جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES

ANALYSE

SMPC -S2-

Pr. LAHMI Badr

Année universitaire : 2020/2021

Corrigé de la série 1 : Calcul d'intégrales et de primitives

Corrigé de l'exercice 1. *(*Définition de l'intégrale*)*

1. *Pour montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ il suffit de vérifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.*
   En effet, on a F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$
\begin{aligned}
F'(x) = \arctan\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' &= \frac{\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)'}{1 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} \\
&= \frac{\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)}{\left(\dfrac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}\right)} \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

   donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. *D'après la question précédente et la définition d'une intégrale définie,*

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\, dx = \Big[F(x)\Big]_0^1 &= F(1) - F(0) \\
&= \arctan\left(\frac{e^1 - e^{-1}}{2}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{e^2 - 1}{2e}\right).
\end{aligned}
$$

3. *D'après le tableau des primitives usuelles (voir le cours), on peut écrire*

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} &= \left[\ln(x + \sqrt{x^2+1})\right]_0^1, \\
&= \ln(1 + \sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

   En remarquant que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est paire, on obtient

$$
\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = 2\ln(1+\sqrt{2}).
$$

Corrigé de l'exercice 2. •

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^1 \frac{t}{1+t^4} dt &= \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{(t^2)'}{1+(t^2)^2} dt, \\
&= \frac{1}{2}\Big[\arctan(t^2)\Big]_0^1, \\
&= \frac{1}{2}\arctan(1), \\
&= \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

- $$J=\int_{-2}^{3}\frac{u}{(1+u^2)^2}du \quad = \quad \int_{-2}^{3}\frac{1}{2}(1+u^2)'(1+u^2)^{-2}du,$$

en utilisant la formule $\int f'f^n=\frac{f^{n+1}}{n+1}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
J=\int_{-2}^{3}\frac{u}{(1+u^2)^2}du &= \frac{1}{2}\left[\frac{(1+u^2)^{-1}}{-1}\right]_{-2}^{3}\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+u^2}\right]_{-2}^{3}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{10}+\frac{1}{5}\right)\\
&= \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
K=\int_{0}^{\pi/4}\tan(t)dt &= \int_{0}^{\pi/4}\frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt\\
&= \Big[-\ln|\cos(t)|\Big]_{0}^{\pi/4}\\
&= -\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})\\
&= \ln\sqrt{2}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
H=\int_{0}^{4}te^{t^2}\,dt &= \int_{0}^{4}\frac{1}{2}(t^2)'e^{t^2}\,dt\\
&= \frac{1}{2}\Big[e^{t^2}\Big]_{0}^{4}\\
&= \frac{e^{16}-1}{2}.
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
R=\int_{1}^{e}\frac{\ln(t)^3}{t}\,dt &= \int_{1}^{e}\frac{1}{t}\ln(t)^3\,dt\\
&= \int_{1}^{e}(\ln(t))'(\ln(t))^3\,dt\\
&= \left[\frac{\ln(t)^4}{4}\right]_{1}^{e}dt\\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} S=\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt &= \int_1^8 (t)'(t)^{-1/3}\,dt \\ &= \left[\frac{t^{2/3}}{2/3}\right]_1^8 \\ &= \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{t^2}\right]_1^8 \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} P=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin(t)dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\arcsin(t))'\arcsin(t)dt \\ &= \left[\frac{\arcsin^2(t)}{2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} Q=\int_1^e \frac{\cos(\ln(t))}{t}\,dt &= \int_1^e \frac{1}{t}\cos(\ln(t))\,dt \\ &= \int_1^e (\ln(t))'\cos(\ln(t))\,dt \end{aligned}$$

en utilisant la formule la dérivée de la composée $(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$, on déduit que

$$Q=\Big[\sin(\ln(t))\Big]_1^e = \sin(1).$$

Corrigé de l'exercice 3. *(Intégration par Changement de variable)*

<u>• *calcul de I_1*</u> *: Posons $t=\varphi(x)=e^x$, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ (bijective) de l'intervalle $[-1,-\ln 2]$ dans $[e^{-1},\frac{1}{2}]$, de plus*

$$\varphi'(x)=e^x, \quad \varphi(-\ln 2)=\frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \varphi(-1)=e^{-1},$$

d'après la formule d'intégration par changement de variable, on a

$$\begin{aligned} I_1=\int_{-\ln 2}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\;dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{e^{-1}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\;\frac{dt}{t} \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{e^{-1}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\;dt \\ &= \big[\arcsin t\big]_{\frac{1}{2}}^{e^{-1}} \\ &= \arcsin(e^{-1})-\arcsin(\frac{1}{2}) \\ &= \arcsin(e^{-1})-\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

