UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL جامعة مولاي إسماعيل
FACULTÉ DES SCIENCES كلية العلوم

Département de Mathématiques
Filière : SMPC -S_2-
Année universitaire : 20/21

Corrigé de la série 2 : Équations différentielles

Corrigé de l'exercice 1. *(*Équations à variables séparables*)*

Résolution de (e_1) *:* $y = 0$ *la fonction identiquement nulle sur* $\mathbb{R}$ *est une solution de* (e_1)*. d'autre part, sur chaque intervalle de* $\mathbb{R}$ *où* y *ne s'annulle pas, on peut écrire* $(e_1) \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y^2} = 1$*, ce qui est équivalent, en intégrant, à* $\dfrac{-1}{y} = x + c \qquad (c \in \mathbb{R})$*.*

Finalement l'ensemble des solution de (e_1) *est*

$$\{y = 0 \text{ ou } y = \frac{-1}{x+c} \quad (c \in \mathbb{R})\}$$

Résolution de (e_2) *: En intégrant, il vient*

$$(e_2) \Leftrightarrow 2\sqrt{y} = \arctan x + \lambda$$

ce qui implique que l'ensemble des solution de (e_1) *est*

$$\{y = (\frac{\arctan x}{2} + \lambda)^2 \quad (\lambda \in \mathbb{R})\}$$

Résolution de (e_3) *: Cette équation à variables séparables s'écrit sous la forme*

$$y' = -e^y \cdot e^{-x} \qquad \text{ou} \qquad y' \cdot e^{-y} = -e^{-x}$$

d'où en intégrant sur un intervalle I *de* $\mathbb{R}$*, il vient*

$$e^{-y} = -e^{-x} + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

C *est un réel choisi tel que sur* I *on ait*

$$\forall x \in I, \quad -e^{-x} + C > 0$$

Si $C \leq 0$*, alors* $I = \emptyset$*, par conséquent* $C > 0$*. Dans ce cas*

$$-e^{-x} + C > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > \ln\frac{1}{C}$$

Les solutions de (e_3) *sont les fonctions* y_C *définies sur* $]\ln\frac{1}{C}, +\infty[$ *par*

$$y_C(x) = \ln\big(\frac{1}{C - e^{-x}}\big).$$

Corrigé de l'exercice 2. *(*Équations linéaires d'ordre 1*)*

1) la fonction $x \mapsto 1 + x^2$ *est continue ne s'annullant pas sur* $\mathbb{R}$*. Donc l'équation admet des* *solutions définies sur $\mathbb{R}$. La solution générale de l'équation sans second membre est définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$y_h(x) = \lambda e^{\int \frac{-x}{1+x^2}\,dx} = \lambda e^{\frac{-\ln(1+x^2)}{2}} = \lambda \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ , \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

En Faisant varier la constante $\lambda = \lambda(x)$ et en reportant dans l'équation différentielle complète, il vient

$$(1+x^2)\frac{\lambda'(x)\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x\lambda(x)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} + \frac{x\lambda(x)}{\sqrt{1+x^2}} = 2x^2+1,$$

d'ou $\lambda'(x) = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$ c.à.d que $\lambda(x) = \displaystyle\int \frac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. en effectuant le changement de variable $x = sht$ dans l'intégrale et sachant que $dx = cht\,dt$ on obtient

$$\lambda(x) = \int (2sh^2t+1)\,dt = \int \frac{1}{2}(e^{2t}+e^{-2t})\,dt = \frac{1}{4}(e^{2t}-e^{-2t}) = \frac{1}{2}sh(2t),$$

qui donne

$$\lambda(x) = \frac{1}{2}sh(2\ argsh\ x)$$

par suite, une solution particulière de l'équation est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y_p(x) = \frac{sh(2\ argsh\ x)}{2\sqrt{1+x^2}}$$

en remarquant de plus que $sh(2\ argsh\ x) = 2x\sqrt{1+x^2}$,[1] *il en résulte que*

$$y_p(x) = x$$

est une solution particulière.
Par suite, la solution générale de l'équation différentielle complète est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = y_h + y_p = \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} + x\ , \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

