جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES

COURS DE MATHÉMATIQUES

ANALYSE

SMPC -S2-

Pr. LAHMI Badr

Année universitaire : 2020/2021

Table des matières

1 Calcul d'intégrales et de primitives **3**
1.1 Primitive d'une fonction . . . 3
1.2 Intégrale définie . . . 5
1.2.1 Quelques propriétés de l'intégrale définie . . . 6
1.2.2 Exemples et applications . . . 6
1.3 Techniques du calcul intégral . . . 8
1.3.1 Intégration par primitives usuelles . . . 8
1.3.2 Intégration par parties . . . 9
1.3.3 Intégration par changement de variable . . . 10
1.4 Calcul de primitives et d'intégrales . . . 11

Préface

Ce document couvre essentielement l'ensemble du programme de mathématiques du deuxième semestre pour la filière SMPC :

1. Calcul d'intégrales et de primitives,

2. Les équations différentielles linéaires,

3. Les intégrales généralisées,

la présentation de ce document permet à l'étudiant, quel que soit son cursus, de s'initier à son rythme aux thèmes figurant à son programme et de conforter ses acquis.

L'étudiant dispose des définitions précises, des énoncés et quelques démonstrations de théorèmes essentiels, des remarques et d'exemples modèles savamment gradués.

Les efforts que doit fournir l'étudiant sont importants : tout d'abord comprendre le cours, ensuite connaàtre par cœur les définitions, les théorèmes, les propositions... sans oublier de travailler sur les exemples, qui permettent de bien assimiler les notions nouvelles et les mécanismes de raisonnement.

Chapitre 1

Calcul d'intégrales et de primitives

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1.1 Primitive d'une fonction

Définition 1.1.1. .
Soit f et F deux fonctions définies sur l'intervalle I.
On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple :
Les fonctions $F_1 : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - e^x + 2$ et $F_2 : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - e^x - 4$ sont des primitives de la fonction $f : x \mapsto x^2 - e^x$ sur $\mathbb{R}$.
Une question se pose naturellement :
est-ce que toute fonction possède au moins une primitive ? si oui, est-elle unique ?
La réponse est négative, cependant nous avons le théorème d'existence suivant, en plus d'après l'exemple précédent, les deux fonctions F_1 et F_2 sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$ puisque $F_1' = F_2' = f$. Elles vérifient $F_2 = F_1 - 6$.
D'une manière générale, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.1.1. *Soit f une fonction continue sur I. Alors*

i) f admet une infinité de primitive sur I.

ii) La différence de deux primitives est une constante.

Notation : Soit $a \in I$, l'unique primitive de f qui s'annulle en a est notée par $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.
Si F est une primitive quelconque de f, alors d'après le théorème 1.1.1 on peut écrire

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

On notera aussi une primitive de f par le symbole

$$\int f(x)\,dx$$

TABLE 1.1 – Liste de primitives usuelles

fonction $f(x)$	Primitive F $(F(x) = \int f(x)\,dx)$	Ensemble de validité
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1;0\})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$\mathbb{R}^*$
$\sin(ax) \quad a \neq 0$	$\frac{-1}{a}\cos(ax)$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax) \quad a \neq 0$	$\frac{1}{a}\sin(ax)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\|\cos x\|$	$D_{\tan}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$D_{\tan}$
$\exp(ax) = e^{ax} \quad a \neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$
ch x	sh x	$\mathbb{R}$
sh x	ch x	$\mathbb{R}$
th x	ln(ch x)	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	th x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\|\frac{1+x}{1-x}\|$	$\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$]-1,1[$

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert$	$]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x$	$]-1,1[$

Rappellons que $D_{\tan} := \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
La primitive de la somme de deux fonctions est égale à la somme des deux primitives. Cette propriété découle de la linéarité des primitives, plus précisement, on a :
Propriété (Linéarité)
Soient f et g deux fonctions continues sur I et α un réel donné. On a

(i) $\displaystyle\int (f(t)+g(t))\,dt = \int f(t)\,dt + \int g(t)\,dt,$

(ii) $\displaystyle\int \alpha f(t)\,dt = \alpha \int f(t)\,dt.$

Exemple

$$\int 7t^5 + \frac{1}{1+t^2}\,dt = 7\int t^5\,dt + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt, = \frac{7}{6}t^6 + \arctan t.$$

