Université Moulay Ismail

F.S.T Errachidia

Département des Mathématiques

BCG S1

Année Universitaire 2020-2021

Module : M 211

Cours d'Algébre

Prof. M.Tial

Table des matières

Chapitre 1

Introduction à la logique mathématique, ensembles et applications

1.1 Eléments de logique

Les mathématiques sont un langage pour s'exprimer rigoureusement, adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et vérifiables. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer à autrui. Il y a des notions difficiles à expliquer avec des mots : par exemple la continuité d'une fonction est souvent expliquée par «on trace le graphe sans lever le crayon». Il est clair que c'est une définition peu satisfaisante. Voici la définition mathématique de la continuité d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in I$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I\ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

1.1.1 Assertion

Définition 1.1.1. ***Une assertion*** *ou* ***proposition*** *est un énoncé auquel on peut attribuer la valeur de vérité vrai* (V) *ou faux* (F)*, mais jamais les deux à la fois. C'est le principe du tiers-exclu.*

Nous représentons une assertion par une lettre P, Q, R...
⋄ Quand l'assertion est vraie, on lui affecte la valeur V .
⋄ Quand l'assertion est fausse, on lui affecte la valeur F.
Ces valeurs sont appelées "Valeurs de vérité de l'assertion". Ainsi, pour définir une assertion, il suffit de donner ses valeurs de vérités. En général, on met ces valeurs dans un tableau qu'on nommera "Table de vérité" ou "Tableau de vérité".

Exemples 1.1.1.

1. *«Tous les nombres entiers relatifs sont positifs.»*
2. *«Je suis plus grand que toi.»*
3. *«il existe un nombre premier qui n'est pas impaire.»*
4. *«2-3=1.»*
5. *«Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $x^2 > 0$.*»*
6. *« Il existe* $z \in C$, *tel que* $|z| = 1$.*»*

1.1.2 Les connecteurs logiques

Si P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q à l'aide des connecteurs logique.

a. La négation, "non"

A chaque assertion P, on associe son contraire appelée négation de P, noté (*non* P) ou $\neg P$ ou $\bar{P}$. (*non* P) est vraie si P est fausse. (*non* P) est fausse si P est vraie.

b. La conjonction, "et"

Soit P et Q deux assertions alors (P et Q) qui est noté aussi $(P \wedge Q)$ est une assertion appelée conjonction de P et de Q. (P et Q) est vraie seulement dans le cas P est vraie et Q est vraie.

c. La disjonction "ou"

Soit P et Q deux assertions alors (P ou Q) qui est noté aussi $(P \vee Q)$ est une assertion appelée disjonction de P et de Q. (P ou Q) est vraie dans l'une au moins des assertion P, Q est vraie.

d. L'implication "$\Rightarrow$"

Soit P et Q deux assertions alors ((*non* P) ou Q) est une assertion appelée l' implication de Q par P notée ($P \Rightarrow$ Q). On lit P implique Q.
On a le tableau de verité suivant :

P	non P	Q	P⇒Q
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V

e. L'equivalence, "($\iff$)"

Soit P et Q deux assertions alors l'assertion($P \Rightarrow Q$) et ($Q \Rightarrow P$) se note $P \iff Q$. On a le tableau de verité suivant :

P	non P	Q	non Q	P⇒Q	Q⇒P	$P \iff Q$
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V	V

Remarque 1.1.2. *Deux assertions équivalentes ont même valeur logique. Elles sont bien simultanément vraies, ou bien simultanément fausses.*

Exemples 1.1.2.

1. $P \iff (non(non\ P))$ *dite la régle de Morgan.*
2. $(P\ et\ Q) \iff (Q\ et\ P)$.
3. $non(P\ et\ Q) \iff (non\ P\ ou\ non\ Q)$.
4. $P \Rightarrow Q \iff (non\ Q \Rightarrow non\ P)$. *(La contraposé).*

1.1.3 Les quantificateurs

i) Le quantificateur $\forall$ «pour tout»

Une assertion P peut dépendre d'un paramètre x, par exemple « $x^2 > 4$», l'assertion $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x. L'assertion

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E. On lit « Pour tout x appartenant à E, $P(x)$ », sous-entendu « Pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie ».

Exemples 1.1.3.

1. «$\forall x \in [2, +\infty[,\ x^2 \geqslant 4$ » *est vraie.*
2. «$\forall n \in \mathbb{Z},\ n(n+1)$ *est pair* » *est vraie.*
3. «$\forall x \in \mathbb{R},\ x^3 \leqslant 0$ » *est fausse.*

ii) Le quantificateur $\exists$ «il existe»

Soit $P(x)$ une assertion, dont la valeur de verité dépend de l' objet x si $P(x)$ est vraie pour au moins un objet x on écrit : $\exists x,\ P(x)$. On lit : il existe au moins un x tel que $P(x)$ est vraie.

iii)La négation des quantificateurs

La négation de l'assertion « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est « $\exists x \in E,\ non(P(x))$ ».
Par exemple la négation de « $\forall x \in [2,+\infty[,\ x^2 \geqslant 4$ » est « $\exists x \in [2,+\infty[,\ x^2 \prec 4$ ».
La négation de l'assertion « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est « $\forall x \in E,\ non(P(x))$ ».
Exemple : La négation de « $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2+n+1 = 0$ » est « $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2+n+1 \neq 0$ ».

1.1.4 Quelques régles logiques

Proposition 1.1.3. *Soient P, Q, et R trois assertions, on a :*

1. *(P et (Q et R)) $\iff$ ((P et Q) et R), (l'assertion P et Q et R a un sens) ;*
2. *(P ou (Q ou R)) $\iff$ ((P ou Q) ou R), (l'assertion P ou Q ou R a un sens) ;*
3. *(P et (Q ou R)) $\iff$ ((P et Q) ou (P et R)) ;*
4. *(P ou (Q et R)) $\iff$ ((P ou Q) et (P ou R)) ;*
5. *(P $\iff$ (Q $\iff$ R)) $\iff$ ((P $\iff$ Q) $\iff$ R) ;*
6. *(P $\Rightarrow$ Q) et (Q$\Rightarrow$ R) $\iff$ (P $\Rightarrow$ R) (l'implication est transitive).*

Exercice 1.1.4.

1. *Écrire la négation de « $P \Rightarrow Q$».*
2. *Écrire la négation de « P et $(Q$ ou $R)$ ».*
3. *Écrire à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes Puis écrire ses négations : a) « Pour tout nombre réel, son carré est positif ».*
   b) «Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1 ».
   c) «Pour tout entier naturel n, il existe un unique réel x tel que $\exp(x) = n$ ».

Exercice 1.1.5. *Ecrire la négation des assertions suivantes :*

1. *Il existe un triangle isocèle qui a au moins un angle réctangle ;*
2. *pour tous $x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant y$;*
3. *$a \leqslant -2$ ou $a \geqslant 3$;*
4. *$\forall \varepsilon \succ 0$, $\exists q \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $0 \prec q \prec \varepsilon$;*
5. *$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall z \in \mathbb{Z}$, la relation $z < y$ implique la relation $z < x+1$;*
6. *$\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$.*

1.1.5 Les Raisonnements Mathématiques

1) Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.

Exemple 1.1.1. *Pour tout rationnel strictement positif, il existe un entier strictement plus grand que lui.*

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Il existe des entiers p et q avec $q > 0$ tels que $x = \frac{p}{q}$ (propriété de $\mathbb{Q}$). Comme q est entier strictement positif, $q \geqslant 1$. Alors $p = xq \geqslant x$. En particulier, $p > 0$. D'où $2p > p$. Il vient $2p > x$. Comme $2p \geqslant 0$, on remarque que $2p \in \mathbb{N}$. On conclut que le double du numérateur $n = 2p$ convient.

2) Disjonction de cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de disjonction de cas.

Exemple 1.1.2. *Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k(k+1)$ est un entier paire.*
On distingue deux cas.
Ou bien k paire . Dans ce cas, l'entier $k(k+1)$ est paire comme produit d'un nombre paire et un entier. Ou bien k impaire. Dans ce cas, l'entier $(k+1)$ est paire, alors $k(k+1)$ est paire.

3) Raisonnement par contraposée

Pour démontrer une assertion du type $P \Rightarrow Q$, il suffit de démontrer sa contraposée *non* $Q \Rightarrow$ *non* P.

Exemple 1.1.3. *Montrons que si x et y sont des réels distincts de 1, et si $x \neq y$, alors $\frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$.*

La contraposée de l'énoncé est : si x et y sont des réels distincts de 1, et si $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1}$, alors $x = y$. *Et c'est vrai, car*

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1} \Rightarrow x-1 = y-1 \Rightarrow x = y.$$

4) Raisonnement par un contre exemple

Pour démontrer une assertion du type $(\exists x \in E),\ P(x)$, il suffit de donner un exemple d'un x qui convient. En passant à la négation, pour démontrer qu'une assertion du type $(\forall x \in E)\ P(x)$ est fausse, il suffit de donner un exemple d'un x qui ne convient pas. On appelle cela un *contre-exemple* à la propriété P.

Exemple 1.1.4. *L'assertion* tout entier positif est somme de trois carrés *est-elle vraie ? fausse ?*

Sachant qu'il n'y a que deux carrés non nuls inférieurs ou égaux à 7, à savoir 1 et 4, le nombre 7 n'est pas somme de trois carrés. Cela prouve que l'assertion est fausse.

5)Le raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une assertion P est vraie, on peut supposer que P est fausse et en déduire une contradiction.

Exemple 1.1.5. *Soient $x, y > 0$. Montrer que si $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$ alors $x = y$.*

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$ et $x \neq y$. Comme $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$ alors $x(x+1) = y(y+1)$ donc $x^2 - y^2 = y - x$. Cela conduit à $(x-y)(x+y) = -(x-y)$. Or $x \neq y$ on obtient $x + y + 1 = 0$ et $x, y > 0$ ce qui donne une contradiction. On déduit que pour $x, y > 0$, si $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$ alors $x = y$.

6) Le raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. Le raisonnement par récurrence se déroule en trois étapes : lors de la première étape on prouve $P(n_0)$. Pour l'étape deux , on suppose $n > n_0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ au rang suivant est vraie. Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Exemple 1.1.6. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3..... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Pour $n \geqslant 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante :

$$1 + 2 + 3..... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
**pour $n = 0$ on a $0 = \frac{0(0+1)}{2}$. Donc $P(0)$ est vraie.*
** Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$: $(1 + 2 + 3.... + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ est vraie .*
$1 + 2 + 3.... + n + (n+1) = [1 + 2 + 3.... + n] + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$
$= \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2}$
donc $1 + 2 + 3.... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, on déduit que $P(n+1)$ est vraie.
** On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3..... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Exercice 1.1.6.

1. *Démontrez par l'absurde que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle.*
2. *Montrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.*
3. *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.*
4. *Fixons un réel $x > 0$. Montrer que pour tout entier $n > 1$, $(1+x)^n > 1 + nx$.*

1.1.6 Formule du binôme

Par multiplication nous trouvons :

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

etc... On peut tirer pour $n \in \mathbb{N}$ la formule :

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{(n-2)}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{(n-3)}b^3 + ...nab^{n-1} + b^n$$

On peut écrire cette formule comme suit :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^k b^{(n-k)}$$

avec $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Application : Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $(1+a)^6$ en fonction de a.

1.2 Les ensembles

1.2.1 Quelques notions de base

Définition 1.2.1. *Un ensemble est une collection clairement définie ou décrite d'objets que l'on appelle élément de l'ensemble.*

Exemples 1.2.1.

. $\{a, b, c\}$, $\{1, 2, 3\}$ *et* $\mathbb{R}$ *sont des ensembles.*

. *L'ensemble vide, noté $\emptyset$ est l'ensemble ne contenant aucun élément.*

. *Soit E un ensemble et soit A un ensemble dont les éléments sont également éléments de E. On dit dans ce cas que A est inclus dans E et on note $A \subset E$. On dit de façon équivalente que A est une partie de E.*

. *L'ensemble constitué de toutes les parties de E est notè $\mathcal{P}(E)$.*

. *Deux ensembles A et B sont égaux s'ils ont les mêmes éléments, c'est à dire si tout élément de A est un élément de B et si tout élément de B est un élément de A.*

1.2.2 Opérations sur les ensembles

Soient A et B deux ensembles.

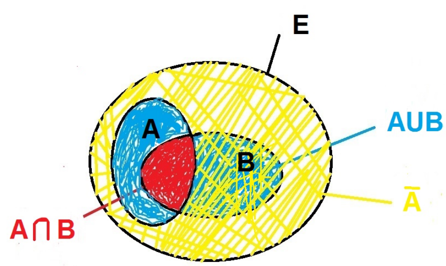
a . On appelle union de A et de B et on écrit $A\bigcup B$ l'ensemble définit par $A\bigcup B = \{x, x \in A \; ou \; x \in B\}$.

b . On appelle intersection de A et de B et on écrit $A\bigcap B$ l'ensemble définit par $A\bigcap B = \{x, x \in A \; et \; x \in B\}$.

c . Deux ensembles sont dits disjoints si leur intersection est vide.

d . Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A relativement à E et on note C_E^A ou $E \setminus A$ ou $\bar{A}$ l'ensemble donné par $C_E^A = \{x \in E, \; x \notin A\}$. A noter que $C^(C_E^A)_E = A$.

d Soient A et B deux ensembles non vides, on note $A \times B$ l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$. Il est appelé produit cartésien de A par$B$.



Exemple 1.2.1. *Soient $E = \{a, b, 1, 2, 3, 5\}$ un ensemble et $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, et $C = \{a, 3, 5, 2\}$ trois parties de E on a :*

$$A\bigcap C = \{a\},$$

$$A\bigcup B = \{1, 2, 3, a, b\} \; et \; C\bigcup B = \{1, 2, 3, a, 5\},$$

$$C_E^A = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\},$$
$$B \times A = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}.$$

Proposition 1.2.2. *Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E, on a :*

1. $A \bigcap B = B \bigcap A$.
2. $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.
3. $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.
4. $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$, *(on peut donc écrire $A \bigcap B \bigcap C$ sans ambiguité) .*
5. $C_E^{A \bigcup B} = C_E^A \bigcap C_E^B$.
6. $C_E^{A \bigcap B} = C_E^A \bigcup C_E^B$.