2) On commence par la résolution de l'équation sans second membre $xy' + y = 0$. Sur chacun des intervalles $I_1 = I\!R^{+*}$ et $I_2 = I\!R^{-*}$ l'équation homogène équivaut à $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{-1}{x}$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = \frac{A}{x}\ , \qquad A \in \mathbb{R}.$$

Remarque : *On pourrai appliquer directement les résultats du cours qui donnent la solution générale de l'équation homogène $y' = f(x)y$ sous la forme $y = ke^{\int f(x)\,dx}$, k est une constante réelle arbitraire.*

Résolution sur I_1 : L'équation complète équivaut sur I_1 à

$$xy' + y = \ln x$$

1. Rappel : pour tout t dans $\mathbb{R}$ on a $\mathrm{sh}(2t) = 2\mathrm{sh}(t)\mathrm{ch}(t)$ et $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$

pour achever la résolution, il suffit de chercher une solution particulière et ce par la méthode de variation de la constante. La constante A rendue variable $A(x)$ vérifie $y'(x) = \dfrac{xA'(x) - A(x)}{x^2}$ en reportant dans l'équation complète, on obtient

$$A'(x) = \ln x$$

d'où par une intégration par parties

$$A(x) = x\ln x - x$$

une solution particulière de l'équation est définie sur I_1 par $y_p = \dfrac{A(x)}{x} = -1+\ln x$ La solution générale est définie sur I_1 par :

$$y_1 = y_h + y_p = \frac{A_1}{x} - 1 + \ln x\ , \qquad A_1 \in \mathbb{R}.$$

Résolution sur I_2 : Par la même méthode, on trouve que la solution générale est définie sur I_2 par :

$$y_2 = \frac{A_2}{x} - 1 + \ln(-x)\ , \qquad A_2 \in \mathbb{R}.$$

3) La solution générale de l'équation homogène $y' = -y$ sous la forme $y = \lambda e^{\int -dx} = \lambda e^{-x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$.
Sans utiliser la méthode de la variation de la constante, on peut tenir en compte la forme du second membre qui est le produit d'une fonction exponentielle par une fonction polynomiale de degré 2 et que la fonction exponentielle du second membre (c.à.d e^{2x}) n'est pas la même que celle qui apparaît dans les solutions de l'équation homogène (c.à.d e^{-x}). On cherche donc une solution particulière sous la forme d'un produit de e^{2x} par une fonction polynomiale du même degré 2. c.à.d chercher une solution de la forme

$$y_p = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

en substituant dans l'équation, on obtient

$$(2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c))e^{2x} + (ax^2 + bx + c)e^{2x} = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$$

en identifiant les polynômes, on retrouve les relations reliant les coefficients $3a = 1$, $2a+3b = -2$ et $b + 3c = 2$. Ainsi $a = 1/3$, $b = -8/9$ et $c = 26/27$ et

$$y_p = (\frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{26}{27})e^{2x}$$

est une solution particulière. Par suite la solution générale de l'équation complète est la somme de la solution générale de l'équation homogène et la solution particulière :

$$y(x) = \lambda e^{-x} + (\frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{26}{27})e^{2x}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque : *On peut appliquer la méthode de la variation de la constante on obtient*

$$\lambda'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{3x}$$

soit

$$\lambda(x) = \int (x^2 - 2x + 2)e^{3x}\,dx$$

l'expression de $\lambda(x)$ s'obtient par une intégration par parties appliquée deux fois pour le premier terme... (à faire en exercice)

