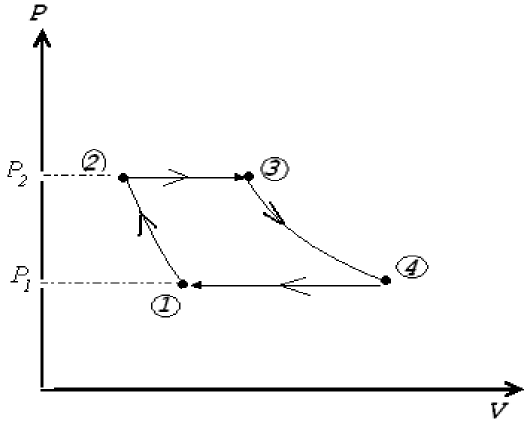
Solution TD Série N°2

Pr ABDALLAOUI A.

Exercice 1 : Cycle de Joule

1) Le cycle sur un diagramme de Clapeyron.



2) **1→ 2** est une transformation adiabatique donc :

$$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}$$

d'où $P_1\left(\frac{nRT_1}{P_1}\right)^{\gamma} = P_2\left(\frac{nRT_2}{P_2}\right)^{\gamma}$ et $P_1^{1-\gamma}T_1^{\gamma} = P_2^{1-\gamma}T_2^{\gamma}$

donc $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ D'où $\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_1}{P_3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$ puisque $P_2 = P_3$

3 → 4 est une transformation adiabatique par la même démonstration on obtient :

$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ et $\boxed{\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{P_3}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$ puisque $P_4 = P_1$

3) $\overline{C_V} = \frac{5}{2}R$ et $\overline{C_P} - \overline{C_V} = R$ et $\gamma = \frac{\overline{C_P}}{\overline{C_V}}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\gamma = 1{,}4}$

$$T_2 = T_1\left(\frac{P_1}{P_3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 300\left[\frac{10^5}{5.10^5}\right]^{\frac{1-1{,}4}{1{,}4}}$$ On trouve $\boxed{T_2 = 475{,}1K}$

$$T_4 = T_3\left(\frac{P_3}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 500\left[\frac{5.10^5}{10^5}\right]^{\frac{1-1{,}4}{1{,}4}}$$ On trouve $\boxed{T_4 = 315{,}7K}$

4) Calculer pour une mole de gaz les quantités de chaleur Q_{12} ; Q_{23} ; Q_{34} et Q_{41} échangées.

- **Q_{12}.** **1 → 2** transformation adiabatique réversible : donc $\boxed{Q_{12} = 0}$

- **Q_{23}.** **2 → 3** transformation isobare $Q_{23} = C_P(T_3 - T_2) = \frac{7}{2}\times 8{,}31(500 - 475{,}1) = 724{,}22J$

$\boxed{Q_{23} = 724{,}22\,J}$

- **Q_{34}** **3 → 4** transformation adiabatique réversible : donc $\boxed{Q_{34} = 0}$
- **Q_{41}.** **4 →1** transformation isobare,

$$Q_{41} = C_P(T_1 - T_4) = \frac{7}{2} \times 8{,}31(300 - 315{,}7) = -456{,}63J \qquad \boxed{Q_{41} = -456{,}63J}$$

a. Calculer le travail *W* échangé par une mole au cours de chaque transformation.

- W_{12}. $\boxed{W_{12} = \Delta U_{12} = C_V(T_2 - T_1)}$
- W_{23}. $W_{23} = -P_2(V_3 - V_2) = -P_2 nR\left(\frac{T_3}{P_3} - \frac{T_2}{P_2}\right) = -R(T_3 - T_2)$ et $\boxed{W_{23} = -R(T_3 - T_2)}$ puisque n = 1 et $P_3=P_2$
- W_{34}. $\boxed{W_{34} = \Delta U_{34} = C_V(T_4 - T_3)}$
- W_{41} $W_{41} = -P_1(V_1 - V_4) = -P_1 nR\left(\frac{T_1}{P_1} - \frac{T_4}{P_4}\right) = -R(T_1 - T_4)$ $\boxed{W_{41} = -R(T_1 - T_4)}$ puisque n = 1 et $P_4 = P_1$