Remarque 1.2.3. *Les preuves sont pour l'essentiel une reformulation des opérateurs logiques.*

Exercice 1.2.4.

a) *Soit $E = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ un ensemble et soit les parties suivantes de E : $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{a,c,e\}$, $C = \{a,b,d,e,g\}$ et $D = \{c,d,e,g\}$. Calculer $(A \bigcap B) \bigcup C$, $(A \bigcup D) \bigcap (B \bigcup C)$, $C_E^{A \bigcap B} \bigcap C_E^{C \bigcup D}$.*

b) *On appelle différence symétrique de deux sous ensembles A et B d'un ensemble E le sous ensemble :*

$$A \Delta B = (A \bigcap C_E^B) \bigcup (B \bigcap C_E^A).$$

i) Déterminer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, et $A\Delta E$.
ii)Montrer que $A\Delta B = B\Delta A$ et $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Remarque 1.2.5. $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Correction de l'exercice 1.2.4 b)
b)i)-

$$\begin{aligned} A \triangle A &= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{A}) \\ &= \emptyset \cap \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} A \triangle \emptyset &= (A \cap \bar{\emptyset}) \cup (\emptyset \cap \bar{A}) \\ &= (A \cap E) \cup \emptyset \\ &= A \cup \emptyset \\ &= A \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} A\triangle E &= (A\cap \bar{E})\cup (E\cap \bar{A}) \\ &= (A\cap \emptyset)\cup (E\cap \bar{A}) \\ &= \emptyset\cup \bar{A} \\ &= \bar{A} \end{aligned}$$

ii) Montrons que $A\Delta B = B\Delta A$ et $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

$$\begin{aligned} A\triangle B &= (A\cap \bar{B})\cup (\bar{A}\cap B),\ (\forall E, F\in \mathcal{P}(E),\ E\cup F = F\cup E) \\ &= (B\cap \bar{A})\cup (A\cap \bar{B}) \\ &= A\triangle B \end{aligned}$$

Posons $A\triangle B = D$. On a

$$\begin{aligned} (A\triangle B)\triangle C &= D\triangle C \\ &= (D\cap \bar{C})\cup (C\cap \bar{D}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D\cap \bar{C} &= [(A\cap \bar{B})\cup (\bar{A}\cap B)]\cap \bar{C} \\ &= (A\cap \bar{B}\cap \bar{C})\cup (\bar{A}\cap B)\cap \bar{C}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C\cap \bar{D} &= C\cap \overline{(A\cap \bar{B})\cup (B\cap \bar{A})} \\ &= C\cap (\overline{A\cap \bar{B}}\cap \overline{B\cap \bar{A}}) \\ &= C\cap [(\bar{A}\cup B)\cap (\bar{B}\cup A)] \\ &= C\cap [((\bar{A}\cup B)\cap \bar{B})\cup ((\bar{A}\cup B)\cap A)] \\ &= C\cap [(\bar{A}\cap \bar{B})\cup (B\cap \bar{B})\cup (\bar{A}\cap A)\cup (B\cap A)] \\ &= (C\cap \bar{A}\cap \bar{B})\cup (C\cap B\cap A)]. \end{aligned}$$

Alors

$$(A\triangle B)\triangle C = (A\cap \bar{B}\cap \bar{C})\cup (\bar{A}\cap B\cap \bar{C})\cup (C\cap \bar{A}\cap \bar{B})\cup (C\cap B\cap A).$$

$x\in (A\triangle B)\triangle C$ alors soit il est dans les trois ensembles a la fois ou il est dans l'une des trois et n'est pas dans les deux autres. De la même façon on trouve

$$A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C = (A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(C\cap\bar{A}\cap\bar{B})\cup(C\cap B\cap A)$$

puisque A, B, C jouent le même rôle.

1.3 Les applications

1.3.1 Généralités

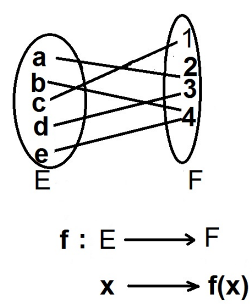
Définition 1.3.1.

Une application f est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F, et une relation qui permet d'associer à tout $x \in E$ un élément unique y dans F. On le note $f(x)$. On note

$$\begin{array}{llll} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) = y \end{array}$$

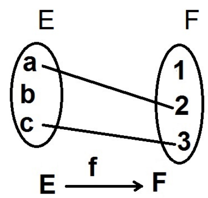
y est dit l'image par f de x et x est dit un antécédent de y.

Remarque 1.3.2. *Soit f une application de E dans F. Tout élément de E a une unique image ; en revanche un élément de F peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents par f.*



Exemples 1.3.1.

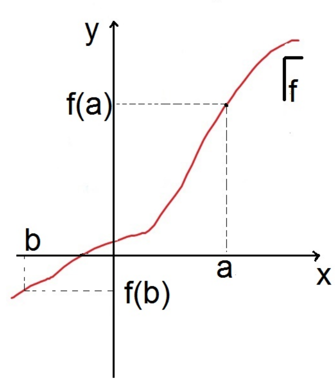
1. *$Id_E : E \to E$ définie par $Id_E(x) = x$ est dite application identité de E.*
2. *$E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 2, 3\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(a) = 2$, $f(c) = 3$, f n'est pas une application car b n'a pas d'image.*



3. $E = \{a, b\},\ F = \{1, 2, 3\}$ *et* $g : E \to F$ *définie par* $g(a) = 1,\ g(b) = 1$ *est une application sur* E.

Définition 1.3.3. *On appelle* ***graphe*** *de l'application* f *d'une partie* E *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, le sous ensemble (partie) de* $\mathbb{R}^2$ *noté* Γ_f *définit par :*

$$\Gamma_f = \{(a, f(a))/a \in E\}.$$



Définition 1.3.4. *On dit que deux applications* f *et* g *de* E *dans* F *sont egaux et on écrit* $f = g$ *sur* E *si* $\forall x \in E\ f(x) = g(x)$.

Exemple 1.3.1. $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$ *et* $\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x^2} \end{array}$

$f = g$ sur $\mathbb{R}^+$ car $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{x^2} = x$.

Attention $f \neq g$ sur $\mathbb{R}$, car $f(-1) = -1$ et $g(-1) = 1$.

Définition 1.3.5. *On appelle **fonction** de E dans F, toute application f d'un sous ensemble $D_f \subset E$ dans F. D_f est appelée ensemble de définition de f.*

1.3.2 Composition des applications

Définition 1.3.6. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La composée de g et f est l'application $g \circ f : E \to G$ définie par :*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemple 1.3.2. *Soient* $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ *et* $\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 \end{array}$. *Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f \circ g(x) = x^3 + 1$ et $g \circ f(x) = (x+1)^3,\ \forall x \in \mathbb{R}$.*

1.3.3 Injection, Surjection et bijection

Définition 1.3.7. *Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.*

- *f est **injective** si $\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.*
- *f est **surjective** si $\forall y \in F,\ \exists x \in E$ tel que $f(x) = y$.*
- *f est **bijective** si f est à la fois injective et surjective. Cela équivaut à ; $\forall y \in F,\ \exists! x \in E$ tel que $f(x) = y$.*

Une autre formulation : f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Exemples 1.3.2.

. *$E = \{a, b, c\},\ F = \{1, 2, 3\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(a) = 2,\ f(b) = 3$ et $f(c) = 1$ est une application injective et surjective donc elle est bjective.*

. *$E = \{a, b, c\},\ F = \{1, 2\}$ et $g : E \to F$ définie par $g(a) = 1,\ g(b) = 1$ et $g(c) = 2$ est une application qui n'est pas injective car $g(a) = g(b)$ et $a \neq b$, mais elle est surjéctive car 1 et 2 ont des antécédents.*

Théorème 1.3.8. *$f : E \to F$ est bijective si et seulement si, il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. On note $g = f^{-1}$.*

f^{-1} est dite l'application réciproque de f sur E.

Exemple 1.3.3. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$$

On pose $y = f(x)$ *avec* $x \in [0,+\infty[$ *et* $y \in [1,+\infty[$ *donc* $x^2 = y-1$ *alors* $x = \pm\sqrt{y-1}$ *et puisque* $x \in [0,+\infty[$ *alors* $x = \sqrt{y-1}$*, donc l'application réciproque de* f *est :*

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \sqrt{x-1} \end{array}$$

Remarque 1.3.9. *Si* $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *sont deux applications telles que* $g \circ f = Id_E$ *alors* f *et* g *ne sont pas forcément bijectives.*

Par exemple*,* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \sqrt{x}$ *pour* $x \geqslant 0$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *définie par* $g(x) = x^2$ *pour* $x \in \mathbb{R}$ *vérifient* $g \circ f = Id_{\mathbb{R}^+}$*, mais* f *n'est pas surjective, et* g *n'est pas injective.*

Proposition 1.3.10. *Soient* $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *deux applications on a :*

a) *Si* f *et* g *sont injectives alors* $g \circ f$ *est injective.*

b) *Si* f *et* g *sont surjectives alors* $g \circ f$ *est surjective.*

c) *Si* $g \circ f$ *est injective, alors* f *l'est aussi.*

d) *Si* $g \circ f$ *est surjective, alors* g *l'est aussi.*

e) *Si* f *et* g *sont bijectives alors* $g \circ f$ *est bijective et* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$*.*

Preuve

On va montrer e).

On a

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ Id_F \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= Id_G \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &= f^{-1} \circ Id_F \circ f \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= Id_E \end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ *est bijective de réciproque* $f^{-1} \circ g^{-1}$*.*

Pour a) b) c) et d) (Voir Série 1 TD).

Remarque 1.3.11. *Les réciproques de ces implications ne sont pas toujours vraies.*

Etant données les applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

et

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln|x| \end{array}$$

on a $f \circ g(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ *donc* $f \circ g$ *est injective malgré que* g *ne l'est pas et* $g \circ f$ *est surjéctive malgré que* f *ne l'est pas.*

1.3.4 Image directe image réciproque

Définition 1.3.12. *Soient* $f : E \to F$ *une application et* A, B *deux ensembles tel que* $A \subset E$ *et* $B \subset F$.
1) L'image directe de A *par* f *est* $f(A) = \{f(a)/a \in A\}$.
2) L'image réciproque de B *par* f *est* $f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}$.

Exemple 1.3.4. *Considérons l'application* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *définie par* $f(n) = 2n+1$ *et* $A = \{0, 1, 3\}$ *et* $B = \{5, 11, 21\}$. *On a* $f(A) = \{1, 3, 7\}$ *et* $f^{-1}(B) = \{2, 5, 10\}$.

Remarques 1.3.13. *Si* f *est une application de* E *dans* F *alors :*
1) $f(A)$ *est un sous-ensemble de* F *et* $f^{-1}(B)$ *est un sous-ensemble de* E.
2) La notation « $f^{-1}(B)$» ne signifie pas que f *est bijective. L'image réciproque existe quelque soit l'application.*

Exercice 1.3.14.
Soit A, B *deux parties d'un ensemble* E *et* f *une fonction définie sur* E. *A-t-on nécessairement :*
$f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$ *et* $f(A \bigcup B) \subset f(A) \bigcup f(B)$.

Exercice 1.3.15.
Déterminer les injections, les surjections et les bijections parmi les applications suivantes, :

i)

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+1 \end{array}$$

ii)

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

iii)

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+y \end{array}$$

vi)

$$k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

Exercice 1.3.16.

Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(k) = 2k \ \text{ et } g(k) = \begin{cases} \frac{k+1}{2} & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{k}{2} & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

a *Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.*

b *Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ puis étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.*

Chapitre 2

Factorisation des polynômes

2.1 Rappel sur les nombres complexes

2.1.1 L'ensemble $\mathbb{C}$

Théorème 2.1.1. *(admis) Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé* **ensemble des nombres complexes**, *qui possède les propriétés suivantes :*

1. *$\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$,*
2. *il existe un nombre complexe, noté i tel que $i^2 = -1$,*
3. *tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x+iy$, où x et y sont des nombres réels.*

Exemples 2.1.1.
$z = 3 + 2i \in \mathbb{C}$; $z_2 = -5 \in \mathbb{R}$, *donc* $z_2 \in \mathbb{C}$; $z_3 = \sqrt{7} - 6i \in \mathbb{C}$.

Remarques 2.1.2.
• *L'écriture $z = x + iy$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ s'appelle la **f**orme algébrique du nombre complexe z.*

• *x est la partie réelle de z, notée $\Re(z)$, et y est la partie imaginaire de z, notée $\Im m(z)$.*

D'après le premier théorème et l'unicité de l'écriture sous forme algébrique, on a donc :

Théorème 2.1.3. *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a' et b' quatre nombres réels, alors,*

$$z = z' \Longleftrightarrow \Big(a = a' \quad \text{et} \quad b = b'\Big).$$

2.1.2 Plan complexe

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *direct.*

. *A tout nombre complexe* $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, *on associe le point* M *de coordonnées* $M(x; y)$.

On dit que z *est l'affixe du point* M, *ou du vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *; et que le point* M, *ou le vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *est l'image de* z.

. *Soient deux points* A *et* B *d'affixe* z_A *et* z_B, *alors l'affixe du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *est* $z_b - z_A$.

. *Soit* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs d'affixe* z *et* z', *alors le vecteur* $\vec{u} + \vec{v}$ *a pour affixe* $z + z'$. *De plus, si* $k \in \mathbb{R}$, *le vecteur* $k\overrightarrow{u}$ *a pour affixe* kz.

Exercice 2.1.4. *Les points* A, B *et* C *ont pour affixe respective* $-2 + i$, $3 + 3i$, $2 + \dfrac{13}{5}i$.

a) *Calculer les affixes des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.

b) *En déduire que les points* A, B *et* C *sont alignés.*

c) *Representer graphiquement les points* A, B *et* C.

2.1.3 Opérations sur les nombres complexes

Les règles de calcul sur les nombres réels s'étendent aux nombres complexes avec la prise en considération de $i^2 = -1$.

Exercice 2.1.5. *Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :*

1) $(2 + 3i) + (-1 + 6i)$ 2) $(5 + i) - (3 - 2i)$ 3) $(1 + i)(3 - 2i)$

4) $(4 + i)(-5 + 3i)$ 5) $(2 - i)^2$ 6) $(x + iy)(x' + iy')$

7) $(x + iy)^2$ 8) $(a + ib)(a - ib)$.

2.1.4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2.1.6. *Soit* $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, *un nombre complexe. On appelle* **c***onjugué de* z, *noté* $\overline{z}$, *le nombre complexe* $\overline{z} = x - iy$.

Proposition 2.1.7. *Dans le plan complexe, si le point* M *a pour affixe* z, *alors l'image* M' *de* $\overline{z}$ *est le symétrique de* M *par rapport à l'axe des abscisses.*

Exemples 2.1.2.

1. $z = 3 + 2i$, *alors* $\overline{z} = 3 - 2i$,

2. $\overline{3 - \frac{1}{2}i} = 3 + \frac{1}{2}i$,

3. $\overline{-5} = -5$,

4. $\overline{3i} = -3i$.

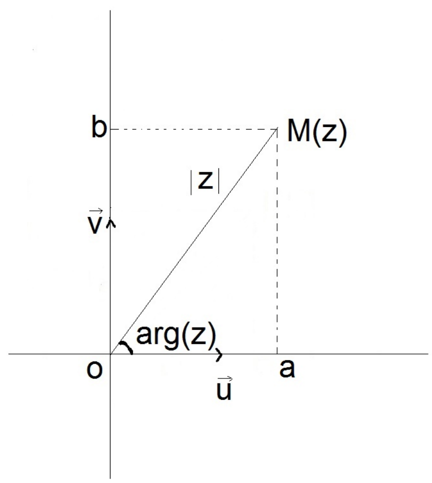
2.1.5 Module et argument d'un nombre complexe

Définitions 2.1.8. *Soit dans le plan complexe un point M d'affixe $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Ce nombre, ***réel et positif*** *s'appelle* ***le module*** *du nombre complexe z, et est noté $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

On appelle ***argument*** *du nombre complexe non nul z, noté $arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.*



Remarques 2.1.9.