Corrigé de l'exercice 3. *1) La fonction $x \mapsto 1-x^2$ est continue et ne s'annulle pas sur $]-1,\ 1[$. Les solutions de l'équation sans second membre $(1-x^2)y' - 2xy = 0$ sont définies sur I_1 par*

$$\begin{aligned} y_h(x) &= ke^{\int \frac{2x}{1-x^2}\,dx} \\ &= ke^{-\ln(1-x^2)} \\ &= \frac{k}{1-x^2}\,, \qquad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Déterminons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante : La constante k rendue variable $k(x)$ vérifie en reportant dans (E) :

$$(1-x^2)\frac{k'(x)(1-x^2)+2xk(x)}{(1-x^2)^2} - 2x\frac{k}{1-x^2} = 1$$

soit $k'(x) = 1$ ce qui implique que $k(x) = x$. Par suite, une solution particulière de (E) est définie sur I_1 par

$$y_p(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

La solution générale de (E) est définie sur I_1 par :

$$y_1(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{x+k_1}{1-x^2}\,, \qquad k_1 \in \mathbb{R}.$$

Parmi les solution de (E), il existe une unique fonction, notée g, qui vérifie $g(0) = 1$. En évaluant par 0 dans l'expression de y on obtient $y_1(0) = g(0) = k_1 = 1$. D'ou g est définie sur I_1 par :

$$g(x) = \frac{x+1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}$$

2) Par la même démarche suivie dans la question 1), la solution générale de (E) sur $I_2 =]-\infty,-1[$ est définie par :

$$y_2(x) = \frac{-x+k_2}{x^2-1}\,, \qquad k_2 \in \mathbb{R}.$$

Remarque : *Au point -1, la solution n'est pas définie, plus précisement nous avons*

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty,-1[, & y_2(x) = \dfrac{-x+k_2}{x^2-1}\,, \qquad k_2 \in \mathbb{R}, \\ \forall x \in]-1,1[, & y_1(x) = \dfrac{x+k_1}{1-x^2}\,, \qquad k_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3) Supposons que (E) admet une solution f sur $]-\infty,1[$. Nécessairement il existe deux constantes c_1 et c_2 de $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty,-1[, & f(x) = \dfrac{-x+c_2}{x^2-1}\,, \\ \forall x \in]-1,1[, & f(x) = \dfrac{x+c_1}{1-x^2}\,, \\ 2f(-1) = 1 & \textit{à partir de l'équation} \end{cases}$$

Puisque f est continue en -1, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ existent.
Or une condition nécessaire d'existence de ces limites est

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{-x+c_2}{x^2-1} = 1/2 \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x+c_1}{1-x^2} = 1/2$$

donc $c_1 = 1$ *et* $c_2 = -1$. *D'ou* f *est définie par*

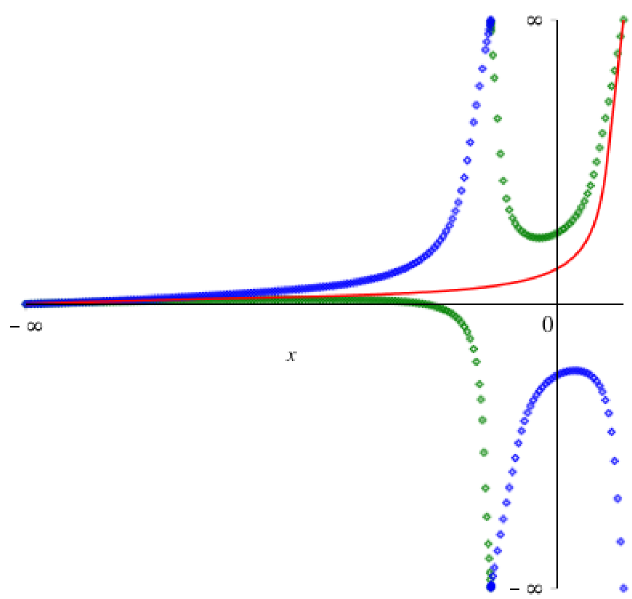
$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1[, \quad f(x) = \dfrac{x+1}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x}, \\ f(-1) = 1/2 \end{cases}$$

