جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES

Département de Mathématiques
Filière : SMPC-S_2-
Année universitaire : $20/21$

Série 1 : calcul d'intégrales et de primitives

Exercice 1. (*Définition de l'intégrale*)

1. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = \arctan\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$.
2. Déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(t)\, dt$.
3. Calculer la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$ et puis celle de $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$.

Exercice 2. (*par primitives usuelles*) Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\, dt, \qquad J = \int_{-2}^3 \frac{u}{(1+u^2)^2}\, du, \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\, dt,$$

$$H = \int_0^4 t\exp(t^2)\, dt, \qquad R = \int_1^e \frac{\ln^3 t}{t}\, dt, \qquad S = \int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\, dt,$$

$$P = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt, \qquad Q = \int_1^e \frac{\cos(\ln t)}{t}\, dt.$$

Exercice 3. (*Intégration par changement de variable*) Calculer

$$I_1 = \int_{-\ln 2}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx, \quad J_1 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\cos x\, dx,$$

$$K_1 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx \quad (\text{ poser } x = sh(t)) \qquad L_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\, dt \text{ (On pourra poser } x = \tan(\tfrac{t}{2})).$$

Exercice 4. (Intégration par parties) Calculer

$$I_2 = \int_{\ln 2}^1 xe^x\, dx, \qquad J_2 = \int_0^{\pi} x\sin x\, dx, \qquad K_2 = \int_{-1}^1 \arccos t\, dt,$$

$$H_2 = \int_1^e t^2 \ln t\, dt \qquad L_2 = \int t^3 e^t\, dt\ .$$

Exercice 5. (*Intégration des fonctions rationnelles, trigonométriques*) Calculer

1. $\int \frac{2t-1}{(t-1)(t-2)}\, dt, \qquad \int \frac{1}{2t^2-2t+1}\, dt,$
2. $\int \cos^2 t\, dt, \qquad \int \tan^3 t\, dt, \qquad \int \frac{1}{\cos^4 t}\, dt.$
3. $\int \frac{\cos t}{1+\cos t}\, dt, \qquad \int \frac{1}{\sin t + \sin 2t}\, dt$ (On pourra poser $x = \cos t$).

Exercice 6. (*Propriétés d'intégrale*)

1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Shwarz, montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$ on ait

$$0 < \int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on pose

$$U_n = \int_0^1 x^{n-2} e^{-2x}\, dx$$

i) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a $\quad 0 \leq x^{n-2} e^{-2x} \leq x^{n-2}$,

ii) Déduire que $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{n-1}$ et donner la limite de la suite (U_n),

iii) Trouver une relation entre U_{n+1} et U_n, et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1)U_n$.