1. *Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments.*
2. *Si θ est un arguments d'un nombre $z \in \mathbb{C}$, alors tous les autres sont de la forme $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et on écrit $arg(z) = \theta$ (modulo 2π), ou $arg(z) = \theta\ [2\pi]$, ou encore, pour simplifier, $arg(z) = \theta$.*
3. *si $|z| = r$ et $arg(z) = \theta$ on écrit $z = [r, \theta]$*
4. *Si $|z| = r$, Le nombre complexe z s'écrit alors de façon unique :$z = |z|(cos\theta + isin\theta)$, cette écriture s'appelle* ***forme trigonométrique*** *de z.*
5. *Si $|z| = r$ et $arg(z) = \theta$ alors $z = r\exp(i\theta)$ s'appelle* ***forme exponentielle*** *du nombre complexe z.*

Proposition 2.1.10. *Soit z et z' deux complexes et n un entier relatif on a :*

1. *$|-z| = |z|$ et $|\overline{z}| = |z|$,*
2. *$|zz'| = |z|\,|z'|$,*

3. $|z^n| = |z|^n$,
4. $\frac{|z|}{|z'|} = |\frac{z}{z'}|$,
5. $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$ *(inégalité triangulaire)*,
6. $arg(\overline{z}) = -arg(z)$,
7. $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$,
8. $arg(z^n) = n\,arg(z)$,
9. $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')$.

Exercice 2.1.11. *Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants :*

1) 5 *2)* $4+4i$ *3)* $(4+4i)^5$ *4)* $\frac{5}{1-i}$ *5)* $\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}$
6) $(\sqrt{3}-i)^{-3}$

2.1.6 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

a. Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 2.1.12. *Soit $z = a+ib$ un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle racine carrée de Z, un nombre complexe u vérifiant $u^2 = z$.*

1. *Méthode de résolution algébrique de $u^2 = z$.*

Posons $z = a+ib$, on cherche les racines carrées de z sous la forme $u = x+iy$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$u^2 = z \Leftrightarrow (x+iy)^2 = a+ib \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}. \end{array} \right.$$

La résolution de ce système nous donne les racines carrées u de z.

1. *Méthode de résolution trigonométrique de $u^2 = z$.*

Posons $z = [r, \alpha]$ un complexe. Le nombre complexe $u = [\rho, \theta]$ est racine carrée de z si et seulement si $z = u^2$

$$[\rho^2, 2\theta] = [r, \alpha] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho^2 = r, \\ 2\theta \equiv \alpha[2\pi], \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{r}, \\ \theta \equiv \frac{\alpha}{2}[\pi], \end{array} \right.$$

Exemple 2.1.1. *D'aprés la méthode algébrique, on cherche les racines carrées de $z = 1+i$ sous la forme $u = x+iy$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*
On a $z = u^2$ i.e.

$$1+i = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 1, \\ 2xy = 1. \end{array} \right.$$

On ajoute l'équation $x^2+y^2=|u|^2=|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ *:*

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=1, \\ x^2+y^2=\sqrt{2}, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=\frac{\sqrt{2}+1}{2}, \\ y^2=\frac{\sqrt{2}-1}{2}, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, \\ y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}. \end{array}\right.$$

Enfin, l'équation $2xy=1>0$ *nous dit que* x *et* y *doivent être de même signe. Il vient donc :*

$$u=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right).$$

b. Racines n***-ièmes d'un nombre complexe***

Définition 2.1.13. *Soit* z *un complexe. On appelle racine n-ième de* z*, tout nombre complexe* u *vérifiant* $u^n=z$ *avec* $n\in\mathbb{N}^*$*.*

Remarque 2.1.14. *Pour extraire les racines n-ièmes* $(n\geqslant 3)$ *d'un nombre complexe* z*, il faut impérativement passer par la forme trigonométrique de* z*.*

Soit $z=[r,\alpha]$ *un complexe. Posons* $u=[\rho,\theta]$ *une racine n-ième de* z *i.e.* $u^n=z$

$$u^n=z \Leftrightarrow [\rho^n,n\theta]=[r,\alpha] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho^n=r, \\ n\theta\equiv\alpha[2\pi], \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho=\sqrt[n]{r}, \\ \theta\equiv\frac{\alpha}{n}[\frac{2\pi}{n}]. \end{array}\right.$$

Conclusion : L'ensemble S *des solutions de l'équation* $u^n=z$ *est :*

$$S=\{z_0,z_1,...,z_{n-1}\}\ avec\ z_k=\left[\sqrt[n]{r},\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right], 0\leqslant k\leqslant n-1.$$

c. Racines n-ièmes de l'unité

Définition 2.1.15. *Soit* $n\in\mathbb{N}$ *. On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe* z *tel que* $z^n=1$*.*

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 2.1.16. *L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est :* $\{exp(\frac{2k\pi i}{n})|k\in\{0,1,...,(n-1)\}\}$.

Exemple 2.1.2. *L'ensemble des solutions dans* $\mathbb{C}$ *de l'equation* $z^4=1$ *est :*

$$\begin{aligned}\{exp(\tfrac{2k\pi i}{n})|k\in\{0,1,2,3\}\} &= \{exp(0),exp(\tfrac{\pi i}{2}),exp(\pi i),exp(\tfrac{3\pi i}{2})\} \\ &= \{1,i,-1,-i\}.\end{aligned}$$

Exercice 2.1.17. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

1) $z^6=1$,

2)$z^6=2i$.

2.1.7 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Théorème 2.1.18. *On considére l'équation* $az^2+bz+c=0$ *tel que* $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ *et* $a\neq 0$*, de discriminant* $\Delta = b^2-4ac$.

- *Si* $\Delta = 0$*, l'équation admet une unique solution (dite solution double)* $z=-\frac{b}{2a}$.
- *Si* $\Delta \neq 0$ *l'équation admet deux solutions distincts* $z_1 = \frac{-b+d}{2a}$ *et* $z_2 = \frac{-b-d}{2a}$*, avec d une racine carrée de* Δ.

Exemple 2.1.3. *On résoud dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2+(1-i)z-\frac{2+3i}{4}=0$.
Le discriminant $\Delta = (1-i)^2-4(-\frac{2+3i}{4}) = -2i+2+3i = 2+i\neq 0$.
Les racines carrées de $2+i$ *sont* $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\right)$*. Les solutions de l'équation sont donc :*

$$z_1 = \frac{-1+i+\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\right)}{2} \quad et \ z_2 = \frac{-1+i-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\right)}{2}.$$

Exercice 2.1.19. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

a) $z^2-z+1=0$.

b) $z^2-3iz+2=0$.

c) $-2iz^2+9z-4=0$.

d) $-z^2+(1+\sqrt{3})z-\sqrt{3}=0$.

2.2 Les polynômes

2.2.1 Définitions et notations

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K}$ *désignera l'un des ensembles* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Définition 2.2.1. *Un polynôme à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est une expression de la forme*

$$P(X) = a_0+a_1X+a_2X^2+...a_{n-1}X^{n-1}+a_nX^n,$$

avec $n\in\mathbb{N}$ *et* $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{K}$.

Notations et Terminologies

- *L'ensemble des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est noté* $\mathbb{K}[X]$.
- *Les* a_i *sont appelés les coefficients du polynôme.*
- *Si tous les coefficients* a_i *sont nuls,* P *est appelé le polynôme nul, il est noté* 0.
- *On appelle le degré de* P *le plus grand entier* i *tel que* $a_i\neq 0$*, on le note* $\deg P$ *où* $d^\circ P$ *. Pour le degré du polynôme nul on pose par convention* $\deg(0)=-\infty$.

- *On note* $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leqslant n\}$.
- *Les polynômes comportant un seul terme non nul (du type* $a_k X^k$*) sont appelés monômes. Tout polynôme est donc une somme finie de monômes.*
- *Un polynôme de la forme* $P = a_0$ *avec* $a_0 \in \mathbb{K}$ *est appelé un polynôme constant. Si* $a_0 \neq 0$*, son degré est* 0.
- *Si* i *est le plus petit entier* $0 \leqslant i \leqslant n$ *tel que* $a_i \neq 0$*, alors* a_i *est appelé le coefficient dominant de* $P(X)$.
- *Un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est égal à* 1.
- *deux polynômes* P *et* Q *de* $\in \mathbb{K}[X]$ *sont associés s'il existe* $\alpha \in \mathbb{K}^*$ *tel que* $Q = \alpha P$.

Exemples 2.2.1.

a. $X^4 - 3X^2 + 2$ *est un polynôme de degré* 4 *à coefficients dans* $\mathbb{R}$.

b. $X^7 + \sqrt{2} - 2iX^9 + 3X$ *est un polynôme de degré* 9 *à coefficients dans* $\mathbb{C}$.

c. $X^n + 1$ *est un polynôme de degré* n *à coefficients dans* $\mathbb{R}$.

d. 2 *est un polynôme constant, de degré* 0.

e. $P(X) = (X-1)(X^8 + X^7 + \cdots + X + 1)$. *On a* $P(X) = \big(X^9 + X^8 + \cdots + X^2 + X\big) - \big(X^8 + X^7 + \cdots + X + 1\big) = X^9 - 1$. $P(X)$ *est donc un polynôme de degré* 9*, il est unitaire.*

f. *Les polynômes* $P(X) = 3X^2 - 2X + 1$ *et* $Q(X) = -X^2 + \frac{2}{3}X - \frac{1}{3}$ *sont associées car* $P(X) = -3Q(X)$.

2.2.2 Opérations sur les polynômes

* ***Égalité.*** *Soient* $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ *et* $Q = b_n X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ *deux polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

$$P = Q \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \text{ tel que } 0 \leqslant i \leqslant n \quad a_i = b_i,$$

et on dit que P *et* Q *sont égaux.*
Comme conséquence, un polynôme est null ssi tous ses coefficients sont nulls.

* ***Addition.*** *Soient* $P = a_m X^m + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ *et* $Q = b_n X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ *avec* $m \geqslant n$.
On définit :

$$P+Q = a_m X^m + \cdots + (a_n+b_n)X^n + (a_{n-1}+b_{n-1})X^{n-1} + \cdots + (a_1+b_1)X + (a_0+b_0).$$

* ***Multiplication par un scalaire.*** *Si* $\lambda \in \mathbb{K}$ *alors* $\lambda \cdot P$ *est le polynôme dont le i-ème coefficient est* λa_i.

* ***Multiplication.*** *Soient* $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ *et* $Q = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0$. *On définit*

$$P \times Q = c_rX^r + c_{r-1}X^{r-1} + \cdots + c_1X + c_0$$

$$\text{avec } r = n + m \text{ et } c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j \text{ pour } k \in \{0, \ldots, r\}.$$

Exemples 2.2.2. *Soient* $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ *et* $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors :*

- $P + Q = aX^3 + (b + \alpha)X^2 + (c + \beta)X + (d + \gamma)$,
- $\lambda P = \lambda aX^3 + \lambda bX^2 + \lambda cX + \lambda d$,
- $P \times Q = (a\alpha)X^5 + (a\beta + b\alpha)X^4 + (a\gamma + b\beta + c\alpha)X^3 + (b\gamma + c\beta + d\alpha)X^2 + (c\gamma + d\beta)X + d\gamma$.
- $P = Q$ *si et seulement si* $a = 0$, $b = \alpha$, $c = \beta$ *et* $d = \gamma$.

Proposition 2.2.2. *Pour* $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ *on a :*

1. $0 + P = P, \quad P + Q = Q + P, \quad (P + Q) + R = P + (Q + R)$;
2. $1 \cdot P = P, \quad P \times Q = Q \times P, \quad (P \times Q) \times R = P \times (Q \times R)$;
3. $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$.

Proposition 2.2.3. *Soient* P *et* Q *deux polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$. *On a*

1. $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$,

2. $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$.

Remarque 2.2.4. *Il faut faire attention au degré de la somme de deux polynômes.*

Exemple 2.2.1. $P(X) = X^4 - 3X^2 + 2$ *est un polynôme de degré* 4, $Q(X) = -X^4 + 5X^3 - 3$ *est un polynôme de degré* 4 *et* $(P + Q)(X) = 5X^3 - 3X^2 - 1$ *est de degré* 3.

Exercice 2.2.5.
i) Soit $Q(X) = 2X^2 - 3$, $P(X) = X^3 - 2X + 1$ *et* $R(X) = aX + b$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$.

1. *Calculer* $P + Q$, $P \times Q$, $(P + Q) \times R$ *et* $P \times Q \times R$.
2. *Trouver* a *et* b *pour que* P *soit égal à* QR *si c'est possible.*
3. *Trouver* a *et* b *afin que le degré de* $P - QR$ *soit le plus petit possible.*

ii) Montrer que si $\deg P \neq \deg Q$ *alors* $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

Définition 2.2.6. *Soit* $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. *Pour un élément* $x \in \mathbb{K}$, *on note* $P(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$. *On associe ainsi au polynôme* P *une **fonction polynôme** (que l'on note encore* P*),*

$$P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto P(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0.$$

2.2.3 Division suivant les puissances croissantes

Soit $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tel que le coefficient constant $B(0)$ de $B(X)$ est non nul. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, peut-on trouver $Q(X)$ et $R(X)$ tels que $A(X) = Q(X)B(X) + X^{n+1}R(X)$ avec $deg(Q(X)) \leqslant n$?
Dans le cas affirmatif, comment peut-on trouver les polynôme $Q(X)$ et $R(X)$?

Théorème 2.2.7. *Soient $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes de $K[X]$ tel que $B(X) \neq 0$ pour tout entier n, il existe un couple et un seul de polynômes $(Q(X), R(X))$ de $K[X]$ vérifiant*

$$A(X) = Q(X)B(X) + X^{n+1}R(X) \text{ avec } deg(Q(X)) \leqslant n.$$

L'entier n est appelé l'ordre de la division suivant les puissances croissantes de $A(X)$ par $B(X)$.

Exemple 2.2.2. *On effectue la division suivant les puissances croissantes du polynôme $A(X) = X^3 - 3X^2 + 1$ par $B(X) = X^2 - X + 1$ a l'ordre $n = 3$.*

$$\begin{array}{rr|l}
 & 1-3X^2+X^3 & 1-X+X^2 \\ \cline{3-3}
- & 1-X+X^2 & 1+X-3X^2-3X^3 \\ \cline{2-2}
 & X-4X^2+X^3 & \\
- & X-X^2+X^3 & \\ \cline{2-2}
 & -3X^2 & \\
- & -3X^2+3X^3-3X^4 & \\ \cline{2-2}
 & -3X^3+3X^4 & \\
- & -3X^3+3X^4-3X^5 & \\ \cline{2-2}
 & 3X^5 &
\end{array}$$

On a $A(X) = (1 + X - 3X^2 - 3X^3)B(X) + X^4(3X)$, alors $Q(X) = 1 + X - 3X^2 - 3X^3$ et $R(X) = 3X$, $degQ = 3 \leqslant 3$.

Exercice 2.2.8.
Effectuer la division suivant les puissances croissantes de P par Q a l'ordre k dans les cas suvants :

1. $P = 3X^3 + X^2 - 2$, $Q = X + 2$, $k \in \{1, 2\}$.
2. $P = X^4 + 2X^3 - X + 1$, $Q = X^2 - X + 1$, $k = 3$.

2.2.4 La division euclidiénne des polynômes(division suivant les puissances décroissante)

Soient $A(x)$ et $B(X)$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $B(X)$ non nul, existe-t-il $Q(X)$ et $R(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$A(X) = Q(X)B(X) + R(X) \text{ avec } deg(R(X)) < deg(B(X))?$$

Théorème 2.2.9. *Soient $A,\ B \in K[X]$, avec $B \neq 0$, il existe un couple de polynômes $(Q(X), R(X))$ de $K[X]$ vérifiant*

$$A(X) = Q(X)B(X) + R(X) \text{ avec } deg(R(X)) < deg(B(X)).$$

Remarques 2.2.10.

