Contents

Chapter 1

Calcul d'intégrales et de primitives

Chapter 2

Équations différentielles

Les équations différentielles modélisent beaucoup de problèmes issus de la physique (mécanique du solide, élétrostatique...).

Une équation différentielle est une équation dans laquelle interviennent la fonction inconnue et ses dérivées successives. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation de la fonction inconnue.

La forme générale d'une équation différentielle d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) d'inconnue la fonction y de la variable t est

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Ainsi, une équation différentielle d'ordre 1 est une relation où interviennent une fonction et sa dérivée première qui peut prendre la forme

$$y' = f(t, y).$$

Résoudre une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions qui vérifient la relation sur un intervalle donné. Dans certain cas simples, on pourra exprimer la ou les solutions par des formules faisant intervenir les fonctions usuelles.

Dans ce cours, nous nous intéressons aux:

1. équations différentielles du premier ordre à variables séparées.
2. équations différentielles linéaires du premier ordre .
3. équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants.

2.1 Équations différentielles du premier ordre à variables séparées

Définition 2.1.1. *Une équation différentielle du premier ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme:*

$$y' \cdot f(y) = g(x) \tag{2.1}$$

avec f et g sont des fonctions continues sur l'intervalle I.

Méthode de Résolution: Une telle équation se résout par calcul de primitives. En effet, si F et G sont des primitives respectives de f et g, alors

$$\big(F(y(x))\big)' = y' \cdot F'(y(x)) = y' \cdot f(y(x))$$

l'équation $y' \cdot f(y) = g(x)$ peut donc s'écrire

$$\big(F(y(x))\big)' = \big(G(x)\big)'$$

ce qui équivaut à l'égalité

$$F(y(x)) = G(x) + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Si F possède une fonction réciproque, on en déduit que la solution s'écrit

$$y(x) = F^{-1}(G(x) + c)$$

qui dépend de la constante c.
Plus précisement, pour la résolution de (2.1) on se ramène à deux intégrations:

$$\begin{aligned} y' \cdot f(y) = g(x) \Rightarrow \quad & f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \\ \Rightarrow \quad & f(y)dy = g(x)dx \\ \Rightarrow \quad & \int f(y)dy = \int g(x)dx, \end{aligned}$$

Exemple 1 Résoudre l'équation différentielle $\qquad x^2 y' = e^{-y}$.
Cette équation du premier ordre à variables séparées peut s'écrire

$$y' \cdot e^y = \frac{1}{x^2}$$

En intégrant sur $]0, +\infty[$ (ou bien sur $]-\infty, 0[$) et en remarquant que $\big(e^{y(x)}\big)' = y'(x) \cdot e^{y(x)}$, il vient

$$e^y = \frac{-1}{x} + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

donc sur un intervalle où $\dfrac{-1}{x} + c > 0$, la solution est donnée par

$$y(x) = \ln(\frac{-1}{x} + c).$$

Exemple 2 Résoudre l'équation différentielle $\qquad (1 + x^2)y' + 3xy = 0$.
La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est continue ne s'annullant pas sur $\mathbb{R}$. Donc cette équation admet des solutions sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned} (1 + x^2)y' + 3xy = 0 \Rightarrow \quad & y' = \frac{-3x}{1 + x^2}y \\ \Rightarrow \quad & \frac{dy}{y} = -\frac{3x}{1 + x^2} \\ \Rightarrow \quad & \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-3x}{1 + x^2} \\ \Rightarrow \quad & \ln(|y|) = -\frac{3}{2}\ln(1 + x^2) + \mathrm{C} \\ \Rightarrow \quad & y = \pm e^{\mathrm{C}} \frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}, \qquad (C \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Réciproquement on vérifie que $y = \pm e^{\mathrm{C}} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}, \qquad (C \in \mathbb{R})$ est une solution de l'équation.
Donc, la solution générale de l'équation différentielle $(1 + x^2)y' + 3xy = 0$ est

$$y(x) = \frac{K}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}, \qquad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}.$$

2.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 2.2.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $u, v, w : I \to \mathbb{R}$ des applications continues, J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $J \subset I$ et $y : J \to \mathbb{R}$ une application.*
On dit que y est une solution sur J de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$u(x)y' + v(x)y = w(x) \tag{2.2}$$

si et seulement si $\begin{cases} y \text{ est dérivable sur } J \\ \forall x \in J, \quad u(x)y'(x) + v(x)y(x) = w(x). \end{cases}$