1.2 Intégrale définie

Définition 1.2.1. .
Soit f une fonction continue sur I, F une primitive de f sur I et $(a,b) \in I^2$. L'intégrale définie de f de a à b est le nombre réel défini par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarques :
1) S'il n'y a pas d'ambiguité, on peut noter cette intégrale par : $\displaystyle\int_a^b f$.
2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$ on dit alors que la variable est muette.
3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas du choix de la primitive F.[1]

Conséquence

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

1. car la différence de deux quelconques primitives de f est une constante

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

Exemples :
D'après le tableau des primitives usuelles,

1. $\int_0^{-\pi} \cos(3x)\,dx = \big[\frac{1}{3}\sin(3x)\big]_0^{-\pi} = 0.$
2. $\int_1^2 \frac{1}{u^2}\,du = \big[-\frac{1}{u}\big]_1^2 = \frac{1}{2}.$
3. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \big[\arctan t\big]_{-1}^1 = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$
4. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \big[\arcsin t\big]_0^1 = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$

1.2.1 Quelques propriétés de l'intégrale définie

Propriété 1 (Linéarité)
Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$ et α un réel donné. On a

(i) $\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt,$

(ii) $\int_a^b \alpha f(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt.$

Propriété 2 (Relation de Chasles)
Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et $c \in [a,b]$. On a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt,$$

Propriété 3 (Intégrale et ordre)
Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$. On a

(i) Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0,$

(ii) Si $f \geq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq \int_a^b g(t)\,dt,$

(iii) $\big|\int_a^b f(t)\,dt\big| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$

Propriété 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient f et g deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\Big(\int_a^b fg\Big)^2 \leq \int_a^b f^2 . \int_a^b g^2$$

1.2.2 Exemples et applications

1) Posons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 x\,dx$

Par linéarité, on a $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dx = \pi,$

et $J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(2x)dx = \big[\sin(2x)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

Donc $\qquad I = J = \frac{\pi}{2}.$

Exercice Soit $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$

Montrer que $A + B = \frac{\pi}{2}$ et que $A - B = 0$. En déduire les valeurs de A et B.

2) Calculons $K = \int_{-1}^{1} |e^t - 1|\, dt$. La fonction $t \mapsto e^t - 1$ est continue sur $[-1, 1]$ et change de signe en 0. D'après la relation de Chasles, on peut écrire

$$\begin{aligned} K &= \int_{-1}^{0} (1 - e^t)\, dt + \int_0^1 (e^t - 1)\, dt \\ &= \big[t - e^t\big]_{-1}^{0} + \big[e^t - t\big]_0^1 \\ &= e^{-1} + e - 2. \end{aligned}$$

3) Encadrer L où $L = \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{1 + x^2}\, dx$

D'après la propriété 3, on obtient

$$\begin{aligned} |L| = \Big|\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{1 + x^2}\, dx\Big| &\leq \int_{-1}^{1} \frac{|\sin x|}{1 + x^2}\, dx \\ &\leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{1 + x^2}\, dx \qquad car |\sin x| \leq 1 \quad \forall x \\ &= \big[\arctan x\big]_{-1}^{1} \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\qquad -\frac{\pi}{2} \leq L \leq \frac{\pi}{2}.$

4) Encadrer l'intégrale $H = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1 + x^2}}\, dx$:

D'une part, on a $H \geq 0$ puisque la fonction sous le signe intégral est continue et positive sur $[0, 1]$. D'autre part, on a

$$H^2 = \Big(\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1 + x^2}}\, dx\Big)^2 = \Big(\int_0^1 \sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx\Big)^2$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} H^2 &\leq \int_0^1 \sqrt{x}^2\, dx. \int_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\Big)^2\, dx \\ &\leq \int_0^1 x\, dx. \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

ce qui implique que $\qquad 0 \leq H \leq \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$

Remarque :

En général, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$

1.3 Techniques du calcul intégral

1.3.1 Intégration par primitives usuelles

La technique d'intégration (et de primitivation) par les primitives usuelles consiste à déterminer une primitive en utilisant le tableau des primitives usuelles lorsque l'intégrale (définie ou indéfinie) à calculer est de la forme $\displaystyle\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx$ [2], où f est une fonction continue sur I et u une fonction dérivable sur I à dérivée continue [3]. dans ce cas et si F est une primitive de f sur I, alors

$$\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = F(u(x))$$

Ainsi, si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors

- $\displaystyle\int u(x)^n\cdot u'(x)\,dx = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1} \qquad (n\in\mathbb{N})$
- $\displaystyle\int e^{u(x)}\cdot u'(x)\,dx = e^{u(x)}$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \arctan(u(x))$
- $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)|$
- ....