1. *Q est appelé le quotient et R le reste et cette écriture est la* ***division euclidienne*** *de A par B.*
2. *Notez que la condition $degR < degB$ signifie $R = 0$ ou bien $R \neq 0$ et $degR < degB$.*

Définition 2.2.11. *on dit que $B(X)$ divise $A(X)$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$ est nul.*

Exemples 2.2.3.

a- *Si $P(X) = X^3 - 3X^2 + 1$ et $Q(X) = X^2 - 1$. Effectuons la dévision euclidienne de P par Q.*

$$\begin{array}{rr|l}
 & X^3 - 3X^2 + 1 & X^2-1 \\ \cline{3-3}
- & X^3 - X & X-3 \\ \cline{1-2}
 & -3X^2 + X + 1 & \\
- & -3X^2 + 3 & \\ \cline{2-2}
 & X-2 &
\end{array}$$

Alors $P(X) = (X-3)Q(X) + X - 2$, $degR = 1 \prec 2 = \deg Q$.

b- *pour* $P(X) = X^2 - 3X + 2$ *et* $Q(X) = X - 1$ *on a :*
$X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2) = (X-1)Q(X)$. *Dans ce cas* Q *divise* P.

c- *Si* $A(X) = 4X - 3$ *et* $B(X) = X^2 - 2X + 1$ *alors on peut écrire :*
$4X - 2 = 0(X^2 - 2X + 1) + 4X - 2$ *et par conséquent* $Q(X) = 0$ *et* $R(X) = P(X)$.

Exercice 2.2.12. *Effectuer la division euclidienne de* P *par* Q *dans les cas suvants :*

1. $P = 2X^3 - 3X^2 + 1$, $Q = X + 2$.
2. $P = 3X^4 + 2X^3 - X + 1$, $Q = X^2 - X + 2$.
3. $P = 3X^5 + X^3 + X^2 - X - 1$, $Q = X^2 - 1$.
4. $P = X^5 + 2X^3 + X - 2$, $Q = X^2 + X - 4$.

Exercice 2.2.13. *Determiner les réels* a *et* b *pour que le polynôme* $P = 3X^4 + aX^3 - 2X + b$ *soit divisible par* $Q = X^2 + X - 1$.

2.3 Racine d'un polynôme, factorisation

2.3.1 Racines d'un polynôme

Définition 2.3.1. *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $a \in \mathbb{K}$. *On dit que* a *est une* ***racine*** de P *si* $P(\alpha) = 0$.

Exemple 2.3.1. *Soit* $P(X) = 3X^4 - 2X^3 + X - 2$.
On a $P(1) = 0$ *donc* 1 *est une racine du polynôme* P, $P(2) = 32$ *alors* 2 *n'est pas une racine de* P.

Théorème 2.3.2.

$$P(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X - a \text{ divise } P.$$

preuve
Soit Q *le quotient et* R *le reste de la division euclidienne de* P *par* $X - a$. *Alors* $P = Q \cdot (X - a) + R$ *où* R *est une constante car* $\deg R < \deg(X - a) = 1$.
Donc $P(a) = 0 \iff R(a) = 0 \iff X - a$ *divise* P.

Définition 2.3.3. *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$. *On dit que* a *est une* ***racine de multiplicité*** k *de* P *si* $(X-a)^k$ *divise* P *alors que* $(X-a)^{k+1}$ *ne divise pas* P. *Lorsque* $k = 1$ *on parle d'une* ***racine simple****, lorsque* $k = 2$ *d'une* ***racine double****, etc.*

On dit aussi que a *est une* ***racine d'ordre*** k.

Exemple 2.3.2. *On considére le polynôme* $P(X) = 5X^3 - \frac{37}{2}X^2 + 14X - 6$.
On a $P(2) = 0$ *donc* 2 *est une racine du polynôme* P. *En effectuant la division euclidienne de* P *par* $X - 2$, *on trouve* $P(X) = (X-2)Q(X)$ *avec* $Q(X) = 5X^2 - \frac{17}{2}X - 3$. *On remarque que* $Q(2) = 0$ *et* $Q(X) = (x-2)(5X + \frac{3}{2})$. *Finalement* $P(X) = (X-2)^2(5X + \frac{3}{2})$. 2 *est une racine de multiplicité* 2 *de* P *car* $(X-2)^2$ *divise* P *et* $(X-2)^3$ *ne divise pas* P.

Théorème 2.3.4 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.** *Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geqslant 1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Il admet exactement n racines si on compte chaque racine avec multiplicité.*

Exemples 2.3.1. *Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients complexes : $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.*
- *Si $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$ alors P admet 2 racines complexes distinctes $\frac{-b+d}{2a}$ et $\frac{-b-d}{2a}$ avec d une racine carrée de Δ.*
- *Si $\Delta = 0$ alors P admet une racine réelle double $\frac{-b}{2a}$.*

En tenant compte des multiplicités on a donc toujours exactement 2 racines. Pour les autres ensembles que les nombres complexes nous avons le résultat plus faible suivant :

Théorème 2.3.5. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Alors P admet au plus n racines dans $\mathbb{K}$.*

Exemple 2.3.3. *Considérons le polynôme $P(X) = -3X^3 + 2X^2 - 3X + 2$. à coefficients dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, P n'a qu'une seule racine (qui est simple) $\alpha = \frac{2}{3}$ et il se décompose en $P(X) = -3(X - \frac{2}{3})(X^2 + 1)$. Si on considère maintenant P comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ alors $P(X) = -3(X - \frac{2}{3})(X - i)(X + i)$ et admet 3 racines simples.*

2.3.2 Formule de Taylor

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ un polynôme de $K[X]$ et $k \in \mathbb{N}$.

Définition 2.3.6. *Le $n^{éme}$ polynôme dérivée de $P(X)$ est le polynôme $P^{(n)}(X)$ définie par :*
1. *$P^{(0)}(X) = P(X)$.*
2. *$P^{(1)}(X) = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}$.*
3. *$P^{(n)}(X) = (P^{(n-1)}(X))^{(1)}$, pour $k \geqslant 2$.*

On note $P^{(1)}(X) = P^{'}(X)$ et $P^{(2)}(X) = P^{''}(X)$.

Exemple 2.3.4. *Si $P(X) = X^3 - 3X^2 + 1$ alors $P^{'}(X) = 3X^2 - 6X$, $P^{''}(X) = 6X - 6$, $P^{(3)}(X) = 6$ et $P^{(k)}(X) = 0\ \forall k \geqslant 4$.*

Proposition 2.3.7. *Soit $P(X) \in K_n[X]$ et $a \in K$, la formule de Taylor de $P(X)$ en a s'ecrit :*

$$P(X) = P(a) + \frac{P^{(1)}(a)}{1!}(X-a) + \frac{P^{(2)}(a)}{2!}(X-a)^2 + \frac{P^{(3)}(a)}{3!}(X-a)^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n.$$

Exemple 2.3.5. *Soit $P(X) = X^3 - 3X^2 + 1$. Alors $P^{'}(X) = 3X^2 - 6X$, $P^{''}(X) = 6X - 6$, $P^{(3)}(X) = 6$. On a $P(2) = -3$, $P^{'}(2) = 0$, $P^{''}(2) = 6$ et $P^{(3)}(2) = 6$.*
La formule de Taylor de P au point 2 s'écrit :

$$
\begin{aligned}
P(X) &= P(2) + \tfrac{P'(2)}{1!}(X-2) + \tfrac{P''(2)}{2!}(X-2)^2 + \tfrac{P^{(3)}(2)}{3!}(X-2)^3 \\
&= -3 + \tfrac{0}{1}(X-2) + \tfrac{6}{2}(X-2)^2 + \tfrac{6}{6}(X-2)^3 \\
&= -3 + 3(X-2)^2 + (X-2)^3.
\end{aligned}
$$

Proposition 2.3.8. *Soit P un polynôme, $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) α est une racine de multiplicité d'ordre k de P.
(ii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^k Q$, avec $Q(\alpha) \neq 0$.
(iii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Preuve
Voir la série 2 de TD.

Exemple 2.3.6. *$P(X) = X^n - 1$ admet n racines distinctes. Sachant que P est de degré n alors par le théorème de d'Alembert-Gauss on sait qu'il admet n racines comptées avec multiplicité. Il s'agit donc maintenant de montrer que ce sont des racines simples. Supposons –par l'absurde– que $\alpha \in \mathbb{C}$ soit une racine de multiplicité $\geqslant 2$. Alors $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$. Donc $\alpha^n - 1 = 0$ et $n\alpha^{n-1} = 0$. De la seconde égalité on déduit $\alpha = 0$, contradictoire avec la première égalité. Donc toutes les racines sont simples. Ainsi les n racines sont distinctes.*

2.3.3 Polynômes irréductibles

Définition 2.3.9. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré supérieure à 1, on dit que P est **irréductible** si pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant P, alors, soit $Q \in \mathbb{K}^*$, soit P et Q sont associés.*

Remarques 2.3.10.

1. *Un polynôme irréductible P est donc un polynôme non constant dont les seuls diviseurs de P sont les constantes ou P lui-même.*
2. *Dans le cas contraire, on dit que P est **réductible** ; il existe alors des polynômes A, B de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P = AB$, avec $\deg A \geqslant 1$ et $\deg B \geqslant 1$.*

Exemples 2.3.2.

– *Tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles.*
– *$X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2) \in \mathbb{R}[X]$ est réductible.*
– *$X^2 - 3 = (X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$ est réductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.*
– *$X^2 + 4 = (X-2i)(X+2i)$ est réductible dans $\mathbb{C}[X]$ mais est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.*

Théorème 2.3.11. *Tout polynôme non constant $A \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles unitaires :*

$$A = \lambda P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_r^{k_r}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ et les P_i sont des polynômes irréductibles distincts.
De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Théorème 2.3.12. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré* 1.

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ la factorisation s'écrit $P = \lambda(X-\alpha_1)^{k_1}(X-\alpha_2)^{k_2}\cdots(X-\alpha_r)^{k_r}$, où $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sont les racines distinctes de P et $k_1, ..., k_r$ sont leurs multiplicités.

preuve

Ce théorème résulte du théorème de d'Alembert-Gauss.

Théorème 2.3.13. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ainsi que les polynômes de degré 2 ayant un discriminant $\Delta < 0$.*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Alors la factorisation s'écrit $P = \lambda(X-\alpha_1)^{k_1}(X-\alpha_2)^{k_2}\cdots(X-\alpha_r)^{k_r}Q_1^{\ell_1}\cdots Q_s^{\ell_s}$, où les α_i sont exactement les racines réelles distinctes de multiplicité k_i et les Q_i sont des polynômes irréductibles de degré 2 : $Q_i = X^2 + \beta_i X + \gamma_i$ avec $\Delta = \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$.

Exemples 2.3.3.

1) Soit $P(X) = X^3 - 3X^2 + 4$. Ecrivons La formule de Taylor de P au point 2.

On a $P'(X) = 3X^2 - 6X$, $P''(X) = 6X - 6$, $P^{(3)}(X) = 6$. Alors $P(2) = 0$, $P'(2) = 0$, $P''(2) = 6$ et $P^{(3)}(2) = 6$.
La formule de Taylor de P au point 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} P(X) &= P(2) + \tfrac{P'(2)}{1!}(X-2) + \tfrac{P''(2)}{2!}(X-2)^2 + \tfrac{P^{(3)}(2)}{3!}(X-2)^3 \\ &= 3(X-2)^2 + (X-2)^3. \\ &= (X-2)^2(3 + X - 2). \\ &= (X-2)^2(X+1). \end{aligned}$$

2) Soit $P(X) = 2X^4(X-1)^3(X^2+1)^2(X^2+X+1)$.
$P(X)$ est déjà décomposé en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ alors que sa décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$P(X) = 2X^4(X-1)^3(X-i)^2(X+i)^2(X-j)(X-j^2)$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

3) Soit $P(X) = X^4 + 1$.

- *Sur $\mathbb{C}$. On peut d'abord décomposer $P(X) = (X^2+i)(X^2-i)$. Les racines de P sont donc les racines carrées complexes de i et $-i$ qui sont $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ respectivement. Ainsi P se factorise dans $\mathbb{C}[X]$:*

  $$P(X) = \big(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\big)\big(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\big)\big(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\big)\big(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\big).$$

- *Sur $\mathbb{R}$. Pour un polynôme à coefficient réels, si α est une racine alors $\bar{\alpha}$ aussi. Dans la décomposition ci-dessus on regroupe les facteurs ayant des* *racines conjuguées, cela doit conduire à un polynôme réel :*

$$\begin{aligned} P(X) &= \left[\big(X-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\big)\big(X-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\big)\right]\left[\big(X+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\big)\big(X+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\big)\right] \\ &= \big[X^2+\sqrt{2}X+1\big]\big[X^2-\sqrt{2}X+1\big], \end{aligned}$$

qui est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.3.14.

1. *Factoriser dans* $\mathbb{R}[X]$ *et* $\mathbb{C}[X]$ *les polynomes suivants :*
   $a)X^4-2$;
   $b)X^8-1$;
   $c)(2X^2+X-2)^2(X^4-1)^3$.

2. *Factoriser dans* $\mathbb{C}[X]$ *le polynôme* $P=X^3+(4+i)X^2+(5-2i)X+2-3i$.

Chapitre 3

Fractions rationnelles

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Définitions et propriétés générales

Définition 3.1.1.
On appelle fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute fraction F de la forme $F = \dfrac{A}{B}$ où A et B sont deux polynômes avec $B \neq 0$, dans ce cas on dit que $\dfrac{A}{B}$ est une forme de F, si de plus A et B n'admettent aucun facteur commun dans leur décomposition en produit de facteurs irréductibles on dit que $\dfrac{A}{B}$ est une forme irréductible de F.
L'ensemble des fractions rationnelles dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}(X)$.

Exemples 3.1.1.

1. *Tout polynôme P de $K[X]$ est une fraction rationnelle car $P = \dfrac{P}{1}$.*
2. *Les fractions $F = \dfrac{2X}{X-1}$, et $G = \dfrac{1}{X^2+3}$ sont sous la forme irréductible.*
3. *Soit la fraction rationnelle $F(x) = \dfrac{X^2-3X+2}{X^2-1}$. Alors :*
   - $\dfrac{X^2-3X+2}{X^2-1}$, $\dfrac{X^3-3X^2+2X}{X^3-X}$ *et* $\dfrac{X-2}{X+1}$ *sont trois formes de F.*
   - *La forme irréductible dans $\mathbb{R}$ de F est $\dfrac{X-2}{X+1}$.*

Propriétés 3.1.2.
Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$, $\dfrac{A}{B}$ est une forme de F et $\dfrac{C}{D}$ est une forme de G.

i) *$F + G$ et $F \times G$ sont des fractions rationnelles dans $\mathbb{K}(X)$.*

ii) Si $G \neq 0$, alors $\dfrac{F}{G} \in \mathbb{K}(X)$.

iii) Si $F \circ G = F(G)$ existe, alors $F \circ G \in \mathbb{K}(X)$.

iv) $F = G \Leftrightarrow AD = BC$.

Exemple 3.1.1. *Soient $F(X) = \frac{1}{X+2}$ et $G(X) = \frac{X-1}{X+1}$ deux fractions rationnelles dans $\mathbb{R}(X)$. On a :*

$$\begin{aligned}
(F+G)(X) &= \frac{1}{X+2} + \frac{X-1}{X+1} \\
&= \frac{X+1+(X-1)(X+2)}{(X+1)(X+2)} \\
&= \frac{X^2+2X-1}{X^2+3X+2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(F \times G)(X) &= \frac{1}{X+2} \times \frac{X-1}{X+1} \\
&= \frac{X-1}{X^2+3X+2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{F}{G}(X) &= \frac{1}{X+2} \times \frac{X+1}{X-1} \\
&= \frac{X+1}{X^2+X-2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(F \circ G)(X) &= \frac{1}{X+2}\left(\frac{X-1}{X+1}\right) \\
&= \frac{1}{\frac{X-1}{X+1}+2} \\
&= \frac{X-1}{3X+1}.
\end{aligned}$$

3.2 Le degré d'une fraction rationnelle

Définition 3.2.1.
Soient $F \in \mathbb{K}(X)$ et $\dfrac{A}{B}$ est une forme quelconque de F. On appelle degré d'une fraction rationnelle F la quantité

$$d^\circ F = d^\circ A - d^\circ B \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}.$$

Exemples 3.2.1.

