Université M. Ismail – Faculté des Sciences – Département de Mathématiques

Travaux Dirigés d'Algèbre 6 - S4 / Série 2 – 2020-2021

Exercice 1. Montrer que le groupe $Aut(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ des automorphismes du groupe additif $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est un groupe cyclique. Expliciter ses éléments et donner ses générateurs.

Exercice 2. Soit G un groupe fini d'ordre pq où p est un nombre premier et $p > q$. Montrer que G a au plus un sous-groupe d'ordre p et en déduire que ce sous-groupe (s'il existe) est distingué.

Exercice 3. Soit G un groupe. Montrer que :

1. Tout sous-groupe H, d'indice 2 de G est distingué.
2. Le sous-groupe centre $Z(G)$ de G est distingué et que tout sous-groupe H de $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.
3. Si H est un sous-groupe distingué d'ordre 2 de G, alors $H \subset Z(G)$.
4. Si H est un sous-groupe cyclique et distingué de G, alors tout sous-groupe de H est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 4. Soit G un groupe non commutatif d'ordre 10.

1. Montrer que G contient un élément d'ordre 5.
2. Montrer que G contient un sous-groupe distingué H d'ordre 5 et que tout élément $x \in G \setminus H$ est d'ordre 2.

Exercice 5. Soit G un groupe tel que pour tout entier $n > 1$ fixé, on a : $\forall x, y \in G$, $(xy)^n = x^n y^n$.

1. Montrer que $G^n = \{x^n : x \in G\}$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que $\forall x, y \in G$, $(xy)^n = x(yx)^{n-1}y$ et en déduire que $(yx)^{n-1} = x^{n-1}y^{n-1}$.
3. Montrer que $G^{n-1} = \{x^{n-1} : x \in G\}$ est distingué dans G.

Exercice 6. Soit G un groupe et A une partie non vide de G. On pose
$N_A = \{(g_1 a_1 g_1^{-1})(g_2 a_2 g_2^{-1}) \cdots (g_n a_n g_n^{-1}) : n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall 1 < i < n, g_i \in G \text{ et } a_i \in A \cup A^{-1}\}$

1. Montrer que N_A est un sous-groupe distingué de G contenant A.
2. Montrer que N_A est le plus petit sous-groupe distingué de G contenant A. N_A est appelé, le sous-groupe distingué de G engendré par A.

Exercice 7. Soit G un groupe. Montrer que si H est un sous-groupe de $Z(G)$ tel que G/H est cyclique, alors G est abélien.

Exercice 8. Soit H^*, H, K^* et K quatre sous-groupes d'un groupe G. On suppose que $H^* \trianglelefteq H$ et $K^* \trianglelefteq K$.

1. Montrer que $F = (H \cap K^*)(K \cap H^*)$ est un sous-groupe distingué de $H \cap K$.
2. Soit $f : H^*(H \cap K) \to (H \cap K)/F$ définie par $f(h^*x) = xF$ où $h^* \in H^*$ et $x \in H \cap K$.
   — (a) Montrer que $Ker(f) = H^*(H \cap K^*)$.
   — (b) En déduire que $H^*(H \cap K)/H^*(H \cap K^*) \simeq (H \cap K)/F$
   — (c) Montrer que $H^*(H \cap K)/H^*(H \cap K^*) \simeq K^*(H \cap K)/K^*(H^* \cap K)$

Exercice 9. Un groupe G est dit résoluble s'il possède une suite de sous-groupes

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_n = \{e\}$$

telle que $\forall 0 \leq i \leq n-1, G_{i+1} \trianglelefteq G_i$ et G_i/G_{i+1} est abélien.

1. Montrer que tout groupe abélien est résoluble. En déduire que tout groupe cyclique est résoluble.
2. Montrer que si $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes et que G est résoluble, alors $f(G)$ est résoluble. En déduire que tout groupe quotient d'un groupe résoluble est aussi résoluble.
3. Montrer que si $f : G \to G'$ est un homomorphisme surjectif de groupes et que G' est résoluble, alors G est résoluble. En déduire que tout sous-groupe d'un groupe résoluble est aussi résoluble.
4. Montrer que le groupe symétrique S_3 est résoluble.