Pour l'intégrale définie : si a et b sont dans I, alors

$$\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \big[F(u(x))\big]_a^b$$

Exemples

- $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{4}\sin^4(x)+C \quad (C\in\mathbb{R}).$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = [\frac{\ln^3 x}{3}]_1^e = \frac{1}{3}.$
- $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$
- $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(x^2)+C.$
- $\displaystyle\int_0^1 2x^2e^{x^3}\,dx = \frac{2}{3}\big[e^{x^3}\big]_0^1 = \frac{2}{3}(e^3-1).$

Cette technique est parfois difficile voir impossible à utiliser [4]

2. la dérivée première de la composée $h\circ g$ est donnée par $(h(g(x))' = g'(x)\cdot h'(g(x))$
3. Une fonction dérivable sur I à dérivée continue est dite de classe $\mathcal{C}^1$
4. Les primitives des fonctions e^{-x^2}, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{e^x}{x}\ldots$ ne peuvent pas s'exprimer à partir des fonctions élémentaires par une succesion finie d'opération.

1.3.2 Intégration par parties

On rappelle que si u et v sont deux fonctions dérivables sur I, alors $u \cdot v$ est dérivable sur I et

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u \cdot v'(x) \qquad \forall x \in I,$$

par conséquent, nous avons la proposition suivante

Proposition 1.3.1. .
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx.$$

Exemple 1 Déterminons une primitive de $\ln x$ sur $]0, +\infty[$.
Posons $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, donc Par une intégration par parties, on obtient sur $]0, +\infty[$

$$\int \ln x \; dx = x \ln x - x + C \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2 (élémentaire) Considérons pour $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale indéfinie suivante qui est définie sur $\mathbb{R}$

$$E_n(t) = \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\, dt$$

On a $\quad E_0(t) = t + C_0 \qquad C_0 \in \mathbb{R}$
et $\quad E_1(t) = \arctan t + C_1 \qquad C_1 \in \mathbb{R}$.
Pour $n \geq 2$, nous envisageons calculer E_{n+1} en fonction de E_n.

$$\begin{cases} v'(t) = 1, \\ u(t) = (1+t^2)^{-n}, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} v(t) = t, \\ u'(t) = -2n(1+t^2)^{-n-1}, \end{cases}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc d'après la formule d'intégration par parties,

$$E_n(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\, dt$$

d'où par linéarité,

$$\begin{aligned} E_n(t) =& \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\Big(\int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}}\, dt \Big) \\ =& \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\Big(\int \frac{t^2+1}{(1+t^2)^{n+1}}\, dt - \int \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\, dt \Big) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E_n(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\big(E_n(t) - E_{n+1}(t)\big)$$

D'où l'on déduit la formule de reccurence suivante

$$2nE_{n+1}(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} + (2n-1)E_n(t), \tag{1.1}$$

Ainsi, E_2 est obtenue à partir de E_1...

Proposition 1.3.2. *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Exemple Calculer à l'aide de la technique d'intégration par parties l'intégrale suivante

$$A = \int_0^1 xe^x\,dx.$$

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.
u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$. Donc,

$$A = \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = \big[xe^x\big]_0^1 - \big[e^x\big]_0^1 = \big[xe^x - e^x\big]_0^1 = 1.$$

remarque Parfois, on applique cette technique plusieurs fois. (voir TD)

