
2. Soit φ un endmorphisme de G.
   (i) Montrer que φ est un automorphisme si et seulement si $o(\varphi(x)) = o(x)$, $\forall x \in G$.
   (ii) Montrer que φ est un automorphisme si et seulement si $o(\varphi(xy)) = o(yx)$, $\forall x, y \in G$.

Exercice 10. Soit G un groupe cyclique d'ordre n et k un diviseur de n. Montrer que G admet exactement un seul sous-groupe d'ordre k.

Exercice 11. Montrer qu'il existe, à un isomorphisme près, seulement deux groupes distincts d'ordre 4 qui sont $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.