Réciproquement, montrons que f *est solution de* (E) *sur* $]-\infty, 1[$. *D'une part,* f *est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur* $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[$. *D'autre part, on a pour* $x \neq -1$

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{2}}{x+1} = \frac{1}{2(1-x)}$$

donc $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \dfrac{1}{4}$, *il en résulte que* f *est dérivable en* -1 *et* $f'(-1) = \dfrac{1}{4}$. *Ainsi* f *est dérivable sur* $]-\infty, 1[$.
f *est solution de* (E) *sur* $]-\infty, -1[$ *et* $]-1, 1[$ *de plus* (E) *est aussi vérifiée pour* $x = -1$. *Par conséquent,* (E) *admet une unique solution sur* $]-\infty, -1[$ *définie par*

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$



le graphe en rouge présente la solution sur]− ∞..1 [

Corrigé de l'exercice 4. Résolution de (E_1) : *L'équation caractéristique associée à* (E_1) *est* $r^2 - 3r + 2 = 0$ *de discriminant* $\Delta = 1$. *Cette équation admet deux racines réelles distinctes* $r_1 = 1$ *et* $r_2 = 2$, *par suite la solution générale de l'équation sans second membre est définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$y_h(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Puisque le second membre de (E_1) *est une fonction polynomiale de degré 3, on cherche une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 3, soit* $y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *ou* a, b, c *et* d *sont des réels à déterminer. En calculant* y_p'' *et* y_p', *en reportant dans* (E_1) *il vient*

$$6ax + 2b - 3(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = x^3$$

et en identifiant les deux polynômes on obtient le système suivant $\begin{cases} 2a = 1, \\ -9a + 2b = 0, \\ 6a - 6b + 2c = 0, \\ 2b - 3c + 2d = 0, \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} a = 1/2, \\ b = 9/4, \\ c = 21/4, \\ d = 45/8 \end{cases}$ *ainsi une solution particulière est donnée par :* $y_p(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{9}{4}x^2 + \dfrac{21}{4}x + \dfrac{45}{8}$.

La solution générale de l'équation avec second membre est définie sur $\mathbb{R}$ *par*

$$y_1(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x} + \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{21}{4}x + \frac{45}{8}\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

<u>Résolution de (E_2) :</u> *L'équation caractéristique associée à* (E_2) *est* $r^2 + r + 1 = 0$ *de discriminant* $\Delta = -3$. *Cette équation admet deux racines complexes conjugées* $r_1 = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $r_2 = \overline{r_1}$, *par suite la solution générale de l'équation sans second membre est définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$y_h(x) = e^{\frac{-x}{2}}\big(\alpha\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \beta\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\big), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

la forme du second membre de (E_2) *conduit à la recherche d'une solution particulière sous la forme* $y_p = a\cos 2x + b\sin 2x$. *Comme* y_p *vérifie* (E_2), *il vient*

$$\begin{aligned}\cos 2x =& (-4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)) + \\ & (-2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)) + (a\cos 2x + b\sin 2x)\end{aligned}$$

la famille $(\cos 2x, \sin 2x)$ *est libre, donc par identification (tout comme pour les polynômes), on obtient* $3b + 2a = 0$ *et* $2b - 3a = 1$ *ce qui donne :* $a = \dfrac{-3}{13}$ *et* $b = \dfrac{2}{13}$.
Finallement, la solution générale de l'équation (E_2) *est définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$y_2(x) = e^{\frac{-x}{2}}\big(\alpha\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \beta\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\big) - \frac{3}{13}\cos(2x) + \frac{2}{13}\sin 2x,$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