- *On note $\mathcal{S}_J$ l'ensemble de solutions de (2.2) sur J.*
- *On appelle équation sans second membre associée à l'équation (2.2), l'équation différentielle:*

$$u(x)y' + v(x)y = 0 \tag{2.3}$$

Remarque L'équation (2.2)
1) est du premier ordre car parmi les dérivées successives de y, seule la dérivée première intervient.
2) est linéaire car elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue y et par rapport à sa dérivée y'.
Exemples Les équations différentielles suivantes sont linéaires:

$$(E_1) \qquad y' - y = 1 - x$$
$$(E_2) \qquad (1 + x^2)y' + 4xy = x$$
$$(E_3) \qquad (\sin^3 x)y' - 2(\cos x)y = 0.$$

Léquations différentielles suivantes sont non linéaires:

$$(E_4) \qquad yy' + xy = 2x^2 - 1$$
$$(E_5) \qquad xy' + y = y^2 \ln x.$$

Pour que l'on puisse mettre (2.2) sous forme normale (c.a.d que le coefficient de y' est égal à 1 au lieu de $u(x)$), il faut et il suffit que la fonction u ne s'annulle pas sur l'intervalle I. Dans ce cas (2.2) équivaut à

$$y' = g(x)y + h(x) \tag{2.4}$$

avec $g(x) = -\dfrac{v(x)}{u(x)}$ et $h(x) = \dfrac{w(x)}{u(x)}$.
L'équation suivante sans second membre associée à (2.4) est dite équation homogène :

$$y' = g(x)y. \tag{2.5}$$

La résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre fait appel au théorème suivant:

Théorème 2.2.1 (fondamental)**.** *La solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre* (2.2) *est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre* (2.3) *et d'une solution particulière de l'équation complète* (2.2).

Une méthode pour résoudre (2.2) consiste donc à:

1. Résoudre l'équation sans second membre (homogène).
2. Rechercher d'une solution particulière de (2.2).
3. Déduire la solution générale = solution particulière + solution de l'équation homogène

1– Résolution de l'équation sans second membre:

L'équation linéaire sans second membre (ou homogène) est à variables séparées: Sur un intervalle où la fonction u ne s'annulle pas on a

$$\begin{aligned} u(x)y' + v(x)y = 0 \Rightarrow \quad & y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{v(x)}{u(x)}y(x) \\ \Rightarrow \quad & \frac{dy}{y} = -\frac{v(x)}{u(x)}dx \\ \Rightarrow \quad & \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{v(x)}{u(x)}dx \\ \Rightarrow \quad & \ln|y| = -\int \frac{v(x)}{u(x)}dx + \text{cte} \end{aligned}$$

On pose $A(x) = \displaystyle\int \frac{v(x)}{u(x)}\, dx$, donc $\ln|y| = -A(x) + \text{cte}$. Donc, $y = e^{\text{cte}}e^{-A(x)}$ et par suite $y = e^{\text{cte}}e^{-A(x)}$. Par conséquent, la solution générale de l'équation sans second membre (2.3) est donnée par

$$y_h(x) = Ce^{-A(x)}; \qquad C \in \mathbb{R}.$$

En particulier, la solution générale de l'équation homogène (2.5) s'écrit sous la forme

$$y(x) = ke^{G(x)}$$

où k est une constante arbitraire et G est une primitive de g sur I.

2– Recherche d'une solution particulière de (2.2):

On cherche alors une solution particulière de (2.2) soit en cherchant une solution évidente soit en utilisant la méthode de la variation de la constante:
Soit y_h la solution générale de l'équation homogène (2.3). Donc, $y_h = Ce^{-A(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$ et

$$A(x) = \int \frac{v(x)}{u(x)}dx.$$

La méthode de variation de la constante consiste à remplacer la constante C par une fonction $C(x)$ et chercher une solution particulière de l'équation avec second membre (2.2) de la forme $y = C(x)e^{-A(x)}$. On calcule la dérivée y' qui est désormais un produit de deux fonctions dérivables. En reportant y et y' dans l'équation (2.2) et en utilisant le fait que $e^{-A(x)}$ est solution de (2.3) on obtient

$$C'(x) = \frac{w(x)}{u(x)}e^{A(x)},$$

ce qui implique

$$C(x) = \int \frac{w(x)}{u(x)}e^{A(x)}\, dx + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$y_p(x) = e^{-A(x)} \int \frac{w(x)}{u(x)}e^{A(x)}\, dx$$

est une solution particulière de (2.2).