b. En déduire le travail *W* échangé par une mole au cours du cycle,

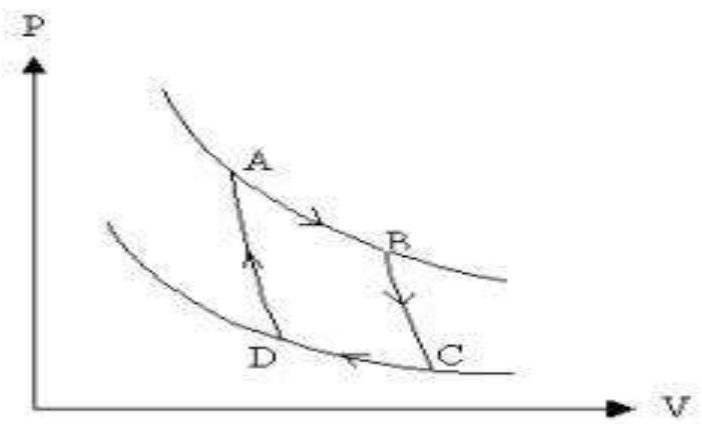
$$W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} \text{ donc } W = C_V(T_2 - T_1 + T_4 - T_3) - R(T_3 - T_2 + T_1 - T_4) \text{ or}$$

$$C_P = C_V + R \text{ D'où } \boxed{W = C_P(T_2 - T_1 + T_4 - T_3)} \quad W = -267{,}58J$$

c. Le rendement de ce cycle. $r = -\frac{W}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 0{,}37$

d. $\boxed{r_c = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 0{,}4}$ Le rendement de Carnot est évidemment (relativement peu) supérieur, puisque les températures évoluent peu suivant les transformations isobares où il y a échanges de chaleur.

Exercice 2 : Cycle de Carnot



- A ($P_A = RT_2/V_A$, V_A, $T_A = T_2$)
- B ($P_B= RT_2/V_B$, V_B, $T_B = T_2$)
- C ($P_C = RT_1/V_C$, V_C, $T_C = T_1$)
- D ($P_D = RT_1/V_D$, V_D, $T_D = T_1$)

1) Les paramètres des états A, B, C et D sont :

- C et B sont sur la même adiabatique donc : $T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$; $T_1 V_C^{\gamma-1} = T_2 V_B^{\gamma-1}$
  - $V_C^{\gamma-1} = (T_2/T_1)V_B^{\gamma-1}$; $\boxed{\mathbf{V_C = V_B (T_2/T_1)^{1/\gamma-1}}}$

- D et A sont sur la même adiabatique donc : $T_DV_D^{\gamma-1} = T_AV_A^{\gamma-1}$; $T_1V_D^{\gamma-1} = T_2V_A^{\gamma-1}$
- $V_D^{\gamma-1} = (T_2/T_1)V_A^{\gamma-1}$; $\boxed{\mathbf{V_D = V_A (T_2/T_1)^{1/\gamma-1}}}$
- Par combinaison des expressions ci-dessus, on obtient $\boxed{\mathbf{V_C/V_D = V_B/V_A}}$

- AB et CD sont des isothermes (PV = C[te]) donc : $\mathbf{P_AV_A = P_BV_B}$
- Comme : $P_CV_C = P_DV_D$, on a enfin : $\mathbf{V_C/V_D = V_B/V_A = P_D/P_C = P_A/P_B}$

- **2) Calcul du travail et de la chaleur**

- **Calcul du travail W_{AB}** échangé avec l'extérieur et de la chaleur Q_{AB} échangée avec les sources :
  - Au cours du trajet AB il y a une détente isotherme donc : $W_{AB} = -\int_A^B PdV$
    - D'après l'équation des gaz parfaits PV = nRT ; d'où P = nRT/V
    - On a alors $W_{AB} = -nRT_2\int_A^B \frac{dV}{V}$ = $-nRT_2\ln(V_B/V_A) = nRT_2\ln(V_A/V_B)$
    - De plus $\Delta U_{AB} = nC_v(T_B-T_A) = 0$; donc $T_A = T_B = T_2$
    - $\boxed{\mathbf{Q_{AB} = -W_{AB} = nRT_2\ln(V_B/V_A)}}$

Rq : A→B détente isotherme $V_B > V_A$ donc $Q_{AB} > 0$ chaleur reçue.