– *Si $F = \dfrac{3X^4-5X+3}{X^3+3X^2+1}$, alors $d^\circ F = 4-3 = 1$.*

- *Si* $F = \dfrac{iX^5 + 4X^2 - 2}{2X^5 + 3X^2 - 8i}$, *alors* $d^\circ F = 5 - 5 = 0$.
- *Si* $F = \dfrac{2X - 2}{-X^4 - X^2 + 3X}$, *alors* $d^\circ F = 1 - 4 = -3$.

Remarque 3.2.2.
$d^\circ F = 0$, ne signifie pas que F une constante non nulle.

Propriétés 3.2.3.
Soient F, $G \in \mathbb{K}(X)$, on a :

1. $d^\circ F = -\infty \Leftrightarrow F = 0$.
2. $d^\circ(F + G) \leqslant \max(d^\circ F, d^\circ G)$.
3. $d^\circ(F \times G) = d^\circ F + d^\circ G$.
4. *Si* $G \neq 0$, *alors* $d^\circ\left(\dfrac{F}{G}\right) = d^\circ F - d^\circ G$

3.3 Les pôles d'une fraction rationnelle

Définition 3.3.1.
Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ sous forme irréductible. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est un pôle de F si α est une racine de B. Si α est une racine de B d'ordre k, on dit que α est un pôle de F d'ordre k. Un pôle d'ordre 1 est dit simple.

Exemple 3.3.1. *Soit* $F = \dfrac{X^2 + 2X - 3}{(X^2 + 4)(X - 1)^3}$.
F n'est pas sous forme irréductible car on a : $X^2 + 2X - 3 = (X - 1)(X + 3)$ alors $X - 1$ est diviseur commun du numérateur et dénominateur. $\dfrac{X + 3}{(X^2 + 4)(X - 1)^2}$ est une forme irréductible de F,

1) *Dans $\mathbb{R}(X)$, 1 est un pôle double de F.*
2) *Dans $\mathbb{C}(X)$, les pôles de F sont $2i$, $-2i$ et 1,*

   - *$2i$, $-2i$ sont simples.*
   - *1 est double.*

Remarque 3.3.2.
Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est un pôle d'ordre k d'une fraction $F = \dfrac{A}{B}$, alors il existe un polynôme B_1 tel que

$$F = \frac{A}{(X - \alpha)^k B_1} \quad \text{avec } B_1(\alpha) \neq 0.$$

Proposition 3.3.3.
Soient $F \in \mathbb{K}(X)$, $\dfrac{A}{B}$ est une forme quelconque de F et $\alpha \in \mathbb{K}$. Si $A(\alpha) \neq 0$, alors :
α est un pôle de F d'ordre $k \Leftrightarrow \alpha$ est une racine de B d'ordre k.

Exemple 3.3.2. *Soit* $F = \dfrac{A}{B} = \dfrac{X^2 - 3X}{X(X-2)^4}$. *On a* $A(2) = -2 \neq 0$ *et* 2 *est une racine de* B *d'ordre* 4, *alors* 2 *est un pôle de* F *d'ordre* 4.

3.4 Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

3.4.1 Etape 1 : Partie entiére et partie principale

Théorème et définitions 3.4.1.
Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. *Il existe un unique polynôme* E *et une unique fraction rationnelle* G *telle que*

$$\begin{cases} F = E + G, \\ \\ d^\circ G < 0. \end{cases}$$

Le polynôme E *est le quotient de la division euclidienne de* A *par* B *et* $G = \frac{R}{B}$ *avec* R *est le reste de cette même division euclidienne. Le polynôme* E *est appelé la partie entiére de* F *et* G *sa partie principale (ou polaire).*

Méthode : *Pour déterminer la partie entiére d'une fraction rationnelle* $F = \dfrac{A}{B}$.

- *Si* $d^\circ F < 0$, *alors la partie entiére est le polynôme nul.*
- *Si* $d^\circ F \geqslant 0$, *alors on effectue la division euclidienne de* A *par* B, *et la partie entiére est le quotient de la division. On obtient en effet* $A = BE + R$, *avec* $d^\circ R < d^\circ B$, *donc*

$$F = \frac{A}{B} = \frac{BE + R}{B} = \frac{BE}{B} + \frac{R}{B} = E + \frac{R}{B}$$

Exemple 3.4.1. *Soit* $F = \dfrac{X^4 - 3X^3 + X^2 - 1 + i}{X^2 - X + 2}$.
Effectuons la division euclidienne de $X^4 - 3X^3 + X^2 - 1 + i$ *par* $X^2 - X + 2$.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
X^4 & - & 3X^3 & + & X^2 & & & - & 1+i & X^2 - X + 2 \\ \cline{10-10}
X^4 & - & X^3 & + & 2X^2 & & & & & X^2 - 2X - 3 \\ \cline{1-5}
 & - & 2X^3 & - & X^2 & & & - & 1+i & \\
 & - & 2X^3 & + & 2X^2 & - & 4X & & & \\ \cline{1-7}
 & & & - & 3X^2 & + & 4X & - & 1+i & \\
 & & & - & 3X^2 & + & 3X & - & 6 & \\ \cline{5-9}
 & & & & & & X & + & 5+i &
\end{array}$$

On trouve $F = X^2 - 2X - 3 + \dfrac{X + 5 + i}{X^2 - X + 2}$, *alors la partie entiére de* F *est*

$$E = X^2 - 2X - 3$$

et la partie principale de F est

$$G = \frac{X+5+i}{X^2-X+2}.$$

Exercice 3.4.2.

Déterminer la partie entiére et la partie principale de la fraction rationnelle F dans les cas suivants :

1. $F = \frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$.
2. $F = \frac{X^3+X+1}{(X-1)^3}$.
3. $F = \frac{X+1}{(X^2+3)}$.
4. $F = \frac{5X^4+(2+i)X^3-X+1}{(X^2+X)}$.

3.4.2 Etape 2 : Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

Soit $F = \dfrac{A}{B} = E + \dfrac{R}{B}$ où $\dfrac{R}{B}$ une forme irréductible de la partie principale de F.

i) Si *$\mathbb{K} = \mathbb{C}$, B peut avoir l'écriture suivante*

$$B = d\prod_{i=1}^{i=n}(X-a_i)^{\alpha_i} = d(X-a_1)^{\alpha_1}\cdots(X-a_n)^{\alpha_n},$$

où $a_1, a_2, \cdots a_n$ sont les racines de B de multiplicités respectives $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$, et d est le coefficient dominant de B. On a ainsi

$$F = E + \frac{R}{d(X-a_1)^{\alpha_1}\cdots(X-a_n)^{\alpha_n}}.$$

ii) Si *$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on sait que B se décompose sur $\mathbb{R}$ sous la forme*

$$\begin{aligned} B &= d\prod_{i=1}^{i=n}(X-a_i)^{\alpha_i}\prod_{k=1}^{k=p}(X^2+b_kX+c_k)^{\beta_k} \\ &= d(X-a_1)^{\alpha_1}\cdots(X-a_n)^{\alpha_n}(X^2+b_1X+c_1)^{\beta_1}\cdots(X^2+b_pX+c_p)^{\beta_p}, \end{aligned}$$

où $a_1, \cdots, a_n$ sont les racines réelles de B de multiplicités respectives $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, et d est le coefficient dominant de B, $(X^2+b_iX+c_i)$ des trinômes de discriminant strictement négatif et $\beta_1, \cdots, \beta_p$ étant des entiers strictement positifs. On a ainsi

$$F = E + \frac{R}{d(X-a_1)^{\alpha_1}\cdots(X-a_n)^{\alpha_n}(X^2+b_1X+c_1)^{\beta_1}\cdots(X^2+b_pX+c_p)^{\beta_p}}.$$

3.4.3 Etape 3 : Décomposition de la partie principale en éléments simples

a. *Cas :* $\mathbb{K}(X) = \mathbb{C}(X)$

Théorème et définitions 3.4.3.

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ *une fraction rationnelle dans* $\mathbb{C}(X)$. *On note* $a_1, \cdots, a_n$ *les pôles de* F *de multiplicités respectives* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ *i.e..*

$$B = (X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_n)^{\alpha_n}.$$

Alors la fraction rationnelle F *s'écrit de maniére unique sous la forme*

$$\begin{aligned} F &= E + \sum_{k=1}^{k=\alpha_1} \frac{\lambda_{1k}}{(X-a_1)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{k=\alpha_n} \frac{\lambda_{nk}}{(X-a_n)^k} \\ &= E + \Big(\frac{\lambda_{11}}{X-a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X-a_1)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X-a_1)^{\alpha_1}} \Big) + \cdots + \\ &+ \quad \Big(\frac{\lambda_{n1}}{X-a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X-a_n)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X-a_n)^{\alpha_n}} \Big) \end{aligned}$$

où E *la partie entiére de* F *est un polynôme nul, ou de degré* $d^\circ A - d^\circ B$ *et les coefficients* λ_{ij} *sont des complexes. Cette écriture s'appelle la décomposition en éléments simples* ***(DES)*** *de* F *dans* $\mathbb{C}(X)$.

$\dfrac{\lambda_{ij}}{(X-a_i)^j}$, *sont appelés les éléments simples de* F *dans* $\mathbb{C}(X)$.

$\dfrac{\lambda_{i1}}{X-a_i} + \dfrac{\lambda_{i2}}{(X-a_i)^2} + \cdots + \dfrac{\lambda_{i\alpha_j}}{(X-a_i)^{\alpha_j}}$ *est appelée la partie principale de* F *associée au pôle* a_i.

Remarque 3.4.4.

Dans la partie associée à chaque pôle, le coefficient correspondant à l'élément simple de plus haut degré est nécessairement non nul. En d'autres termes

$$\lambda_{1\alpha_1} \neq 0, \cdots, \lambda_{n\alpha_n} \neq 0.$$

Exemples 3.4.1.

1) $F_1 = \dfrac{X+2}{(X-2)(X-1)(X+3)}$, *on a* $d^\circ F_1 = -2$, *donc la partie entiére de* F_1 *est nulle. Ainsi* F_1 *a une* ***DES*** *de la forme*

$$F_1 = \frac{A}{X-2} + \frac{B}{X-1} + \frac{C}{X+3},\ A, B, C \in \mathbb{R}.$$

2) $F_2 = \dfrac{2X^4 + X + 1}{(X-1)(X^2+1)} = \dfrac{2X^4 + X + 1}{(X-1)(X-i)(X+i)}$, *on a* $d^\circ F_2 = 1$, *donc la partie entiére de* F_2 *est un polynôme de degré* 1. *Ainsi* F_2 *a une* ***DES*** *de la forme*

$$F_2 = aX + b + \frac{A}{X-1} + \frac{B}{(X-i)} + \frac{C}{X+i},\ A, B, C, a, b \in \mathbb{C}.$$

3) $F_3 = \dfrac{-X^5}{X(X^2-4)^2}$, *on a* $d^\circ F_3 = 0$, *donc la partie entiére de* F_3 *est égale à* -1. *Ainsi* F_3 *a une* ***DES*** *de la forme*

$$F_3 = -1+\frac{A}{X}+\frac{B}{(X-2)}+\frac{C}{(X-2)^2}+\frac{D}{X+2}+\frac{L}{(X+2)^2},\ A,B,C,D,L \in \mathbb{R}.$$

b. Cas : $\mathbb{K}(X) = \mathbb{R}(X)$

Théorème et définitions 3.4.5.

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ *une fraction rationnelle dans* $\mathbb{R}(X)$, *la décomposition en facteurs irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$ *du dénominateur s'écrit :*

$B = (X-a_1)^{\alpha_1}\cdots(X-a_1)^{\alpha_n}(X^2+b_1X+c_1)^{\beta_1}\cdots(X^2+b_pX+c_p)^{\beta_p}$.

Alors la fraction rationnelle F *s'écrit de façon unique sous la forme*

$$\begin{aligned}
F &= E+\sum_{k=1}^{k=\alpha_1}\frac{\lambda_{1k}}{(X-a_1)^k}+\cdots+\sum_{k=1}^{k=\alpha_n}\frac{\lambda_{nk}}{(X-a_n)^k}+ \\
&+ \sum_{k=1}^{k=\beta_1}\frac{\mu_{1k}X+\gamma_{1k}}{(X^2+b_1X+c_1)^k}+\cdots+\sum_{k=1}^{k=\beta_p}\frac{\mu_{pk}X+\gamma_{pk}}{(X^2+b_pX+c_p)^k} \\
&= E+\Big(\frac{\lambda_{11}}{X-a_1}+\frac{\lambda_{12}}{(X-a)^2}+\cdots+\frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X-a)^{\alpha_1}}\Big)+\cdots+ \\
&+ \Big(\frac{\lambda_{n1}}{X-a_n}+\frac{\lambda_{n2}}{(X-a_n)^2}+\cdots+\frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X-a_n)^{\alpha_n}}\Big)+ \\
&+ \Big(\frac{\mu_{11}X+\gamma_{11}}{X^2+b_1X+c_1}+\frac{\mu_{12}X+\gamma_{12}}{(X^2+b_1X+c_1)^2}+\cdots+\frac{\mu_{1\beta_1}X+\gamma_{1\beta_1}}{(X^2+b_2X+c_1)^{\beta_1}}\Big)+\cdots+ \\
&+ \Big(\frac{\mu_{p1}X+\gamma_{p1}}{X^2+b_pX+c_p}+\frac{\mu_{p2}X+\gamma_{p2}}{(X^2+b_pX+c_p)^2}+\cdots+\frac{\mu_{p\beta_p}X+\gamma_{p\beta_p}}{(X^2+b_pX+c_p)^{\beta_p}}\Big)
\end{aligned}$$

où E *la partie entiére de* F *est un polynôme nul, ou de degré* $d^\circ A - d^\circ B$ *et les coefficients* λ_{ij}, μ_{ij} *et* γ_{ij} *sont des réels tels que* $\lambda_{i\alpha_i} \neq 0$ *et* $(\mu_{i\beta_i}, \gamma_{i\beta_i}) \neq (0,0)$. *Cette écriture s'appelle la décomposition en éléments simples* ***(DES)*** *de* F *dans* $\mathbb{R}(X)$.