1.3.3 Intégration par changement de variable

Pour calculer $\displaystyle\int f(x)\,dx$ au moyen du changement de variable $x = \varphi(t)$ où φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, on remplace l'élément $f(x)\,dx$ par $f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. Ensuite on intégre par rapport à t et on revient à la variable x par $t = \varphi^{-1}(x)$. par conséquent,

$$\text{Si} \quad F(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

$$\text{alors} \quad \int f(x)\,dx = F(\varphi^{-1}(x)).$$

Exemple 1 Calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}^3}\,dx.$

Posons $u = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow x = u^2 - 1 = \varphi(u)$. La fonction φ définit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-1, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. De plus on a $dx = 2u\,du$, donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}^3}\,dx &= \int \frac{1}{u^3 + u} 2u\,du \\
&= 2\int \frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= 2\arctan u + C \\
&= 2\arctan(\sqrt{1+x}) + C.
\end{aligned}$$

Exemple 2 Calcul de $\displaystyle\int \frac{2}{e^x + e^{-x}}\,dx.$

Posons $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t$. On a $dx = \dfrac{dt}{t}$, donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{e^x + e^{-x}}\,dx &= \int \frac{2}{t + \frac{1}{t}} \frac{dt}{t} \\
&= 2\int \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= 2\arctan t + \lambda \\
&= 2\arctan(e^x) + \lambda. \qquad \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Pour les intégrales définies, nous avons cette proposition

Proposition 1.3.3. *Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ et f une fonction continue sur le segment $\varphi([a,b])$. Alors*

$$\int_a^b f(\varphi(x)).\varphi'(x).\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

l'application φ[5] définit un changement de variable.

Exemple 1 Calculer à l'aide de la technique du changement de variable l'intégrale suivante $B = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$. Effectuons le changement de variable suivant : $e^x = t$. on a $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = e$ et $dx = \dfrac{1}{t}\,dt$. D'où

$$B = \int_1^e \frac{1}{t + \frac{1}{t}}\,\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan e - \frac{\pi}{4}.$$

Exemple 2 Calculer $C = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Posons $x = \sin\theta$. $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$, $x = 1 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$ et $dx = \cos\theta\,d\theta$. D'où

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2\theta}{2}\,d\theta = [\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

ce qui donne $C = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice :

En utilisant la relation de Chasles et un changement de variable convenable, on peut démontrer la propriété suivante :

Soit f une fonction continue sur le segment $[-a,a]$, alors

- Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
- Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Ainsi, par exemple on a $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{\sin x}{1+x^4}\,dx = 0$.

1.4 Calcul de primitives et d'intégrales

Primitivation d'une fraction rationnelle

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels. On a[6]

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = R(X) + \frac{P_1(X)}{Q(X)}$$

5. φ n'est pas necessairement bijective
6. après avoir effectuer une division Euclidienne

Où R est un polynôme et P_1 est un polynôme de degré inférieur strictement au degré de Q. La décomposition de la fraction $\dfrac{P}{Q}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ nous conduit à rechercher les primitives d'éléments simples du 1^{er} espèce $\dfrac{1}{(x-a)^k}$ ou du 2^{ieme} espèce $\dfrac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^n}$ $k, n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Primitivation d'élément simple du 1^{er} espèce :</u>

si $k=1$**,** $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C,$

si $k>1$**,** $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = \frac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C.$

<u>Primitivation d'élément simple du 2^{ieme} espèce :</u>

Calculons $\displaystyle J_n(x) = \int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^n}\,dx$ avec $b^2-4c<0$

En écrivant le trinôme x^2+bx+c sous sa forme canonique $(x-p)^2+q^2$, on obtient,

$$J_n = \int \frac{\alpha x+\beta}{((x-p)^2+q^2)^n}\,dx.$$

En effectuant le changement de variable $x = p+qt$, il existe des constantes A et B telles que [7]

$$J_n = A\int \frac{2t}{(1+t^2)^n}\,dt + B\int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt.$$

la première intégrale du membre à droite est usuelle (de la forme $\int u'u^{\alpha}$) et la deuxième intégrale est égale à E_n traitée dans la partie précedente qui vérifie la relation de reccurence (1.1) sachant que $E_1(t) = \arctan t + c$.

