Université M. Ismail – Faculté des Sciences – Département de Mathématiques

Epreuve d'Algèbre 6 - SMIA -S4 / Session de rattrapage 2019-2020

Durée de l'épreuve 1h. Aucun document autorisé.

Questions de Cours.

1. Quels sont, dans un groupe, les éléments d'ordre 1 ?
2. Si G et G' sont deux groupes finis de même ordre, sont-ils isomorphes ?
3. Montrer que tout groupe fini d'ordre un nombre premier p est cyclique.

Exercice 1. Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini d'ordre n. Soit $a \in G$, on note $o(a)$ l'ordre de a.

1. Soit f un endomorphisme de G.
   Montrer que f est un automorphisme de G si et seulement si $o(x) = o(f(x)), \forall x \in G$.
2. Soit $a, b \in G$, montrer que $o(bab^{-1}) = o(a)$ et $o(ab) = o(ba)$.
3. Montrer que si a est l'unique élément d'ordre 2 de G alors a appartient au centre $Z(G)$ de G.

Exercice 2.

1. Soit $(G, \cdot)$ un groupe et H un sous-groupe de G. Soit R la relation d'équivalence définie sur G par $xRy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$. Montrer que si G est abélien, l'ensemble quotient G/R, noté G/H, muni de la loi $\bar{\cdot}$, définie par $\overline{x} \,\bar{\cdot}\, \overline{y} = \overline{xy}$ est un groupe. Si on suppose de plus que G est d'ordre fini, donner, sans preuve, la relation liant l'ordre de G et l'ordre de G/H.
2. Parmi les groupes suivants, lesquels sont cycliques : $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$? Justifier la réponse.
3. On considère le groupe **additif** abélien $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
   — (a-) Soit les sous-groupes de G, $H_1 = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{2})\}$ et $H_2 = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{2})\}$.
      (i-) Déterminer le groupe G/H_1 et montrer qu'il est cyclique.
      (ii-) Déterminer le groupe G/H_2. Montrer qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
      (iii-) Que peut-on conclure ?
   — (b-) Donner deux sous-groupes, H et K, d'ordre 4 du groupe G tel que H est isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ et K est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$. Sans déterminer les groupes G/H et G/K, montrer qu'ils sont isomorphes.
4. Soit G un groupe abélien et H, K deux sous-groupes de G.
   Si H est isomorphe à K, G/H est-il isomorphe à G/K ? Qu'en est-il de la réciproque ? (Indication : utiliser la 3-ème question).
5. Soit G un groupe cyclique d'ordre n et H, K deux sous-groupes de G.
   Montrer que H est isomorphe à K si et seulement si G/H est isomorphe à G/K.