• *calcul de J_1 : Posons $u = \phi(x) = \sin x$, la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ (bijective) de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0,1]$ et plus précisement,*

$x = 0 \Rightarrow u = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$ *et* $du = \cos x\, dx$

d'où

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} \cos x \; dx = \int_0^1 \sqrt{u} \; du = [\frac{2}{3}u\sqrt{u}]_0^1 = \frac{2}{3}$$

• *calcul de K_1(facultatif) : Rappellons que les fonctions hyperboliques sh et ch sont définies sur $\mathbb{R}$ réspectivement par : $sh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ et $ch(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$. Elles vérifient l'égalité suivante pour tout réel t,*

$$ch^2(t) - sh^2(t) = 1$$

Si l'on pose $x = sh(t)$, il vient $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{ch^2(t)} = cht$ et $dx = ch(t)\, dt$ et par suite

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \; dx \\ &= \int_0^{argsh1} ch(t) \cdot ch(t)\, dt \\ &= \int_0^{argsh1} ch(t)\, dt \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t}}{2} + t - \frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^{argsh1} \\ &= ..... \end{aligned}$$

• *calcul de L_1 : Posons, comme il a été indiqué, $x = \tan(\frac{t}{2})$ ($\Leftrightarrow t = 2\arctan x$) on a*

$$t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \tan(\frac{\pi}{8}), \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1 \quad et \quad dt = 2\frac{dx}{1+x^2}.$$

Sachant que $\sin t = \dfrac{2x}{1+x^2}$, *on obtient*

$$\begin{aligned} K_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} \; dt &= \int_{\tan(\frac{\pi}{8})}^1 \frac{1}{\frac{2x}{1+x^2}} \; 2\frac{dx}{1+x^2} \\ &= \int_{\tan(\frac{\pi}{8})}^1 \frac{1}{x} \; dx \\ &= \Big[\ln|x|\Big]_{\tan(\frac{\pi}{8})}^1 \\ &= -\ln\big(\tan(\frac{\pi}{8})\big) \\ &= -\ln(\sqrt{2}-1) \\ &= \ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4. *(Intégration par parties)*

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\ln 2, 1]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_2 = \big[xe^x\big]_{\ln 2}^{1} - \int_{\ln 2}^{1} e^x\ dx &= \big[xe^x\big]_{\ln 2}^{1} - \big[e^x\big]_{\ln 2}^{1} \\ &= \big[xe^x - e^x\big]_{\ln 2}^{1} \\ &= 2 - 2\ln 2 \end{aligned}$$

de la même manière

$$\begin{aligned} J_2 = \int_0^{\pi} x\sin x\ dx &= \big[-x\cos x\big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x\ dx \\ &= \big[-x\cos x\big]_0^{\pi} + \big[\sin x\big]_0^{\pi} \\ &= \big[\sin x - x\cos x\big]_0^{\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K_2 = \int_{-1}^{1} \arccos t\ dt &= \big[t\arccos t\big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ &= \big[t\arccos t\big]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ &= \big[t\arccos t\big]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\big[2\sqrt{1-t^2}\big]_{-1}^{1} \\ &= \big[t\arccos t + \sqrt{1-t^2}\big]_{-1}^{1} \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 = \int_1^{e} t^2\ln t\ dt &= \big[\frac{t^3}{3}\ln t\big]_1^{e} - \int_1^{e} \frac{t^3}{3}\frac{1}{t}\,dt \\ &= \big[\frac{t^3}{3}\ln t\big]_1^{e} - \frac{1}{3}\int_1^{e} t^2\,dt \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9}\big[t^3\big]_1^{e} \\ &= \frac{2e^3+1}{9} \end{aligned}$$

Posons $u(t) = t^3$ et $v'(t) = e^t$. Les fonctions u et v sont de la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc par une primitivation par parties, il vient

$$L_2 = \int t^3e^t\ dt = t^3e^t - 3\int t^2e^t\,dt$$

Pour terminer le calcul, nous utilisons la même technique pour calculer la primitive $\int t^2e^t\,dt$.....