3– Solution générale de (2.2)

La solution générale de l'équation avec second membre ou complète (2.2) s'écrit d'après le théorème fondamental:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

C'est à dire

$$y(x) = e^{-A(x)} \int \frac{w(x)}{u(x)} e^{A(x)}\, dx + ke^{-A(x)}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Remarques

1. La méthode de la variation des constantes est due au mathématicien Lagrange.
2. L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre (2.3) est un espace vectoriel de dimension 1.
3. Si le second membre h de l'équation normalisée (2.4) est une combinaison linéaire de plusieurs fonctions $h = \sum_{i=1}^{n} h_i$, on pourra détérminer pour chaque équation $y' = g(x)y + h_i(x)$ une solution particulière y_i puis $y_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i$ est une solution particulière de (2.4). Cette propriété s'appelle le principe de superposition des solutions.

Exemple 1 L'ensemble de solution de l'équation differentielle homogène $y' + ky = 0 \quad (k$ constante) est

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto Ce^{-kx} \quad /C \in \mathbb{R}\}$$

qui est un sous espace vectoriel de l'espace des fonction dérivables de dimension 1.

Cette droite vectorielle est engendré par la fonction $x \mapsto e^{-kx}$.

Exemple 2 Résoudre l'équation linéaire

$$xy' - y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

L'équation admet des solutions sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$ et $I_4 =]1, +\infty[$ et l'équation homogène s'écrit $xy' - y = 0$.

$$\begin{aligned}
xy' - y = 0 \Rightarrow\ & \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\
\Rightarrow\ & \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\
\Rightarrow\ & \ln|y| = \ln|x| + \text{cte} \\
\Rightarrow\ & y_h(x) = C_i \cdot x, \quad \text{avec} \quad C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}$$

Cherchons maintenant une solution particulière sous la forme $y_p = C(x) \cdot x$. Par la méthode de variation de la constante il vient:

$$\begin{aligned}
xy_p' - y_p = \frac{x}{x^2 - 1} \quad \Rightarrow\ & x^2C'(x) + xC(x) - xC(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \\
\Rightarrow\ & C'(x) = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} \\
\Rightarrow\ & C'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \\
\Rightarrow\ & C(x) = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| \\
\Rightarrow\ & y_p = C(x) \cdot x = x(-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1|).
\end{aligned}$$

Donc la solution générale est définie sur les intervalles $I_i, \quad i = 1, \ldots, 4$ par

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_i \cdot x + x(-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1|), \qquad C_i \in \mathbb{R}.$$

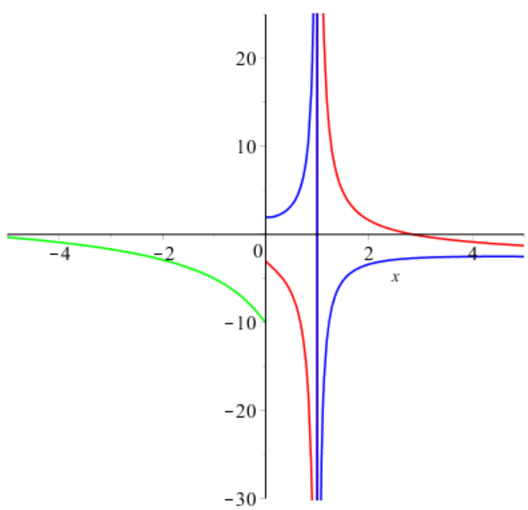
Exemple 3 Résoudre l'équation linéaire

$$(E) \qquad x(1-x)y' - y = x$$

L'équation admet des solutions sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
L'équation sans second membre admet comme solution $y = \dfrac{Cx}{x-1}$.
La constante C, rendue variable, vérifie $C'(x) = \dfrac{1}{x}$ Soit $y(x) = -\ln|x| + k$. Ainsi les solution de (E) sont définies par

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x-1}\ln(-x) + k_1\dfrac{x}{x-1}, & \text{si } x \in]-\infty, 0[; \\ \dfrac{x}{x-1}\ln(x) + k_2\dfrac{x}{x-1}, & \text{si } x \in]0, 1[; \\ \dfrac{x}{x-1}\ln(x) + k_3\dfrac{x}{x-1}, & \text{si } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

k_1, k_2 et k_3 sont des constantes réelles.



