Université My Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique
Année Universitaire 2020-2021

Série 2 (mécanique quantique SMP4)

Exercice 1(examen SMP4-2020)

1. Justifier pourquoi une fonction d'onde du type : $Ce^{i(kx-\omega t)}$(onde plane) ne peut pas être associée à une particule matérielle.

2. Montrer que la superposition de deux ondes planes de même amplitude et de vecteurs d'onde voisins k_1 et k_2 ne peut pas être aussi associée à une telle particule. Considérer l'instant t=0 dans cette démonstration et poser :

$$\boldsymbol{k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}}$$

$$\Delta \boldsymbol{k = k_2 - k_1}$$

3. Quelle est la solution acceptable physiquement pour disposer d'une onde associée à la particule matérielle.

4. Que signifie la vitesse de groupe ?

Exercice 2 : paquet d'onde relation d'incertitude.

1-Donner la forme générale de la fonction d'onde d'une particule.

2- La fonction d'onde cette particule est donnée à l'instant t=0 par :

$$\psi(x, 0) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|p|}{p_0}} e^{i\frac{px}{\hbar}} dp$$

Où p_0 est une constante positive et N la constante de normalisation.

a-Quelle est la transformée de Fourier $\varphi(p)$ de$\psi(x, 0)$**.**

b-Donner l'interprétation physique de $|\psi(x, 0)|^2$ et $|\varphi(p)|^2$.

c-Calculer $\psi(x, 0)$ et donner l'allure de $|\psi(x, 0)|^2$ et $|\varphi(p)|^2$

d-Supposons que $|\psi(x, 0)|^2$ et $|\varphi(p)|^2$ ne prennent des valeurs appréciables que dans les intervalles respectifs Δx et Δp. que peut-on dire de produit $\Delta x \Delta p$.

3-Quelle est la probabilité $\mathcal{P}(p_1,0)$ pour qu'une mesure de l'impulsion effectuée à l'instant t=0, donne un résultat compris entre $-p_1$ et p_1.

4-Donner la fonction d'onde $\psi(x,t)$ de cette particule à l'instant t. que devient la probabilité $\mathcal{P}(p_1,t)$ si la mesure est effectuée à l'instant t. Interprétation.

<u>Exercice 3: Evolution d'un paquet d'ondes gaussien</u>

On considère une particule libre de masse m que l'on décrit par un paquet d'ondes (à une dimension) défini par :

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k_x)\, e^{i\left[\, k_x . x - \omega(k_x) . t\right]}\, dk_x$$

1-Montrer que $\Psi(x,t)$ est solution de l'équation de Schrödinger.

On suppose que $g(k_x)$ est une gaussienne centrée sur k_{x0} :

$$g(k_x) = A.\exp[a^2(k_x - k_{x_0})^2]/4$$

$$A = \frac{\sqrt{a}}{(2m)^{3/2}}$$

avec a homogène à une distance.

2-Montrer que la probabilité de présence de la particule est indépendante de temps.

3-En utilisant la forme ci-dessus de $g(k_x)$; on obtient, après intégration, l'expression suivante de $\Psi(x,t)$

$$\Psi(x,t) = \left[\frac{2a^2}{\pi\alpha(t)}\right]^{\frac{1}{4}} \mathbf{exp}\left(\frac{\varphi^2(x,t)}{Z(t)}\right)$$

Avec

$$\alpha(t) = a^4 + \frac{4\hbar t^2}{m^2} \qquad Z(t) = a^2 + i\,\frac{2\hbar t}{m} \qquad \varphi(x,t) = x - \frac{\hbar k_{x_0}\, t}{m}$$

Calculer la densité de probabilité.

4-Calculer la vitesse de groupe Vg et la vitesse de phase V_φ.

5-Comparer la vitesse de groupe Vg à la vitesse de phase V_φ et à la vitesse V de la particule. Conclure.