Corrigé de l'exercice 5. *(Primitivation de fractions rationnelles)*

1.• Calcul de $\displaystyle\int \frac{2t-1}{(t-1)(t-2)}\,dt$

L'intégrale est définie sur $]-\infty, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{2t-1}{(t-1)(t-2)}$ *donne*

$$\frac{2t-1}{(t-1)(t-2)} = \frac{-1}{t-1} + \frac{3}{t-2}$$

ce qui entraîne que

$$\int \frac{2t-1}{(t-1)(t-2)}\,dt = \int \Big(\frac{-1}{t-1} + \frac{3}{t-2}\Big)\,dt = -\ln|t-1| + 3\ln|t-2| + c(t),$$

où $c(\cdot)$ *est définie par*

$$c(t) = \begin{cases} c_1, & si\ t \in]-\infty, 1[\\ c_2, & si\ t \in]1, 2[\\ c_3, & si\ t \in]2, +\infty[\end{cases} \qquad (c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3)$$

- *Calcul de* $\displaystyle\int \frac{1}{2t^2-2t+1}\,dt$

Cette intégrale indéfinie est définie sur $\mathbb{R}$. *En écrivant le trinôme* $2t^2+2t+1$ *sous sa forme canonique, on obtient*

$$\frac{1}{2t^2-2t+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}\big((2t-1)^2+1\big)} = \frac{2}{(2t-1)^2+1}$$

ce qui implique que (effectuer le changement de variable $u = 2t-1$ *si nécessaire)*

$$\int \frac{1}{2t^2-2t+1}\,dt = \arctan(2t-1) + c,$$

où c *est constante réelle.*

2. • *Calcul de* $\displaystyle\int \cos^2 t\ dt$

En linéarisant $\cos^2 t$ *on obtient* $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ *ce qui implique que*

$$\int \cos^2 t\ dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\ dt = \frac{1}{2}t + \frac{\sin(2t)}{4} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

- *Calcul de* $\displaystyle\int \tan^3 t\ dt$

L'intégrale $\displaystyle\int \tan^3 t\ dt$ *est définie sur* $D_{\tan}$ [1] *l'ensemble de définition de la fonction* tan *et*

$$\begin{aligned} \int \tan^3 t\ dt = \int \tan^2 t \tan t\ dt &= \int (1+\tan^2 t)\tan t - \tan t\ dt \\ &= \int (1+\tan^2 t)\tan t\, dt - \int \tan t\ dt \\ &= \frac{1}{2}\tan t - \ln|\cos t| + c(t), \end{aligned}$$

ou $c(\cdot)$ *est constante sur chacun des intervalles qui composent* $D_{\tan}$.

- *Calcul de* $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 t}\ dt$

---

1. $D_{\tan} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$

Aucune règle de Bioche n'est appliquable, mais en remarquant que $\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$, *on peut écrire*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^4 t}\, dt &= \int (1+\tan^2 t)^2\, dt \\
&= \int (1+\tan^2 t) + (1+\tan^2 t)\tan^2 t\, dt \\
&= \tan t + \frac{1}{3}\tan^3 t + c(t)
\end{aligned}$$

ou $c(\cdot)$ *est constante sur chacun des intervalles qui composent* $D_{\tan}$.