Exemple 1 Déterminons $\displaystyle I(x) = \int \frac{1}{x^3(x+1)}\,dx$

I est définie sur $D_I =]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$ et pour tout x dans D_I, on a

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x+1}$$

Où a, b, c et d sont des coefficients réels qu'on peut déterminer par l'une des méthodes traitées en algèbre...On trouve

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x+1}$$

en intégrant, on obtient

$$I(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{-1}{2x^2} + \ln|x+1| + c(x)$$

où $c(\cdot)$ est définie par $c(x) = \begin{cases} c_1, & \text{si } x \in]-\infty,-1[, \\ c_2, & \text{si } x \in]-1,0[, \\ c_3, & \text{si } x \in]0,+\infty[. \end{cases}$ $c_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3$

Exemple 2 Déterminons $\displaystyle J(x) = \int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)}\,dx,$

7. B et C dépendent de α, β, b, c.

En décomposant la fraction en éléments simples, on obtient pour tout x dans $D_J =]-\infty, 0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$\frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{2x+4}{x^2+4} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{2x}{x^2+4} + \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}$$

en intégrant, il vient

$$J(x) = 2\ln|x| - 2\ln|x-1| + \ln(x^2+4) + 2\arctan(\frac{x}{2}) + \lambda(x)$$

où $\lambda(\cdot)$ est une constante réelle sur chacun des intérvalles de D_J.

Exemple 3 Calculons $\quad K = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^5}{(x^2+4)^2}\,dx,$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{x^5}{(x^2+4)^2} = x + \frac{ax+b}{x^2+4} + \frac{cx+d}{(x^2+4)^2}$$

On trouve $a = 8$, $b = 0$, $c = -16$ et $d = 0$. par suite

$$K = \left[\frac{x^2}{2} - 4\ln(x^2+4) - \frac{8}{(x^2+4)}\right]_0^1 = ...$$

Exemple 4 Déterminons $\quad R(u) = \displaystyle\int \frac{u-7}{(u^2+4u+13)^2}\,du,$

remarquons que le discriminant du trinôme $u^2+4u+13$ est strictement négatif. En écrivant $(u^2+4u+13)^2 = ((u+2)^2+9)^2 = 9^2\big(1+(\frac{u+2}{3})^2\big)^2$ et en effectuant le changement de variable $t = \dfrac{u+2}{3}$ on obtient les intégrales $E_1(t)$ et $E_2(t)$ (voir la partie concernant l'intégration par parties). En utilisant la relation de recurrence (1.1) on obtient

$$R(u) = \frac{-u-3}{2(u^2+4u+13)} - \frac{1}{6}\arctan\big(\frac{u+2}{3}\big) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Primitivation d'une fraction rationnelle en sin **et** cos

Soit F une fraction rationnelle. Considérons l'intégrale suivante

$$T = \int F(\sin x, \cos x)\,dx.$$

On effectue en général le changement de variable suivant : $t = \tan(\frac{x}{2})$.

On a $\quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $\quad dx = 2\dfrac{dt}{1+t^2}$. Donc T s'écrit

$$T = \int F(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\,2\frac{dt}{1+t^2}.$$

Ainsi on obtient une fraction rationnelle en t à laquelle on peut appliquer la méthode précédente.

Des changements de variable plus simples peuvent intervenir dans quelques situations. Plus précisement nous avons les règles suivantes dites les **Règles de Bioche** :

Soit $T = \displaystyle\int F(\sin x, \cos x)\,dx$. posons $\varphi(x) = F(\sin x, \cos x)\,dx$.

- si $\varphi(-x) = \varphi(x)$, on pose $t = \cos x$,
- si $\varphi(\pi - x) = -\varphi(x)$, on pose $t = \sin x$,
- si $\varphi(\pi + x) = \varphi(x)$, on pose $t = \tan x$.

Dans les cas particuliers suivants, sans faire appel aux règles de Bioche, on peut suivre la démarche

- si $T = \displaystyle\int F(\sin x) \cos x \, dx$, on pose $t = \sin x$,
- si $T = \displaystyle\int F(\cos x) \sin x \, dx$, on pose $t = \cos x$,
- $T = \displaystyle\int F(\tan x) \cos^{-2} x \, dx$, on pose $t = \tan x$.