<u>Résolution de (E_3) :</u> *L'équation caractéristique associée à* (E_3) *est* $r^2 - 2r + 1 = 0$ *de discriminant* $\Delta = 0$. *Cette équation admet une racine double* $r_0 = 1$, *par suite la solution générale de l'équation sans second membre est définie sur* $\mathbb{R}$

$$y_h(x) = (\alpha x + \beta)e^x, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation complète est de la forme $R(x) + e^{sx}P(x)$ *où* P *et* R *sont des polynômes du 1*^{er} *degré et* $s = -1$. *Considérons l'équation*

$$y'' - 2y' + y = xe^{-x}$$

comme -1 *n'est pas la racine de l'équation caractéristique. Une solution particulière de cette équation s'écrit* $y_{p_1}(x) = (ax + b)e^{-x}$, *ce qui donne* $a = b = \dfrac{1}{4}$, *donc* $y_{p_1}(x) = \dfrac{1}{4}(x + 1)e^{-x}$.
Une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + y = x$$

est de la forme $y_{p_2}(x) = a'x + b'$, ce qui donne après calcul $a' = 1$ et $b' = 2a' = 2$. D'ou $y_{p_2}(x) = x + 2$. D'après le principe de la superposition, une solution particulière de l'équation complète est $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$.
la solution générale de l'équation (E_3) est

$$y_3(x) = x + 2 + \frac{1}{4}(x+1)e^{-x} + (\alpha x + \beta)e^{x}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Résolution de (E_4) : *L'équation caractéristique associée à (E_4) est $r^2 - 1 = 0$. Cette équation admet deux racines réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$, par suite la solution générale de l'équation sans second membre est définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$y_h(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

Le second membre de l'équation complète est de la forme $e^{sx}P(x)$ où P est un polynôme du 1^{er} degré et $s = -1$. Comme -1 est une racine simple de l'équation caractéristique, nous nous somme amené à chercher une solution particulière de l'équation complète de la forme $y_p = xQ(x)e^{sx}$ où Q est un polynôme du du 1^{er} degré. c.à.d $e^{sx}x(\beta x + \gamma)$. En calculant les dérivées, en reportant dans (E_4) et en identifiant les polynômes, on trouve $\beta = 1$ et $\gamma = 0$. par suite $y_p = x^2e^{x}$ est une solution particulière. En conclusion, la solution générale de l'équation (E_4) est

$$y_4(x) = x^2e^{x} + \alpha e^{x} + \beta e^{-x}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Résolution de (E_5) :*L'équation caractéristique admet une solution double -1, la solution générale de l'équation sans second membre est*

$$y \mapsto (Ax + B)e^{-x} \qquad A, B \in \mathbb{R},$$

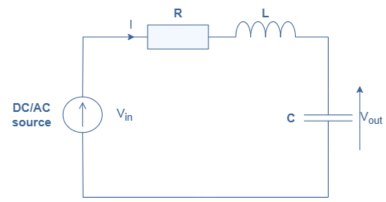
Pour l'équation complète, nous considérons séparement les trois termes composants le second membre (on cherchera une solution particulière pour chaque équation et on appliquera ensuite le principe de la superposition...)
Pour x^3, on cherche une solution particulière de la forme $y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. En calculant les dérivées, en reportant dans (E_5) et en identifiant les polynômes, on trouve

$$a = 1, b = -6, c = 18, d = -24$$

Pour le terme $3e^{2x}$, on cherche une solution de la forme $y(x) = \mu e^{2x}$ (car 2 n'est pas une racine de l'équation caractéristique). Après avoir rapporter dans (E_5), il vient $\mu = \frac{1}{3}$.
Pour le terme xe^{-x}, et puisque -1 est la racine double de l'équation caractéristique, nous cherchons une solution de la forme $y(x) = x^2(\alpha x + \beta)e^{-x}$. En calculant les dérivées, en reportant dans (E_5) et en identifiant, on trouve $\alpha = \frac{1}{6}$ et $\beta = 0$.
En resumé, d'après le principe de la superposition des solutions, la solution générale de (E_5) est donnée par

$$y(x) = (Ax + B)e^{-x} + (x^3 - 6x^2 + 18x - 24) + \frac{e^{2x}}{3} + \frac{x^3}{6}e^{-x}$$