Solutions non accordées en 0 et en 1

2.3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 2.3.1. *Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est toute équation différentielle de la forme*

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{2.6}$$

où a et b sont deux réels et f une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
L'équation

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2.7}$$

est appellée équation sans second membre (ou homogène) associée à (2.6).
L'équation

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{2.8}$$

s'appelle l'équation caractéristique associée.

La résolution de l'équation complète (2.6) se fait par la résolution de l'équation sans second membre et par la recherche d'une solution particulière et plus précisement nous avons le théorème suivant:

Théorème 2.3.1. *La solution générale de* (2.6) *est la somme d'une slution particulière de* (2.6) *et de la solution générale de* (2.7).

Résolution de l'équation sans second membre
Le théorème suivant résume la résolution de l'équation sans second membre (2.7)

Théorème 2.3.2. *Soit* $\Delta = a^2 - 4b$ *le discriminant de l'équation caractéristique* (2.8).

1er **cas:** $\Delta > 0$, *l'équation* (2.8) *admet deux solutions réelles distinctes* r_1 *et* r_2. *Alors les solutions de* (2.7) *sont*

$$y : x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

2^e **cas:** $\Delta = 0$, *l'équation* (2.8) *admet une solutions réelle double* $-\dfrac{a}{2}$. *Alors les solutions de* (2.7) *sont*

$$y : x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{-\frac{a}{2}x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

3^e **cas:** $\Delta < 0$, *l'équation* (2.8) *admet deux solutions complexes conjugées. Alors les solutions de* (2.7) *sont*

$$y : x \mapsto e^{-\frac{a}{2}x}\big(A\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x) + B\sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x)\big), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

que l'on peut encore écrire sous la forme

$$y : x \mapsto Ce^{-\frac{a}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x - \varphi)$$

C represente l'amplitude et φ *le déphasage.*

Remarque L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre homogène (2.7) est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

Exemples

1) Résoudre l'équation $y'' + 3y' - 4y = 0$:
L'équation caractéristique est : $r^2 + 3r - 4 = 0$ dont le $\Delta = (3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles $r_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$. Donc, la solution générale est

$$y_h = Ae^x + Be^{-4x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

2) Résoudre l'équation $y'' - 4y' + 4y = 0$:
L'équation caractéristique est : $r^2 - 4r + 4 = 0$ dont le $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine double $r = \frac{4}{2} = 2$. Donc, la solution générale est

$$y_h = (Ax + B)e^{2x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

3) Résoudre l'équation $y'' + 4y' + 5y = 0$:
L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 5 = 0$ dont le $\Delta = (4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 = (2i)^2 < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{-4+2i}{2} = -2+i$ et $r_2 = \overline{r}_1 = -2 - i$. Dans ce cas, la solution générale est

$$y_h = e^{-2x}\Big(A\cos(x) + B\sin(x)\Big) = Ce^{-2x}\cos(x - \varphi), \qquad A, B, C, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Un cas particulier important
beaucoup d'équations differentielles rencontrées en physique sont de la forme

$$y'' + by = 0$$

- si $b > 0$ la solution générale est $y : x \mapsto \alpha \sin(\sqrt{b}x) + \beta \cos(\sqrt{b}x)$

- si $b < 0$ la solution générale est $y : x \mapsto \alpha sh(\sqrt{-b}x) + \beta ch(\sqrt{-b}x)$

Recherche d'une solution particulière
On recherche une solution particulière de (2.6) en tenant compte de la forme du deuxième membre f, si on n'aboutit pas on peut utiliser la méthode de variation des constantes (il y en a deux).

La méthode de variation des constantes sera détaillée avec un exemple dans la partie "Complément" vers la fin du chapitre.

Souvent, nous tenons compte de la forme du deuxième membre f suivant les cas particuliers suivants:

•1^{er} **cas:** f est un polynôme de degré n. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme dont le degré est

$$\begin{cases} n, & \text{si } b \neq 0, \\ n+1, & \text{si } b = 0 \text{ et } a \neq 0, \\ n+2, & \text{si } a = b = 0. \end{cases}$$

•2^e **cas:** $f(x) = e^{\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme

$$\begin{cases} \beta e^{\alpha x}, & \text{si } \alpha \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique} \\ \beta x e^{\alpha x}, & \text{si } \alpha \text{ est racine simple de l'équation caractéristique} \\ \beta x^2 e^{\alpha x}, & \text{si } \alpha \text{ est racine double de l'équation caractéristique.} \end{cases}$$

où $\beta \in \mathbb{R}$.

