Université M. Ismail – Faculté des Sciences – Département de Mathématiques

Travaux Dirigés d'Algèbre 6 - S4 / Série 3 – 2020-2021

Exercice 1.

— Donner la décomposition des permutations suivantes en cycles disjoints et donner leur ordre et leur signature.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 9 & 5 & 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 10 & 5 & 7 & 11 & 9 & 2 & 1 & 12 & 6 & 13 & 3 & 14 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

— Calculer σ^{2020}.

Exercice 2.

— Dans S_4, calculer le produit des 3-cycles $c_1c_2c_3$ où

$$c_1 = (1,2,3) \quad ; \quad c_2 = (2,3,4) \quad ; \quad c_3 = (1,3,2)$$

— Pour $n \geq 3$, montrer que le produit de deux transpositions de S_n est un commutateur.

— Pour $n \geq 3$, montrer que le centre du groupe symétrique est réduit à l'identité, i.e. $Z(S_n) = \{id_{I_n}\}$.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas d'homomorphisme surjectif de S_3 sur A_3.

Exercice 4.

1. Montrer que chacun des ensembles suivants engendre S_n :
   — l'ensemble des $n-1$ transpositions simples : $\{(1,2),(2,3),\cdots,(n-1,n)\}$
   — l'ensemble formé par la trasposition $(1,2)$ et le cycle $(1,2,3,\cdots,n)$
   — l'ensemble formé par les $n-1$ transpositions $\{(1,2),(1,3),\cdots,(1,n)\}$.
2. Pour $n \geq 3$, montrer que l'ensemble formé par les $n-2$-cycles $c_i = (i, i+1, i+2,)$ où $1 \leq i \leq n-2$, engendre le groupe alterné A_n.

Exercice 5. On considère dans le groupe symétrique S_4 les sous-groupes suivants : $V_4 = \{id_{I_4}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ et $H = \{id_{I_4}, (1,2)(3,4)\}$

— Montrer que V_4 est distingué de S_4. En déduire que A_4 n'est pas simple.

— Montrer que H est un sous-groupe distingué de V_4 mais H n'est pas distingué dans S_4.

Exercice 6. Montrer que les groupes S_3 et S_4 sont résolubles.

Exercice 7. Montrer que le groupe alterné A_4 n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

Exercice 8. Pour $n \geq 3$, montrer que A_n est le groupe dérivé de S_n i.e. $D(S_n) = A_n$.

Exercice 9. Soit $n \geq 5$ et H un sous-groupe distingué de S_n.

1. Montrer que $H \cap A_n$ est un sous-groupe distingué de A_n. En déduire que

$$A_n \subseteq H \text{ ou bien } H \cap A_n = \{Id_{I_n}\}$$

2. On suppose que $H \cap A_n = \{Id_{I_n}\}$.
   Montrer que la restriction de l'homomorphisme signature ε à H est injectif. En déduire que $H \subseteq Z(S_n)$ puis déterminer H.
3. On suppose que $A_n \subseteq H$. Déterminer dans ce cas H.
4. Donner alors tous les sous-groupes distingués de S_n.