Corrigé de l'exercice 5. *C'est une équation linéaire du second ordre à coefficients constants qui admet $U_0(t) = E$ comme solution particulière.*



Nous allons nous intrésser à l'équation sans second membre (on dit que le circuit est au régime libre ou régime propre)

$$\frac{d^2U_c(t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{dU_c(t)}{dt} + \omega_0^2 U_c(t) = 0$$

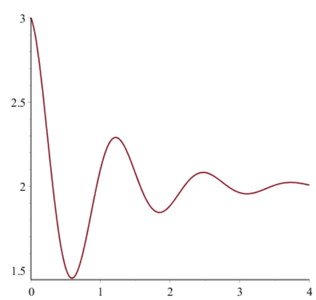
Cette équation correspond au comportement du circuit lorsque le condensateur se décharge dans la bobine et la résistance après avoir été préalablement chargé sous la tension E du générateur.
Le discriminant de l'équation caractéristique est donné par

$$\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$$

on distingue donc trois cas :
Cas 1 : $\Delta < 0$ *dans ce cas qui s'appelle le cas pseudo-périodique, la solution est donnée par*

$$U_c(t) = -B\, e^{-\lambda t}\big(\cos(\omega t + \phi) + E\big)$$

Où $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.



Signal dans le cas pseudo-périodique E=2v

on parle de régime pseudo-périodique car dans courbe de $U_c(\cdot)$ on constate que l'allure sinusoïdale est modulée par un terme d'exponentielle d'amortissement $e^{-\lambda t}$. L'amortissement des oscillations est d'autant plus faible que le coefficient λ est faible. De plus, Le signal présente une pseudo-période T, supérieure à la période propre du circuit T_0 avec

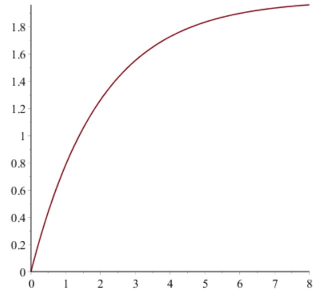
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Cas 1 : $\Delta > 0$ *il s'agit du régime apériodique, dans ce cas la solution est de la forme*

$$U_c(t) = E + A\, e^{at} + B\, e^{bt}$$

avec $a < 0$, $b < 0$ et $A + B = -E$, ce qui entraîne que

$$\lim_{t \to +\infty} U_c(t) = E$$

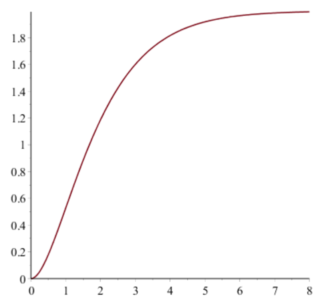


Signal dans le régime apériodique E=2v

Ce régime transitoire est dit apériodique par opposition au précédent. La tension au cours du temps s'exprimant comme une somme d'exponentielles décroissantes ($a < 0$ et $b < 0$), le signal ne présente aucune oscillation et donc aucune période et le régime permanent est atteint. Le courant dans le circuit tend à s'annuler, tout comme les tensions aux bornes de la bobine et de la resistance. Toute la tension de la source est contenue à terme aux bornes du condensateur.

Cas 1 : $\Delta = 0$ *il s'agit du régime critique, dans ce cas la solution est de la forme*

$$U_c(t) = E - E(1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$$



Signal dans le régime critique E=2v

Ce régime ne diffère pas qualitativement du régime apériodique : Le signal ne présente pas d'oscillation. Au contrario, dans cette situation, le régime permanent est atteint le plus rapidement.