$\dfrac{\lambda_{ij}}{(X-a_i)^j}$, *sont appelés les éléments simples de premiére espéce.*

$\dfrac{\mu_{ij}X+\gamma_{ij}}{(X^2+b_iX+c_i)^j}$, *sont appelés les éléments simples de seconde espéce.*

Exemples 3.4.2. A, B, C, D, L, M *désignent des réels.*

a. $G_1 = \dfrac{2X-1}{(X-1)(X+2)^2}$ *a une* ***DES*** *de la forme*

$$G_1 = \frac{A}{X-1}+\frac{B}{X+2}+\frac{C}{(X+2)^2}.$$

b. $G_2 = \dfrac{3X+1}{(X-3)(X^2+5)^2}$ *a une* ***DES*** *de la forme*

$$G_2 = \frac{A}{(X-3)} + \frac{BX+C}{X^2+5} + \frac{DX+L}{(X^2+5)^2}.$$

c. $G_3 = \dfrac{3X^4-1}{(X^2-2X+3)^3}$ *a une* ***DES*** *de la forme*

$$G_3 = \frac{AX+B}{X^2-2X+3} + \frac{CX+D}{(X^2-2X+3)^2} + \frac{LX+M}{(X^2-2X+3)^3}.$$

3.5 Techniques de DES : calcul des coeffcients

3.5.1 Méthode de décomposition par identification des coefficients

Exemple 3.5.1. *Décomposons la fraction rationnelle* $G = \frac{X^2+X+1}{X^3-X}$ *en éléments simples par identfication des coefficients.*

On a $d°G = -1$ *et* G *admet trois pôles simples* 0, 1 *et* -1. *Alors la DES de* G *est sous forme :*

$$\begin{aligned} G &= \frac{X^2+X+1}{X(X-1)(X+1)} \\ &= \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}, \end{aligned}$$

implique que

$$\begin{aligned} \frac{a(X^2-1)+b(X^2+X)+c(X^2-X)}{X(X-1)(X+1)} &= \frac{(a+b+c)X^2+(b-c)X-a}{X(X-1)(X+1)} \\ &= \frac{X^2+X+1}{X(X-1)(X+1)}, \end{aligned}$$

alors

$$(a+b+c)X^2+(b-c)X-a = X^2+X+1,$$

donc $a = -1$ $b+c = 2$ *et* $b-c = 1$. *Alors* $a = -1$, $b = \frac{3}{2}$ *et* $c = \frac{3}{2}$.

D'où la DES de G *est :*

$$G = \frac{-1}{X} + \frac{3/2}{X-1} + \frac{1/2}{X+1}$$

3.5.2 Technique de base : multiplication/substitution

Proposition 3.5.1.
Soit a un pôle d'ordre m d'une fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B}$. Le coefficient λ du terme $\dfrac{\lambda}{(X-a)^m}$ dans la ***DES*** *de F est*

$$\lambda = [(X-a)^m F](a)$$

Remarque 3.5.2.
Cette technique va permettre de déterminer entiérement la ***DES*** *d'une fraction rationnelle n'admet que des pôles simples. Pour les pôles multiples, d'autres techniques sont données ci-dessous, mais on peut également raisonner de proche en proche : en calculant $F - \dfrac{\lambda}{(X-a)^m}$ (où λ est le coefficient déjà trouvé), on obtient une fraction dont a est pôle d'ordre $m-1$, et on peut recommencer.*

Exemples 3.5.1.

1. *Décomposons la fraction rationnelle $F_1 = \dfrac{X-2}{X(X+2)(X-1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.*
   On a $d^\circ F_1 = -3$, donc la partie entiére de F_1 est nulle. Ainsi F_1 a une ***DES*** *de la forme*
   $$F_1 = \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X-1} + \frac{\lambda_3}{X+2} \text{ où } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}.$$
   Calculons λ_1, λ_2 et λ_3. D'aprés la proposition on obtient
   $$\lambda_1 = [X \times F_1](0) = \Big[\frac{(X-2)}{(X-1)(X+2)}\Big](0) = 1$$
   $$\lambda_2 = [(X-1) \times F_1](1) = \Big[\frac{(X-2)}{X(X+2)}\Big](1) = \frac{-1}{3}$$
   $$\lambda_3 = [(X+2) \times F_1](-2) = \Big[\frac{(X-2)}{X(X-1)}\Big](-2) = \frac{-2}{3}$$
   Ainsi, la ***DES*** *de F_1 est $F_1 = \dfrac{1}{X} + \dfrac{-1/3}{X-1} + \dfrac{-2/3}{X+2}$.*

2. *Décomposons la fraction rationnelle $F_2 = \dfrac{X^4+X^3+X+2}{(X-1)(X+1)^2}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.*
   On a $d^\circ F_2 = 1$, donc la partie entiére de F_2 est un polynôme de degré 1 qui est le quotient de la division euclidienne de X^4+X^3+X+2 par $(X-1)(X+1)^2$, on obtient $E = X$ et la partie principale de F_2 est $\dfrac{X^2+2X+2}{(X-1)(X+1)^2}$.

*Ainsi la **DES** de F_2 est de la forme*

$$F_2 = X + \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta_1}{X+1} + \frac{\beta_2}{(X+1)^2}$$

où $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.
- *Calcul de α et β_2*

$$\alpha = [(X-1) \times F_2](1) = \Big[\frac{(X^4+X^3+X+2)}{(X+1)^2}\Big](1) = \frac{5}{4}.$$

$$\beta_2 = [(X+1)^2 \times F_2](-1) = \Big[\frac{(X^4+X^3+X+2)}{X-1}\Big](-1) = \frac{-1}{2}.$$

Donc $F_2 = X + \frac{5/4}{X-1} + \frac{\beta_1}{X+1} + \frac{-1/2}{(X+1)^2}$.
- *Calcul de β_1. On peut calculer*

$$F_2' = F_2 + \frac{1/2}{(X+2)^2} = \frac{X^4+X^3+X+2}{(X-1)(X+1)^2} + \frac{1/2}{(X+1)^2} = \frac{X^4+X^3+3/2X+3/2}{(X-1)(X+1)^2}$$

En divisant $X^4+X^3+3/2X+3/2$ par $X+1$, on obtient $X^4+X^3+3/2X+3/2 = (X+1)(X^3+3/2)$, et on a donc

$$F_2' = \frac{X^4+X^3+3/2X+3/2}{(X-1)(X+1)}.$$

On ré-applique la méthode ci-dessus (sur la fraction , -1 n'est plus pôle double, mais simple), et on obtient

$$\beta_1 = [(X+1) \times F_2'](-1) = \Big[\frac{(X^3+3/2)}{X-1}\Big](-1) = \frac{-1}{4}.$$

On en déduit alors la décomposition de F_2 en éléments simples sur $\mathbb{R}$

$$F_2 = X + \frac{5/4}{X-1} + \frac{-1/4}{X+1} + \frac{-1/2}{(X+1)^2}.$$

3.5.3 Evaluation

*Lorsqu'il ne reste plus qu'un ou deux coeffcients à déterminer dans la **DES**, on peut remplacer X par des valeurs particuliers.*

Exemple 3.5.2. *Revenons à l'exemple précédent dans lequel on a trouver pour la fraction rationnelle F_2*

$$F_2 = X + \frac{5/4}{X-1} + \frac{\beta_1}{X+1} + \frac{-1/2}{(X+1)^2},$$

au lieu de répéter la méthode multiplication/substitution, on peut remplacer X par la valeur 0. On a donc $F_2(0) = -2 = 0 - \frac{5}{4} + \beta_1 + \frac{-1}{2}$ alors $\beta_1 = -2 + \frac{5}{4} + \frac{1}{2}$, ce qui donne $\beta_1 = \frac{-1}{4}$.

3.5.4 Parité

*Soit F est une fraction rationnelle paire ou impaire. Si a est un pôle d'ordre m de F , alors $-a$ est un pôle d'ordre m de F . En comparant les **DES** de $F(X)$ et $F(-X) = F(X)$, et en utilisant leur unicité, on obtient des relations entre les coeffcients de la **DES** de F.*

Exemple 3.5.3. *Considérons la fraction rationnelle $F = \dfrac{3X^2+1}{(X^2-4)^2}$ de $\mathbb{R}(X)$. La factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ du dénominateur s'écrit :*

$$(X^2-4)^2 = (X-2)^2(X+2)^2.$$

La fraction F posséde sur $\mathbb{R}$ deux pôles doubles (les réels 2 et -2) . Sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit (la partie entiére est nulle) :

$$F = \frac{\lambda_1}{X-2} + \frac{\lambda_2}{(X-2)^2} + \frac{\lambda'_1}{X+2} + \frac{\lambda'_2}{(X+2)^2}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1$ et λ'_2 sont des réels. F est paire : $F(X) = F(-X)$. Donc

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{\lambda_1}{X-2} + \frac{\lambda_2}{(X-2)^2} + \frac{\lambda'_1}{X+2} + \frac{\lambda'_2}{(X+2)^2} \\ &= F(-X) \\ &= \frac{-\lambda_1}{X+2} + \frac{\lambda_2}{(X+2)^2} + \frac{-\lambda'_1}{X-2} + \frac{\lambda'_2}{(X-2)^2}. \end{aligned}$$

*L'unicité de la **DES** impose $\lambda'_1 = -\lambda_1$ et $\lambda'_2 = \lambda_2$. On a donc*

$$F = \frac{\lambda_1}{X-2} + \frac{\lambda_2}{(X-2)^2} - \frac{\lambda_1}{X+2} + \frac{\lambda_2}{(X+2)^2},$$

et il faut calculer seulement deux coefficients (λ_1 et λ_2) au lieu des quatre coefficients. Le coefficient λ_2 s'obtient en multipliant par $(X-2)^2$ puis en remplaçeant X par 2 :

$$\lambda_2 = [(X-2)^2 \times F](2) = \Big[\frac{(3X^2+1)}{(X+2)^2}\Big](2) = 13/16.$$

Pour obtenir le coefficient λ_1 on peut remplacer X par 0 par exemple, on obtient :

$$F(0) = \frac{1}{16} = -\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2.$$

On conclut que $\lambda_1 = \frac{11}{32}$. Alors

$$F = \frac{11/32}{X-2} + \frac{13/16}{(X-2)^2} - \frac{11/32}{X+2} + \frac{13/16}{(X+2)^2}.$$

Exercice 3.5.3.

Décomposer en élément simple la fraction rationnelle $F = \dfrac{X+3}{(X^2-1)^3}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

3.5.5 Limite de $xF(x)$ à l'infini

Soit F est une fraction rationnelle de degré strictement négatif. Alors la fonction $x \to xF(x)$ a une limite finie en l'infini. On peut ainsi trouver des relations entre les coeffcients de la ***DES*** *de F.*

Exemple 3.5.4. *Considérons la fraction rationnelle $G = \dfrac{4X}{X^4-1}$ de $\mathbb{R}(X)$ La factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ du dénominateur s'écrit :*

$$X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1).$$

La fraction G posséde sur $\mathbb{R}$ deux pôles simples (les réels 1 et -1). Sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit ainsi (la partie entiére est nulle) :

$$G = \frac{\alpha_1}{X-1} + \frac{\alpha_2}{X+1} + \frac{\alpha_3 X + \alpha_4}{X^2+1}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ dans $\mathbb{R}$. G est impaire : $G(X) = -G(-X)$. Donc

$$\begin{aligned} G(X) &= \frac{\alpha_1}{X-1} + \frac{\alpha_2}{X+1} + \frac{\alpha_3 X + \alpha_4}{X^2+1} \\ &= \frac{\alpha_1}{X+1} + \frac{\alpha_2}{X-1} + \frac{\alpha_3 X - \alpha_4}{X^2+1} = -G(-X). \end{aligned}$$

Par unicité de la ***DES****, on en déduit $\alpha_2 = \alpha_1$ et $\alpha_4 = 0$. On a donc*

$$G = \frac{\alpha_1}{X-1} + \frac{\alpha_1}{X+1} + \frac{\alpha_3 X}{X^2+1}.$$

Le coefficient α_1 s'obtient en multipliant par $X-1$ puis en remplaçant X par 1 :

$$\alpha_1 = [(X-1) \times G](1) = \Big[\frac{4X}{(X+1)(X^2+1)}\Big](1) = 1.$$

Pour calculer α_3, on a d'une part

$$\lim_{x \to +\infty} xG(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{x^4-1} = 0,$$

et d'autre part

$$\lim_{x \to +\infty} xG(x) = \lim_{x \to +\infty} \Big(\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} + \frac{\alpha_3 x^2}{x^2+1}\Big) = 1 + 1 + \alpha_3 = \alpha_3 + 2$$

on obtient alors $\alpha_3 + 2 = 0$ puis $\alpha_3 = -2$. Finalement,

$$G = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} + \frac{-2X}{X^2+1}.$$

3.5.6 Division suivant les puissances croissantes

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ *une fraction de* $\mathbb{K}(X)$ *irréductible, posséde (au moins) un pôle* $a \in \mathbb{K}$ *d'ordre* n*. Le dénominateur* B *se factorise alors sous la forme suivante :*

$$B = (X-a)^n B_0 \text{ avec } B_0(a) \neq 0.$$

où B_0 *est un polynôme de* $\mathbb{K}[X]$*. Donc*

$$F = \frac{A}{(X-a)^n B_0}.$$

Dans la décomposition de F *en éléments simples sur* $\mathbb{K}(X)$*, la partie principale associée au pôle* a *s'écrit :*

$$\frac{\lambda_1}{X-a} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{(X-a)^n}$$

où, parmi les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ *de* $\mathbb{K}$*, seul* λ_n *est nécessairement non nul. Calcul simultané des coefficients* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$*. La méthode se décompose en trois étapes.*

Étape 1 : *elle consiste en un changement d'indéterminée :* $Y = X - a$ *alors* $X = Y + a$*. D'où*

$$F = \frac{A(Y+a)}{Y^n B_0(Y+a)} \text{ avec } B_0(Y+a)(0) = B_0(a) \neq 0.$$

Étape 2 : *en effectuant la division suivant les puissances croissantes à l'ordre* $n-1$ *du polynôme* $A(Y+a)$ *de* $\mathbb{K}[Y]$ *par le polynôme* $B_0(Y+a)$ *de* $\mathbb{K}[Y]$*. Donc il existe* $Q(Y), R(Y) \in \mathbb{K}[Y]$ *tels que*

$$\begin{cases} A(Y+a) = B_0(Y+a)Q(Y) + Y^n R(Y) \\ \\ d^\circ Q(Y) \leqslant n-1 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} F &= \frac{B_0(Y+a)Q(Y) + Y^n R(Y)}{Y^n B_0(Y+a)} \\ &= \frac{Q(Y)}{Y^n} + \frac{R(Y)}{B_0(Y+a)}. \end{aligned}$$

Comme $d^\circ Q(Y) \leqslant n-1$*, alors il existe* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *tels que*

$$Q(Y) = \alpha_1 Y^{n-1} + \alpha_2 Y^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} Y + \alpha_n.$$

Étape 3 : *on déduit de l'égalité précédente :*

$$
\begin{aligned}
\frac{Q(Y)}{Y^n} &= \frac{\alpha_1 Y^{n-1} + \alpha_2 Y^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} Y + \alpha_n}{Y^n} \\
&= \frac{\alpha_1}{Y} + \frac{\alpha_2}{Y^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{Y^n} \\
&= \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(X-a)^n}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $\lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2, \cdots, \lambda_n = \alpha_n$.

Exemple 3.5.5.

Soit $F = \dfrac{-4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$. *Appliquons cette méthode pour déterminer la* ***DES*** *de* F *dans* $\mathbb{R}(X)$.
On a $d^\circ F = -5 < 0$, *alors la partie entiére de* F *est nulle. Posons* $Y = X - 1$, *alors* $X = Y + 1$. *On obtient :*

$-4X = -4Y - 4$ *et* $(X^2+1)^2 = ((Y+1)^2+1)^2 = 4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4$.