Plus particulièrement, si F est un polynôme en sin et cos, on se ramène au calcul des intégrales de la forme $U = \displaystyle\int \sin^p x \cos^n x \, dx \quad n, p \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent pour déterminer U :

- ▷ si n ou p est impair : introduire $\sin x$ si p est impair et introduire $\cos x$ si n est impair.
- ▷ si n et p sont pairs : linéariser $\sin^p x \cos^n x$. [8]

Exemple 1 Calculons $\quad A(x) = \displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} \, dx$

A est définie sur $\mathbb{R}$ et l'élément $\varphi(x) = \dfrac{\sin^3 x}{2 + \cos x} \, dx$ vérifie la propriété $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Donc d'après la règle de Bioche, on introduit $t = \cos x$. Avec ce changement, il vient

$$A(x) = \int \frac{u^2 - 1}{2 + u} \, du = \int \big(u - 2 + \frac{3}{2 + u}\big) \, du = \frac{u^2}{2} - 2u + 3 \ln |u + 2| + c$$

D'où $\quad A(x) = \dfrac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln(2 + \cos x) + c \,, \qquad c \in \mathbb{R}.$

Exemple 2 Calculons $\quad M(x) = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4 \sin x + 13} \, dx$

L'élément à intégrer ne répond pas aux règles de Bioche. En remarquant qu'il est de la forme $\displaystyle\int F(\sin x) \cos x \, dx$, on peut poser $t = \sin x$ donc M s'écrit

$$M = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 13}$$

---

8. on utilise pour linéariser les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

ainsi que la formule du binôme de Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Le trinôme $t^2+4t+13$ est irreductible dans $\mathbb{R}[X]$ $(\Delta<0)$ ce qui conduit à écrire

$$\begin{aligned}M=\int\frac{dt}{t^2+4t+13}=\int\frac{dt}{(t+2)^2+9}&=\frac{1}{9}\int\frac{dt}{\big(\frac{t+2}{3}\big)^2+1}\\&=\frac{1}{9}\int\frac{dt}{\big(\frac{t+2}{3}\big)^2+1}\\&=\frac{1}{3}\int\frac{1/3}{\big(\frac{t+2}{3}\big)^2+1}\\&=\arctan\big(\frac{t+2}{3}\big)+c\\&=\arctan\big(\frac{\sin x+2}{3}\big)+c,\qquad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Primitivation d'une fraction rationnelle en sh et ch

Soit Soit F une fraction rationnelle et soit l'intégrale

$$H=\int F(shx,chx)\,dx$$

En général on peut poser $t=th\frac{x}{2}$. On a $\quad \text{ch}\,x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\quad \text{sh}x=\frac{2t}{1-t^2}$ et $\quad dx=2\frac{dt}{1-t^2}$.
Donc H s'écrit $\quad H=\int F(\frac{2t}{1-t^2},\frac{1+t^2}{1-t^2})\,2\frac{dt}{1-t^2}$.
On obtient donc une fraction rationnelle en t à laquelle on peut appliquer la méthode précédente.
remarque : Le changement de variable $t=e^x$ s'avére très pratique.
Exemple Calculons $\quad N(x)=\int\frac{dx}{\text{sh}x+3\text{ch}x+1}$,
Posons $t=\text{th}\frac{x}{2}$ qui donne

$$N(x)=\int\frac{dt}{t^2+t+2},$$

En utilisant la méthode de la primitivation des fractions rationnelles, on obtient

$$N(x)=\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\big(\frac{2\text{th}(\frac{x}{2})+1}{\sqrt{7}}\big)+C^{te}.$$

Primitivation d'une fraction rationnelle en $e^{\alpha x}$

Soit F une fraction rationnelle, $\alpha\in\mathbb{R}^*$ et soit l'intégrale

$$G(x)=\int F(e^{\alpha x})\,dx$$

Pour calculer G en introduit en général le changement de variable $t=e^{\alpha x}$.
Exemple Calculons $\quad I(x)=\int\frac{dx}{(e^x+2)^2}$,
posons $u=e^x$, ce qui équivaut à $x=\ln u$. On a $dx=\frac{du}{u}$ d'où

$$I(x)=\int\frac{du}{u(u+2)^2},$$

en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples, on obtient

$$\frac{du}{u(u+2)^2} = \frac{1}{4u} - \frac{1}{4(u+2)} - \frac{1}{2(u+2)^2},$$

en intégrant, il vient

$$I(x) = \frac{1}{4}\big(x + \frac{2}{2+e^x} - \ln(2+e^x)\big) + c$$