•3^e **cas:** $f(x) = P(x)e^{\alpha x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme de degré n. On cherche une solution particulière sous la forme

$$\begin{cases} Q(x)e^{\alpha x}, & \text{si } \alpha \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique} \\ xQ(x)e^{\alpha x}, & \text{si } \alpha \text{ est racine simple de l'équation caractéristique} \\ x^2Q(x)e^{\alpha x}, & \text{si } \alpha \text{ est racine double de l'équation caractéristique.} \end{cases}$$

où Q est un polynôme de degré n.

•4^e **cas:** $f(x) = P(x)\cos(\alpha x), \quad \alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme. On peut chercher directement une solution particulière de la forme

$$S(x)\cos(\alpha x) + R(x)\sin(\alpha x)$$

où S et R sont deux polynômes à coefficients réels. Une autre manière consiste à écrire f comme la partie réelle de $P(x)e^{i\alpha x}$ et puis on cherche une solution particulière sous la forme

$$g(x) = Q(x)e^{i\alpha x}$$

en utilisant la même méthode que dans le cas précedent où Q est un polynôme à coefficients complexes de même degré que P. Par suite $Re(g)$ est la solution particulière envisagée.

•5^e **cas:** $f(x) = P(x)\sin(\alpha x)$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme. on cherche une solution particulière sous la forme

$$h(x) = Q(x)e^{i\alpha x}$$

et on prend comme dans le 4^e cas $Im(h)$.

Exemples

1) Résoudre l'équation

$$y'' - 5y' + 6y = x^2 + 1, \qquad (E_1)$$

On commence par résoudre l'équation homogène associée $y'' - 5y' + 6y = 0$. l'équation caractéristique associée est : $r^2 - 5r + 6 = 0$ de $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$, admettant deux racines réelles $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$ Donc, la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h = Ae^{2x} + Be^{3x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Le second membre est un polynôme de degré 2 tel que r_1 et r_2 n'en sont pas des racines. Une solution particulière de (E_1) est un polynôme Q de degré 2, cad $Q(x) = ax^2 + bx + c$. En reportant dans (E_1), on obtient

$$y_p'' - 5y_p' + 6y = 6ax^2 + 2(3b - 5a)x + 6c - 5b + 2a = x^2 + 1.$$

Par identification, on obtient $a = \frac{1}{6}, b = \frac{5}{18}$ et $c = \frac{37}{108}$, par conséquent,

$$y_p(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{37}{108}.$$

Donc, les solutions de (E_1) sont

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{37}{108}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

2) Résoudre l'équation

$$y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}, \qquad (E_2)$$

L'équation caractéristique est : $r^2 - 2r - 3 = 0$ et $\Delta = 16 > 0$, alors $r_1 = -1$ et $r_2 = 3$. Donc, la solution générale de l'équation homogène est donnée par:

$$y_h = Ae^{-x} + Be^{3x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Le second membre est de la forme $e^{-x}P(x)$. Or -1 est une racine simple de l'équation caractéristique, donc nous nous sommes amené à chercher une solution particulière de la forme

$$y_p = x(ax + b)e^{-x}$$

en calculant $y_p' = e^{-x}(-ax^2 + (2a-b)x + b)$ puis $y_p'' = e^{-x}(ax^2 + (-4a+b)x + 2b - 2a)$ et en reportant dans l'équation (E_2), on obtient $a = \frac{3}{8}$ et $b = \frac{3}{16}$, par conséquent

$$y_p(x) = x(\frac{3}{8}x + \frac{3}{16})e^{-x}.$$

Donc, la solution générale de (E_2) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} + x(\frac{3}{8}x + \frac{3}{16})e^{-x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

3) Résoudre l'équation

$$y'' + 9y = e^{-x}\cos x, \qquad (E_3)$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 9 = 0$, elle admet deux racines complexes $r_1 = 3i$ et $r_2 = -3i$. Donc, la solution générale de l'équation homogène est donnée par:

$$y_h = A\cos(3x) + B\sin(3x); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

En tenant compte la forme du second membre qui est en fonction de $e^{(-1+i)x}$ et $e^{-(-1+i)x}$ où $-1+i$ et $1-i$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique, alors une solution particulière s'écrit sous la forme

$$y_p = e^{-x}\bigg(a\cos(x) + b\sin(x)\bigg)$$

on reporte dans l'équation (E_3), on obtient

$$(2b + 9a - 1)\cos x + (9b - 2a)\sin x = 0.$$

Ceci implique, en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $a = \frac{9}{85}$ et $b = \frac{-2}{85}$
donc, une solution particulière de (E_3) est

$$y_p(x) = e^{-x}\bigg(\frac{9}{85}\cos(x) + \frac{2}{85}\sin(x)\bigg); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (E_3) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) + e^{-x}\bigg(\frac{9}{85}\cos(x) - \frac{2}{85}\sin(x)\bigg); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