Donc

$$F = \frac{-4Y-4}{Y^2(4+8Y+8Y^2+4Y^3+Y^4)}.$$

En faisant la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 1 *de* $-4Y-4$ *par* $4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr|c}
-4 & - & 4Y & & & & & & & & & 4+8Y+8Y^2+4Y^3+Y^4 \\
\cline{12-12}
4 & + & 8Y & + & 8Y^2 & + & 4Y^3 & + & Y^4 & & & -1+Y \\
\cline{1-9}
 & & 4Y & + & 8Y^2 & + & 4Y^3 & + & Y^4 & & & \\
 & & -4Y & - & -8Y^2 & - & -8Y^3 & - & 4Y^4 & - & Y^5 & \\
\cline{3-11}
 & & & & -4Y^3 & - & 3Y^4 & - & Y^5 & & &
\end{array}
$$

On peut ainsi écrire : $-4-4Y = (-1+Y)(4+8Y+8Y^2+4Y^3+Y^4)+Y^2(-4Y-3Y^2-Y^3)$. *D'où*

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{(Y-1)(Y^4+4Y^3+8Y^2+8Y+4) + Y^2(-Y^3-3Y^2-4Y)}{Y^2(Y^4+4Y^3+8Y^2+8Y+4)} \\
&= \frac{Y-1}{Y^2} + \frac{-Y^3-4Y^2-4Y}{Y^4+4Y^3+8Y^2+8Y+4} \\
&= \frac{1}{Y} + \frac{-1}{Y^2} + \frac{-Y^3-3Y^2-4Y}{Y^4+4Y^3+8Y^2+8Y+4}.
\end{aligned}
$$

Revenons enfin à l'indéterminée X. *Remplaçons pour cela* Y *par* $X-1$. *On obtient :*

$$F = \frac{1}{X-1} + \frac{-1}{(X-1)^2} + \frac{-X^3-X+2}{(X^2+1)^2}$$

car $-(X-1)^3 - 3(X-1)^2 - 4(X-1) = -X^3 - X + 2$.
Remarquons que la partie associée au polynôme X^2+1 *s'obtient alors facilement à partir de la dernière fraction rationnelle de l'égalité ci-dessus. On a*

$$-X^3 - X + 2 = -X(X^2+1) + 2.$$

On en déduit alors :

$$\frac{-X^3 - X + 2}{(X^2+1)^2} = \frac{-X(X^2+1)+2}{(X^2+1)^2} = \frac{-X}{X^2+1} + \frac{2}{(X^2+1)^2}$$

*On en déduit alors la **DES** de F sur $\mathbb{R}$:*

$$F = \frac{1}{X-1} + \frac{-1}{(X-1)^2} + \frac{-X}{X^2+1} + \frac{2}{(X^2+1)^2}.$$

Exercice 3.5.4.

i)Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$, en raisonnant par substitution

1. $F = \frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$,
2. $G = \frac{X^3+X+1}{(X-1)^2(X+1)}$.

ii)Décomposer la fraction rationnelle suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$. à l'aide d'une division selon les puissances croissantes :

$$G = \frac{4X^4 - 10X^3 + 8X^2 - 4X + 1}{X^3(X-1)^2}.$$

Exercice 3.5.5.

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles :

$$\frac{X^5+X+1}{X^4-1},$$

$$\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}.$$

Chapitre 4

Calcul matriciel, déterminants et résoltution des systèmes linéaires

Dans tous le chapitre, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Calcul matriciel

4.1.1 Définitions et notations

Définition 4.1.1.
*Soit m et n deux entiers naturels . On appelle matrice A de type (m, n) (ou d'ordre $m \times n$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de m **lignes** et n **colonnes** d'éléments de $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices de type (m, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.*
*Les nombres du tableau sont appelés les **coefficients** de la matrice A.*
Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$.
Une matrice A est représentée de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ou \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou encore

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \quad ou \quad A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.$$

Exemples 4.1.1.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

A est une matrice 2×3 c-à-d $A \in \mathcal{M}_{2\,3}(\mathbb{R})$ avec $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = -2$, $a_{2,2} = 3$ et $a_{2,3} = 7$.

2.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_{3\,3}(\mathbb{R})$. $a_{11} = -3$, $a_{22} = 6$ et $a_{33} = 5$.

4.1.2 Matrices particulières

Soient m et n deux entiers non nuls et A une matrice d'ordre $m \times n$.

1) *Si $m = 1$, on dit que A est une matrice ligne, on la note*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix}$$

2) *Si $n = 1$, on dit que A est une matrice colonne, on la note*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

3) *Si $m = n$, on dit que A est une matrice carée d'ordre n. On note par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Exemples 4.1.2.

i) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$ *est une matrice ligne d'ordre 4.*

ii) $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ *est une matrice colonne d'ordre 3.*

iii) $C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & \sqrt{3} & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *est une matrice carrée d'ordre 4.*

Définitions 4.1.2.
On dit qu'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ est :

1. ***Triangulaire supérieure*** *si $i > j$ alors $a_{ij} = 0$.*
2. ***Triangulaire inférieure*** *si $i < j$ alors $a_{ij} = 0$.*
3. ***Diagonale*** *si $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Une matrice diagonale est de la forme*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On appelle diagonale de A l'ensemble des coefficients de A telle que $i = j$ et on la note ***Diag(A)*** $= \{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$.

4. *La matrice diagonale d'ordre n dont les éléments de la diagonale sont tous égaux à 1 est appelée matrice identité d'ordre n notée $\mathbb{I}_n$.*

$$\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

5. *La matrice de type (m, n) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée matrice nulle et notée 0_{mn} ou 0.*

Exemples 4.1.3.

1. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire supérieure.*
2. *La matrice* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire inférieure.*
3. *La matrice* $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice diagonale.*
4. $\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice identité d'ordre* 3.
5. $0_{4,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *la matrice nulle de type* $(4, 3)$.

Définition 4.1.3. (Egalité de deux matrices)
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ deux matrices de même ordre $m \times n$ sur $\mathbb{K}$. Les matrices A et B sont égales, et on note $A = B$, si pour tout couple (i, j) tel que $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $a_{ij} = b_{ij}$

Exemple 4.1.1.
Soient les deux matrices de type $(4, 3)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & b \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & c & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ e & d & -1 \end{pmatrix}, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

Alors $\quad A = B \iff a = 0,\ b = -1\ c = 1\ d = 0 \text{ et } e = -3$

4.1.3 Opérations sur les matrices

⋆ ***Addition de matrices***

Définition 4.1.4.
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ *deux matrices de méme type* (m, n). *La somme* $A + B$ *est aussi une matrice de type* (m, n), *définie par :*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$

Exemple 4.1.2. *Soient les deux matrices de type* $(3, 4)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -4 & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ -3 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Alors la somme de A *et* B *est la matrice de type* $(3, 4)$ *suivante :*

$$A + B = \begin{pmatrix} 0+3 & 2+1 & -3+2 & 5+4 \\ -1-1 & 4+0 & -4+4 & 0-1 \\ 6-3 & 2+4 & 5-2 & 5+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 9 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.1.5. *La somme de deux matrices d'ordres différents n'est pas définie.*

Proposition 4.1.6. *Soit* A, B, C *trois matrices de même ordre* $m \times n$.

(a) $A + B = A + B$, *(commutativité).*

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$, *(associativité).*

(c) $A + 0_{mn} = A$.

(d) Si $A = (a_{ij})$ *et* $B = (-a_{ij})$, *alors* $A + B = 0_{mn}$, *(*B *est dite l'opposé de* A*).*

⋆ ***Produit d'une matrice par un scalaire***

Définition 4.1.7.
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ *de type* (m, n) *sur* $\mathbb{K}$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$. *On appelle produit de* A *par* α, *et on note* $\alpha.A$ *ou* αA, *la matrice de type* (m, n) *sur* $\mathbb{K}$ *définie par*

$$\alpha.A = (\alpha.a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$

Exemple 4.1.3. *Si* $\alpha = 3$ *et* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. *Alors* $\alpha.A = 3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$

Proposition 4.1.8. *Soient* A, $B \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ *deux matrices de même ordre et* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}$.

i) $0.A = 0_{mn}$ *et* $1.A = A$.

ii) $\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B$.

iii) $(\alpha+\beta)A = \alpha.A + \beta.A$.

iv) $(\alpha \times \beta)A = \alpha(\beta.A)$.

$\star$ ***Produit de matrices***

Soient $L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})$ *et* $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Alors $L \times C$*, noté aussi* LC*, est une matrice de taille* 1×1 *dont l'unique coefficient est* $L \times C = \sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$*. Ce nombre est le produit scalaire des vecteurs* L *et* C.

Exemple 4.1.4. $U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $U.V = 6$.

Définition 4.1.9.
Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ *une matrice de type* (m,n) *sur* $\mathbb{K}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ *une matrice de type* (n,p) *sur* $\mathbb{K}$ *. On appelle produit de* A *et* B*, et on note* $A \times B$ *ou* AB*, la matrice de type* (m,p) *sur* $\mathbb{K}$*, définie par :* $A \times B = (c_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ *avec*

$$c_{ij} = L_i C j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Remarque 4.1.10.
Le produit $A \times B$ *n'est défini que si le nombre de colonnes de la première matrice du produit est égal au nombre de lignes de la deuxième matrice .*
matrice de type $(m,n)\times$ *matrice de type* (n,p) $=$ *matrice de type* (m,p).

Exemple 4.1.5.
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

A *est de type* $(3,3)$ *et* B *de type* $(3,2)$*. Le nombre de colonnes de* A *est égale au nombre de lignes de* B*, donc la matrice* $A \times B$ *existe et de type* $(3,2)$.

On a $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 7 & -0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Dans ce cas, le produit $B \times A$ *n'est pas défini car le nombre de colonnes de* B *n'est pas égal au nombre de lignes de* A.

Proposition 4.1.11. *Soient* A, B *et* C *trois matrices telles que les produits écrits ci-aprés existent et soit* $\alpha \in \mathbb{K}$.

(a) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$ *(associativité)*

(b) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ *et* $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ *(distributivité)*

(c) $(\alpha A) \times B = A \times (\alpha B) = \alpha(A \times B)$

(d) $A \times \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n \times A = A$ *et* $A \times 0 = 0 \times A = 0$.

(e) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on pose* $A^0 = \mathbb{I}_n$ *et*

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ \ A^k = A^{k-1} \times A = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k\,fois}.$$

La matrice A^k *s'appelle puissance* k*-ième de* A.

Exemples 4.1.4.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors, $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et*

$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 10 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

⋆ ***Transposée d'une matrice***

Définition 4.1.12.
Soit A *une matrice de type* (m, n) *sur* $\mathbb{K}$*. On appelle matrice* ***transposée*** *de* A *et on note* ${}^tA$ *(ou parfois* A^T*), la matrice de type* (n, m) *sur* $\mathbb{K}$ *obtenue à partir de* A *en échangeant les lignes et les colonnes.*

Exemple 4.1.6. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$*. Alors*

$${}^tA = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ \ et \ \ {}^tB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Proposition 4.1.13. (Propriétés de la transposée)

a) Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*, alors* ${}^t({}^tA) = A$.

b) Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$*, alors* ${}^t(\alpha\, A) = \alpha\, {}^tA$.

c) Si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*, alors* ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.

d) Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, alors* ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.

Définition 4.1.14. *Une matrice carrée* $A = (a_{ij})$ *d'ordre* n *est dite symétrique (resp. antisymétrique) si* $(a_{ij}) = (a_{ji})$ *(resp.* $(a_{ij}) = -(a_{ji})$ *pour tout* $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Exemples 4.1.5.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ *est une matrice symétrique.*
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice antisymétrique.*

Proposition 4.1.15. *Une matrice carrée A est symétrique $\iff {}^tA = A$.*

4.1.4 Matrices carrées inversibles

Définition 4.1.16.
Soit A une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$. On dit que A est ***inversible*** *s'il existe une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$, notée A^{-1} et appelée matrice* ***inverse*** *de A, telle que*

$$A^{-1} \times A = \mathbb{I}_n \text{ et } A \times A^{-1} = \mathbb{I}_n$$

Exemple 4.1.7. *Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.*
On vérifie facilement que $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2$ et $B \times A = \mathbb{I}_2$ alors A est inversible et

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.1.17.
Soient A et B deux matrices carrées inversibles de même ordre on a :

1. *A^{-1} est unique.*
2. $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
3. $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

4.1.5 Matrices échelonnées

Définition 4.1.18.
Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ une matrice non nulle. On appelle ***pivot*** *d'une ligne non nulle de A le premier élément non nul, les pivots des lignes non nulles sont appelé pivots de A.*
On dit que A est sous forme ***échelonnée*** *(ou simplement échelonnée) lorsque les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

- ***i)*** *Toutes les lignes non nulles sont situées au-dessus des lignes nulles.*
- ***ii)*** *Le pivot de chaque ligne non nulle se trouve dans une colonne (strictement) à droite du pivot de la ligne précédente.*

On dit que A est sous forme ***échelonnée réduite*** *(ou simple échelonnée réduite) si de plus les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

- ***iii)*** *Le pivot de chaque ligne non nulle vaut 1.*

iv) *Le pivot de chaque ligne non nulle est le seul coefficient non nul de sa colonne.*

Exemples 4.1.6.

1. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *n'est pas échelonnée (i) n'est pas vérifiée).*
2. *La matrice* $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas échelonnée (ii) n'est pas vérifiée).*
3. *La matrice* $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est échelonnée, mais pas échelonnée réduite (iii) et iv) ne sont pas vérifiées).*
4. *La matrice* $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est échelonnée, mais pas échelonnée réduite (iii. n'est pas vérifiée).*
5. *La matrice* $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est échelonnée réduite.*

4.1.6 Le rang d'une matrice

Définition 4.1.19.
Le rang d'une matrice A *est le nombre de lignes non nulles dans sa forme échelonnée en lignes. On le note* rgA.

Exemple 4.1.8. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, *$A$ est une matrice échelonnée, alors* $rgA = 3$.
Soit $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *$B$ est une matrice échelonnée, alors* $rgB = 2$.

Théorème 4.1.20.
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *on a*

$$rgA \leqslant \min(n, p).$$

4.1.7 Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

Définition 4.1.21.
On appelle ***opération élémentaire*** *sur les lignes d'une matrice l'une des trois opérations suivantes :*

1. *L'échange de deux lignes L_i et L_j, parfois noté $L_i \longleftrightarrow L_j$.*
2. *La multiplication d'une ligne par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ non nul, parfois noté $L_i \longleftarrow \alpha L_i$.*
3. *L'ajout a une ligne une autre ligne multipliée par $\alpha \in \mathbb{K}$, parfois noté $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$.*

Définition 4.1.22.
*Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont **équivalentes**, si l'une est la transformation de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires, et on note $A \sim B$.*

Exemple 4.1.9.
Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- *Permutation de L_1 avec L_2.*

$$A \overset{L_1 \longleftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- *Mulitiplication de L_1 par $\frac{-1}{2}$*

$$A \overset{L_1 \longleftarrow \frac{-1}{2} \times L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- *L'ajout à L_3, L_2 multipliée par -3.*

$$A \overset{L_3 \longleftarrow L_3 + (-3) \times L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

4.1.8 Applications

a) Calcule du rang d'une matrice

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

On cherche a obtenir une matrice B' une forme échelonnée équivalente à B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1,\ L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-6} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B'.$$

Donc $B \sim B'$ et B' est une matrice échelonnée, posséde deux lignes non nulles, alors $rgA = 2$.

b) Calcule de l'inverse d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si A est inversible, alors pour calculer A^{-1} on suit les étapes suivantes :

(a) On construit une matrice à n lignes et $2n$ colonnes notée $(A|I_n)$ (appelée matrice ***élargie****, en écrivant la matrice identité à droite de A.*

(b) En appliquant les opérations élémetaires, pour transformer A en une matrice échelonnée notée $\widetilde{A}$ et on applique les mêmes opérations sur I_n. La matrice obtenue sera notée $(\widetilde{A}|\widetilde{I})$.