3. • *Calcul de* $\displaystyle\int \frac{\cos t}{1+\cos t}\, dt$

L'intégrale est définie sur $D = \{t \in \mathbb{R} / \cos t \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Aucune règle de Bioche ne s'appliquant, nous sommes conduit à effectuer le changement de variable $x = \tan \frac{t}{2}$. *On a* $\cos t = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ *et* $dt = \dfrac{2dx}{1+x^2}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. *Sur* $]-\pi + 2n\pi, \pi + 2n\pi[$, *on a*

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos t}{1+\cos t}\, dt &= \int \frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{1+\frac{1-x^2}{1+x^2}}\, \frac{2dx}{1+x^2} \\
&= \int \frac{1-x^2}{1+x^2}\, dx \\
&= \int -1 + \frac{2}{1+x^2}\, dx \\
&= -x + 2\arctan x + C_n, \qquad C_n \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos t}{1+\cos t}\, dt &= -\tan\frac{t}{2} + 2\arctan(\tan\frac{t}{2}) + C_n \\
&= t - \tan\frac{t}{2} + C_n
\end{aligned}$$

• *Calcul de* $\displaystyle\int \frac{1}{\sin t + \sin 2t}\, dt$

Posons $\omega(t) = \dfrac{1}{\sin t + \sin 2t}\, dt$, *cet élément différentiel vérifie*

$$\omega(-t) = \omega(t)$$

donc d'après les règles de Bioche (ou comme il a été indiqué) on effectue le changement de variable en posant $x = \cos t$.

On a $dx = -\sin t\, dt$ *et puisque* $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$, *alors*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin t + \sin 2t}\, dt &= \int \frac{1}{\sin t(1+2\cos t)}\, dt \\
&= \int \frac{1}{\sin^2 t(1+2\cos t)}\, \sin t\, dt \\
&= \int \frac{1}{(x^2-1)(1+2x)}\, dx
\end{aligned}$$

or
$$\frac{1}{(x^2-1)(1+2x)} = \frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{4}{3(1+2x)}$$
par conséquent
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin t + \sin 2t}\, dt &= \int \Big(\frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{4}{3(1+2x)}\Big)\, dx \\ &= \frac{\ln|x-1|}{6} + \frac{\ln|x+1|}{2} - \frac{2\ln|2x+1|}{3} \\ &= \frac{\ln(1-\cos t)}{6} + \frac{\ln(1+\cos t)}{2} - \frac{2\ln|2\cos t+1|}{3} + c.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 6. *(intégrales et ordre)*
1) Les fonctions $x \mapsto 1$ *et* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *sont continues et positives et pour tout* x *dans* $[a,b]$*, on a* $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{x}$ *et par suite*
$$\frac{1}{b}\int_a^b dx \leq \int_a^b \frac{dx}{x}$$
ce qui implique, puisque $0 < a < b$*, que*
$$\int_a^b \frac{dx}{x} \geq \frac{b-a}{b} > 0.$$

D'autre part, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Shwarz (pour $f(x) = 1$ *et* $g(x) = \dfrac{1}{x}$*), on obtient*
$$\begin{aligned}\left(\int_a^b \frac{dx}{x}\right)^2 &\leq \int_a^b \frac{dx}{x^2}\int_a^b 1^2 dx \\ &\leq \Big[\frac{-1}{x}\Big]_a^b \big[x\big]_a^b \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{ab}\end{aligned}$$

il en résulte que
$$\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$
2)i) Soit $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq 2$ *et* $x \in [0,1]$*, on a* $-2 \leq -2x \leq 0$ *et la fonction* exp *est croissante donc* $0 < e^{-2} \leq e^{-2x} \leq 1$*, par suite*
$$0 \leq x^{n-2}e^{-2x} \leq x^{n-2}$$

ii) En appliquant la propriété d'intégrale et l'ordre sur l'inégalité établie dans la question i) on obtient
$$0 \leq \int_0^1 x^{n-2}e^{-2x}\, dx \leq \int_0^1 x^{n-2}\, dx$$
ce qui donne
$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{n-1}.$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n-1}=0$, *donc d'après le théorème de comparaison des limites*

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=0$$

iii) Posons $u=x^{n-1}$ *et* $v'=e^{-2x}$, *par une intégration par parties, on obtient*

$$\begin{aligned}U_{n+1}&=\int_0^1 x^{n-1}e^{-2x}\,dx\\&=\big[-\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-2x}\big]_0^1+\frac{1}{2}(n-1)\int_0^1 x^{n-2}e^{-2x}\,dx\\&=-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{2}(n-1)U_n\end{aligned}$$

qui s'écrit

$$(n-1)U_n=2U_{n+1}+\frac{1}{e^2}\,.$$

De cette relation de reccurrence, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}(n-1)U_n=\frac{1}{e^2}\,.$$