Université M. Ismail – Faculté des Sciences – Département de Mathématiques

Epreuve d'Algèbre 6 - SMA -S4 / Session Ordinaire 2019-2020

Durée de l'épreuve 1h. Aucun document autorisé. Les Portables et Calculatrices sont strictement interdits.

Barème approximatif : Ex-1 (8pts), Ex-2 (13pts), Bonus (2pts).

Exercice 1. (Rappel. Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe G dont la loi est notée multiplicativement. On dit que G est le produit direct (interne) de H par K si

$$H \cap K = \{e\}, \quad \forall h \in H, \forall k \in K, hk = kh \quad \text{et } G = HK.)$$

1. Soit H et K des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$, distincts de $\{0\}$. Montrer que $(\mathbb{Z}, +)$ n'est pas produit direct (interne) de H et K.
2. Soit G un groupe d'ordre 4 dont tous les éléments distincts de l'élément neutre e sont d'ordre 2 (i.e. $\forall x \in G\backslash\{e\}, x^2 = e$). Soit H et K deux sous-groupes distincts (i.e. $H \neq K$) et propres de G (i.e. $H, K \neq \{e\}$ et $H, K \neq G$).
   Montrer que G est le produit direct (interne) de H par K (on pourra utiliser les résultats vus en TD).
3. Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. Montrer que :
   - (a) Si $H \cap K = \{e\}$ alors tout élément de HK s'écrit d'une façon unique sous la forme hk, avec $h \in H$ et $k \in K$.
   - (b) Si $H \cap K = \{e\}$ et H, K sont finis alors HK est fini et $Card(HK) = |H|\,|K|$.
     Question bonus : En supposant que G est un groupe fini d'ordre pq, où p est premier et $p > q$, montrer que G a au plus un sous-groupe d'ordre p.
   - (c) Si G est le produit direct (interne) de H par K alors G est isomorphe au groupe produit $H \times K$.

Exercice 2. Soit G un groupe et p un nombre premier. On dit que G est un $p-$groupe (ou un groupe p-primaire) si tout élément de G a pour ordre une puissance de p.

1. Vérifier que :
   (a) $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ est un 2-groupe,
   (b) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ n'est pas un p-groupe. Qu'en est-il de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$?
   (c) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ est un 2-groupe.
2. Soit G un groupe cyclique d'ordre n et p un nombre premier. Montrer que :
   G est un p-groupe si et seulement si n est une puissance de p.
3. Montrer que tout sous-groupe d'un p-groupe est un p-groupe.
4. Soit G et G' deux p-groupes. Montrer que $G \times G'$ est un p-groupe.
5. — (a) Montrer que l'image homomorphe d'un p-groupe est un p-groupe.
   — (b) Soit G un p-groupe et R une relation d'équivalence compatible avec la loi de G. Montrer que le groupe quotient G/R est un p-groupe.
6. Soit $f : G \to G'$ un homomorphisme de groupes. Montrer que si $Kerf$ et $G/Kerf$ sont des p-groupes alors G est un p-groupe.