(c) Si $\widetilde{A}$ a une ligne nulle, alors A n'est pas inversible.

(d) Sinon, en appliquant des nouvelles opérations élémetaires jusqu'on transforme $\widetilde{A}$ en I_n, les mêmes opérations élémetaires transforment I_n en A^{-1}.

Exemple 4.1.10. *Calculons l'inverse de* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On applique les éliminations de Gauss sur les lignes de $(A|I_3)$ d'abord, pour avoir 1 comme pivot de la pemiére ligne, on effectue l'opération élémentaire $L_1 \longleftrightarrow L_3$, on ontient

$$L_1 \longleftrightarrow L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

pour faire apparaître des 0 sur la première colonne, on effectue successivement les deux opérations élémentaires suivantes, $L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1$

$$L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\scriptstyle L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

On multiplie la ligne L_2 par $\frac{1}{2}$ afin qu'elle commence par 1

$$L_2 \longleftarrow \tfrac{1}{2}L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

On continue afin de faire apparaître des 0 partout sous la diagonale

$$L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{-3}{2} & -6 \end{array}\right) \underset{\sim}{\scriptstyle L_3 \longleftarrow 2L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -12 \end{array}\right)$$

Faire apparaître des 0 *au-dessus de la diagonale*

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -12 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -12 \end{array}\right) = (I_n \mid A$$

Ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & -12 \end{pmatrix}.$$

4.2 Déterminant d'une matrice carrée

4.2.1 Définitions et propriétés

Définition 4.2.1. *Soit A une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$, le déterminant de la matrice A est noté* $\det A$ *telle que :*

1. *Si $n = 1$ avec $A = (a)$, alors* $\det A = a$.
2. *Si $n = 2$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors* $\det A = ad - bc$.
3. *Si $n \geqslant 2$ et $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, alors* $\det A = \sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij} = \sum_{j=1}^{j=n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}$ *avec A_{ij} est la matrice extraite de A , obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A .*

Remarques 4.2.2.

1. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son déterminant est noté aussi* $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.
2. *L'écriture* $\sum_{j=1}^{j=n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}$ *s'appelle le développement du déterminant par rapport à la ligne i.*
3. *L'écriture* $\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}$ *s'appelle le développement du déterminant par rapport à la colonne j.*
4. *Le déterminant d'une matrice carrée ne dépend pas du choix de la ligne i et la colonne j.*

Exemples 4.2.1.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det A = 1 \times 3 - 0 \times (-2) = 3.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

On a $A_{11} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculons le déterminant de la matrice A.
-En dévelloppant suivant la première ligne,
$\det A = (-1)^{1+1} \times 1 \times \det \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \times 0 \times \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}(-2) \times \det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 18 + 24 = 42.$
-En développant suivant la deuxième colonne,
$\det A = (-1)^{1+2} \times 0 \times \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \times 6 \times \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 54 - 12 = 42.$

Propriétés 4.2.3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On a :*

1. *Si une colonne (resp., une ligne) de A est nulle, alors la valeur de* $\det A$ *est nulle.*
2. *La valeur de* $\det A$ *ne change pas en ajoutant à l'une des colonnes (resp., des lignes) de A une combinaison linéaire des autres colonnes (resp., des autres colonnes) de A.*
3. *Si on multiplie une colonne (resp., une ligne) de A par un scalaire* α, *la valeur de* $\det A$ *est multipliée par* α.
4. *Si on échange deux colonnes (resp., deux lignes) de A, alors la valeur de* $\det A$ *est multipliée par* -1.

Proposition 4.2.4. *Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, Alors :*

1. $\det(AB) = \det A \det B$.
2. $\det({}^t A) = \det A$.
3. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

Corollaire 4.2.5. *Soit A une matrice d'ordre n. A est inversible* $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$. *De plus si A est inversible alors* $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Exemple 4.2.1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ *une matrice d'ordre* 2. *On a* $\det A = -8 \neq 0$, *alors A est inversible et* $\det A^{-1} = \frac{-1}{8}$.

4.2.2 Déterminants des matrices particulières

Proposition 4.2.6. *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est égal au produit des termes diagonaux.*

Pour une matrice triangulaire $A = (a_{ij})$, on a

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \ \cdots \ a_{nn}.$$

Exemples 4.2.2.

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *une matrice triangulaire supérieure, on a* $\det A = (-3) \times (-1) \times 4 \times 5 = 60$.
2. *Soit La matrice triangulaire inférieure* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, *on a* $\det B = 2 \times (-2) \times 1 = -4$.

Comme cas particulièrement important on obtient :

Corollaire 4.2.7. *Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux.*

Exemple 4.2.2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\det \mathbb{I}_n = 1$.

4.2.3 Déterminant et inverse d'une matrice

Définition 4.2.8. *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$. Si $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$, on appelle* ***mineur*** *du coefficient a_{ij} le déterminant,* $\det A_{ij}$ *de la matrice A_{ij}, obtenue en supprimant dans A, la i-ième ligne et la j-ème colonne. Le scalaire $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ s'appelle le cofacteur du coefficient a_{ij}. La matrice dont les coefficients sont les cofacteurs s'appelle la* ***comatrice*** *de A et on la note $com(A)$.*

Exemple 4.2.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ *une matrice d'ordre 3. Déterminons la comatrice de la matrice A.*

Posons $com(A) = (b_{ij})$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, alors $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ avec A_{ij} est la matrice obtenue en supprimant dans A, la i-ième ligne et la j-ème colonne. On a donc

$b_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -4$, $b_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 22$, $b_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = -10$, $b_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 11$, $b_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} =$

$-3,\ b_{23} = (-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix} = -7,\ b_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix} = -5,$
$b_{32} = (-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix} = -7$ *et* $b_{33} = (-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix} = -1.$

Alors

$$com(A) = \begin{pmatrix}-4 & 22 & -10\\ 11 & -3 & -7\\ -5 & -7 & -1\end{pmatrix}.$$

Proposition 4.2.9. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée d'ordre* n*. Alors :*
- $A({}^t com(A)) = ({}^t com(A))A.$
- A *est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$*, dans ce cas, on a :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}({}^t com(A)).$$

Exemples 4.2.3.

i) Si $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ *telle que* A *est inversible, alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}({}^t com(A)) = \frac{1}{ad-bc}\,{}^t\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc}\\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}.$$

ii) Dans (Exemples 4.2.3), on a ${}^t com(A) = \begin{pmatrix}-4 & 11 & -5\\ 22 & -3 & -7\\ -10 & -7 & -1\end{pmatrix}$ *et* $\det A = -46$*.*

On conclut que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}({}^t com(A)) = \begin{pmatrix}\frac{2}{23} & \frac{-11}{46} & \frac{5}{46}\\ \frac{-11}{23} & \frac{3}{46} & \frac{7}{46}\\ \frac{5}{23} & \frac{7}{46} & \frac{1}{46}\end{pmatrix}.$$

Exercice 4.2.10. *Montrer que la matrice suivante de* $M_3(\mathbb{R})$ *est inversible, puis calculer son inverse par la méthode des cofacteurs :* $A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$

Remarque 4.2.11. *Cette dernière formule pour calculer l'inverse est peu pratique pour de grandes valeurs de* n*.*

4.3 Résolution des systèmes linéaires

4.3.1 Définitions et notations

Définition 4.3.1. *Soient* p *un entiers naturels et* a_i*,* $i = 1...p$ *des éléments de* $\mathbb{K}$*. On appelle* ***équation linéaire*** *de variables (ou* ***inconnues****)* $x_1, \ldots, x_p$ *toute relation de la forme*

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b, \tag{4.1}$$

-les a_i, $i = 1...p$ sont les coefficients.
-$b \in \mathbb{K}$ est le second membre de l'équation.
-Le p-uplet $(x1, ..., xp)$ est solution de l'équation s'il satisfait l'égalité 4.1.

Exemple 4.3.1. $3x - 2y + 4z = 2$ *est une équation linéaire à trois inconnues, à coefficients dans $\mathbb{R}$. Le triplet $(\frac{2}{3}, 0, 0)$ est une solution de l'équation.*

Définition 4.3.2. *On appelle **système linéaire** de n équations et p inconnues et à coefficients dans K toute conjonction de n équations linéaires à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$, c'est à dire tout système (S) de la forme :*

$$(S)\left\{\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \cdots & +a_{ip}x_p & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \cdots & +a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

- $x_1, ..., x_p$ sont les inconnues du système,
- Les a_{ij} sont les coefficients du système,
- La matrice $A = a_{ij} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est la matrice du système,
- Le rang de la matrice A s'appelle le rang du système (S),
- La matrice $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est le second membre du système,
- $(A|b)$ est la matrice élargie du système,
- Le $p - uplet$ $(x_1, ..., x_p)$ est solution du système (S) lorsqu'il est solution de chacune des équations formant le système,
- Résoudre le système, c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions.

Interprétation matricielle

Le système linéaire (S) s'écrit sous la forme d'une équation matricielle (équivalente au système) :

$$AX = b \iff (S)\left\{\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \cdots & +a_{ip}x_p & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \cdots & +a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Exemples 4.3.1.

1. *Le système suivant a 2 équations et 3 inconnues :*

$$\begin{cases} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \end{cases}$$

2. *Le système*

$$\begin{cases} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \end{cases}$$

est un système linéaire de deux équations et trois inconnues.

-$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ *est la matrice du système,*

-$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ *est le second membre du système,*

-$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ *est la matrice élargie du système,*

- *L'écriture matricielle du système est :* $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$,

- $(-18, -6, 1)$ *est une solution du système,* $(7, 2, 0)$ *n'est pas une solution du système car il ne satisfait que la première équation.*

4.3.2 Existence des solutions d'un système linéaire

Théorème 4.3.3. *Soit (S) un système linéaire de n équations et p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soient A la matrice de (S) et $(A|b)$ sa matrice élargie. On note r le rang de A et m le rang de $(A|b)$ Alors :*

—Si $r = m = p$, (S) admet une seule solution.

—Si $r = m < p$, (S) admet une infinité de solutions.

—Si $r \neq m$, alors (S) n'admet pas de solutions.

Remarque 4.3.4.

1. *Si un système linéaire à 2 solutions différentes, alors ce système admet une infinité de solutions.*
2. *Un système linéaire qui n'a aucune solution est dit* ***incompatible****.*
3. *Un cas particulier important est celui des* ***systèmes homogènes****, pour lesquels $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, c'est-à-dire dont le second membre est nul. De tels systèmes sont toujours compatibles car ils admettent toujours la solution $s_1 = s_2 = \cdots = s_p = 0$. Cette solution est appelée* solution triviale.

4.3.3 Résolutions des systèmes linéaires

1. ***Méthode de Gauss***

Soit (S) un système linéaire, de matrice A et de second membre b :

- On considère la matrice élargie $(A|b)$ du système,

- On cherche la forme échelonnée lignes réduite de $(A|b)$. La matrice finale correspond à un système équivalent à (S).

- Les inconnues dont le coefficient est un pivôt $= 1$ s'appellent inconnues principales,

-les autres sont les inconnues secondaires.

- Si le système admet une infinité de solutions, on exprime alors les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.

Exemples 4.3.2.

(a) *Le système linéaire suivant à 4 équations et 4 inconnues.*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & +4x_2 & +1x_3 & +2x_4 & = & 13 \\ 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 14 \end{cases}$$

La matrice élargie du système est : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{pmatrix}$.

Pour faire apparaître des 0 sur la première colonne, on effectue successivement les trois opérations élémentaires suivantes, $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - 4L_1$. On trouve la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{pmatrix} \quad L_2 \longleftarrow -L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 40 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \longleftarrow L_4 + 7L_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 40 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \longleftarrow L_4 + 7L_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 40 \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow \tfrac{-1}{4} L_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 \end{pmatrix} \quad L_4 \longleftarrow L_4 - 4L_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_4 \longleftarrow \tfrac{1}{40} L_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_3 - 7L_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2 - 3L_3 - 4L_4 \quad .$$

Alors la forme échlonnée réduite de $(A|b)$ *est la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \big\{(2,1,1,1)\big\}.$$

(b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & +7z & = & -1 \\ 2x & -y & +5z & = & -5 \\ -x & -3y & -9z & = & -5 \end{array} \right.$$

La matrice élargie du système est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{pmatrix}.$$

La forme échelonné réduite de la matrice élargie est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi $x = 2$, $y = 4$ *et* $z = -1$ *et l'unique solution du système est* $(2, 4, -1)$.

(c) *Le système linéaire suivant à* 3 *équations et* 4 *inconnues.*

$$\begin{cases} x_1 & & +2x_3 & & = & 25 \\ & x_2 & -2x_3 & & = & 16 \\ & & & x_4 & = & 1 \end{cases}$$

Ce système se résout trivialement en

$$\begin{cases} x_1 & = & 25 - 2x_3 \\ x_2 & = & 16 + 2x_3 \\ x_4 & = & 1. \end{cases}$$

L'inconnue x_3 *est secondaire les valeurs de* x_1, x_2 *et* x_4 *s'expriment en fonction de* x_3. *On a donc l'ensemble des solutions :*

$$\mathcal{S} = \big\{(25 - 2x_3, 16 + 2x_3, x_3, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\big\}.$$

2. ***Méthode de Cramer***

Définition 4.3.5. *Un système linéaire de* n *équations à* p *inconnues est dit de* ***Cramer*** *s'il possède autant d'équations que d'inconnues (c 'est-à-dire si* $n = p$*) et si le rang de sa matrice associée est égal à* n *. Un système de Cramer est aussi appelé système régulier.*

-Un système de Cramer est un système carré dont la matrice associée est inversible. Il est donc de la forme

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \cdots & +a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \cdots & +a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

avec $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$

Un système de Cramer possède une solution et une seule (Théorème 4.3.3).

Proposition 4.3.6. *Les coordonnées $x_1, x_2, ..., x_n$ de l'unique solution d'un système de Cramer d'équation matricielle $AX = B$, sont données par :*

$$\forall j \in \{1...n\},\ x_j = \frac{\det(C_1, C_2...C_{j-1}, B, C_{j+1}...C_n)}{\det A}$$

où $C_1, C_2, ..., C_n$ représentent les n colonnes de la matrice A et où le numérateur est le déterminant de la matrice déduite de A en remplaçant la j -ième colonne C_j par la matrice-colonne B.

Exemple 4.3.2. *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & = & 1 \\ & -x_2 & +x_3 & = & 1 \\ -x_1 & +2x_2 & & = & 1 \end{cases}$$

On a $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

C 'est un système de Cramer. On trouve :

$x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = 5,\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = 3$ *et* $x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = 4.$

Donc $\mathcal{S} = \big\{(5, 3, 4)\big\}$.

3. ***Méthode de la matrice inverse***

On considére le système linéaire carrée

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \cdots & +a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \cdots & +a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

de forme matricielle $AX = b$.

Proposition 4.3.7. *Si la matrice A est invérsible, alors le système (S) admet une unique solution $X = A^{-1}b$.*

Exemple 4.3.3. *Soit le système linéaire*

$$\begin{cases} -x & +2y & +8z & = & 1 \\ -x & +2y & +7z & = & 2 \\ 2x & -3y & -12z & = & -1 \end{cases}$$

La matrice associée au système (S) est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & -12 \end{pmatrix}$. *Son* *invérse est la matrice* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$