3) Résoudre l'équation

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} + \sin x, \qquad (E_4)$$

l'équation caractéristique admet une solution double -1, donc la solution générale de (E_4) est

$$y_h = (\alpha x + \beta)e^{-x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Une solution particulière de l'équation $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ s'écrit sous la forme $y_{p_1} = ax^2e^{-x}$ ce qui donne en reportant dans l'équation $a = \dfrac{1}{2}$ ainsi

$$y_{p1} = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

Une solution particulière de l'équation $y'' + 2y' + y = \sin x$ s'écrit sous la forme $y_{p_2} = b\sin x + c\cos x$ ce qui donne en reportant dans l'équation $b = 0$ et $c = \frac{-1}{2}$ ainsi

$$y_{p_2} = \frac{-1}{2}\cos x$$

par le principe de superposition des solutions $y_{p_1} + y_{p_2}$ est une solution particulière de l'équation (E_4).
La solution générale de l'équation complète (E_4) est définie par

$$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

N.B: Notons enfin que si f est une combinaison linéaire de plusieurs fonctions de types variés $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$, on pourra utiliser le principe de superposition des solutions comme pour le cas des équations du premier ordre (voir la remarque 2.2).

2.4 Complément (facultatif)

Pour chercher une solution particulière de (2.6) sans tenir en compte la forme du second membre, on peut en général appliquer la méthode de variation des constantes:
Soit y_h la solution de l'équation sans second membre (2.7) Donc, $y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, où y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de(2.7)
La méthode de variation de la constante consiste à remplacer les deux constantes A et B par des fonctions $A(x)$ et $B(x)$ et chercher une solution particulière de (2.6) de la forme

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x).$$

pour que A'' et B'' n'apparaissent pas dans le calcul de y'', on impose la condition suivante

$$A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0$$

Il reste alors

$$y_p'(x) = A(x)y_1'(x) + B(x)y_2'(x).$$

On calcule ensuite y'', on reporte dans l'équation (2.6) et on utilise le fait que y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (2.7) on trouve que

$$A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x).$$

On a donc à résoudre le système suivant dont les inconnues sont $A'(x)$ et $B'(x)$

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0, \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Comme y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, alors le déterminant

$$w = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_1'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0$$

le système admet alors une unique solution

$$(A'(x), B'(x)) = (\frac{-f(x)y_2(x)}{w}, \frac{f(x)y_1(x)}{w}).$$

On obtient donc les fonctions A et B en intégrant A' et B'.
Par suite, la solution particulière de (2.6) est

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x).$$

Exemple
Résoudre l'équation $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$, $\qquad (E)$.
L'équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$, est de racine double $r = 1$. Donc, la solution générale de l'équation homogène associée à (E) est donnée par:

$$y_h(x) = (Ax + B)e^x; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p(x) = xA(x)e^x + B(x)e^x, \quad \text{avec} \quad A, B \quad \text{sont deux fonctions dérivables.}$$

On a

$$y_p'(x) = A'(x)xe^x + B'(x)e^x + A(x)(x+1)e^x + B(x)e^x.$$

On impose la condition

$$A'(x)xe^x + B'(x)e^x = 0.$$

On trouve

$$y_p''(x) = A'(x)(x+1)e^x + B'(x)e^x + A(x)(x+2)e^x + B(x)e^x.$$

En remplaà§ant dans l'équation (E), on obtient

$$A'(x)(x+1)e^x + B'(x)e^x = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

On se ramène à résoudre donc le système

$$\begin{cases} A'(x)xe^x + B'(x)e^x = 0, \\ A'(x)(x+1)e^x + B'(x)e^x = \frac{e^x}{1+x^2}. \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} A'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \\ B'(x) = -\frac{x}{1+x^2}. \end{cases}$$

En intégrant, il vient $A(x) = \arctan x$ et $B(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
Donc, une solution particulière de l'équation (E) est donnée par

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\Bigg(2x\arctan x - \ln(1+x^2)\Bigg)e^x.$$

Par conséquent, la solution générale de (E) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax+B)e^x + \frac{1}{2}\Bigg(2x\arctan x - \ln(1+x^2)\Bigg)e^x; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$