- **Calcul du travail W_{BC}** échangé avec l'extérieur et de la chaleur Q_{BC} échangée avec les sources :
  - Au cours du trajet BC il y a une détente adiabatique donc : $\boxed{\mathbf{Q_{BC} = 0}}$
  - $\boxed{\mathbf{W_{BC} = \Delta U_{BC} = nC_v(T_C-T_B) = nC_v(T_1-T_2)}}$

- **Calcul du travail W_{CD}** échangé avec l'extérieur et de la chaleur Q_{CD} échangée avec les sources :
  - Au cours du trajet CD il y a une compression isotherme donc : $W_{CD} = -nRT_1\int_C^D \frac{dV}{V}$
  - $W_{CD} = -nRT_1\ln(V_D/V_C) = nRT_1\ln(V_C/V_D)$ $\boxed{\mathbf{Q_{CD} = -W_{CD} = -nRT_1\ln(V_D/V_C)}}$

- **Calcul du travail W_{DA}** échangé avec l'extérieur et de la chaleur Q_{DA} échangée avec les sources :
  - Au cours du trajet DA il y a une compression adiabatique donc : $\boxed{\mathbf{Q_{DA} = 0}}$
  - $\boxed{\mathbf{W_{DA} = \Delta U_{DA} = nC_v(T_A-T_B) = nC_v(T_2-T_1)}}$

3) Egalité de Clausius:

- $Q_{AB}/Q_{CD} = nRT_2\ln(V_B/V_A)/(nRT_1\ln(V_D/V_C)) = -T_2/T_1$
- Or $Q_2 = Q_{AB}$ et $Q_1 = Q_{CD}$; on obtient alors : $Q_2/Q_1 = -T_2/T_1$
- L'égalité de Clausius $\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = 0$ est ainsi retrouvée.

4) Calcul du rendement h de la machine de Carnot :

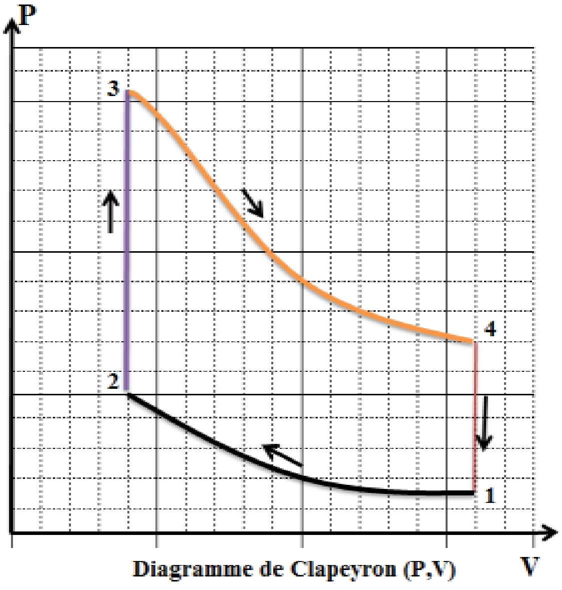
- $\eta = -W_T/Q_2$
  - Or $W_T = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$

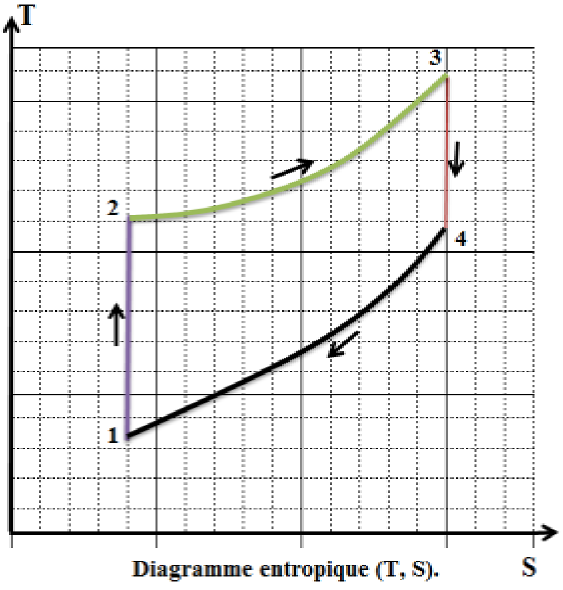
    $W_T = nRT_2\ln(V_A/V_B) + nC_v(T_1-T_2) + nRT_1\ln(V_C/V_D) + nC_v(T_2-T_1)$
  - Or $V_C/V_D = V_B/V_A$ alors $W_T = -nRT_2\ln(V_B/V_A) + nRT_1\ln(V_B/V_A)$
  - $W_T = nR(T_1-T_2)\ln(V_B/V_A)$
  - $\eta = -W_T/Q_2 = nR(T_2-T_1)\ln(V_B/V_A)/(nRT_2\ln(V_B/V_A)) = (T_2-T_1)/T_2$
  - **Donc** $\boxed{\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}}$

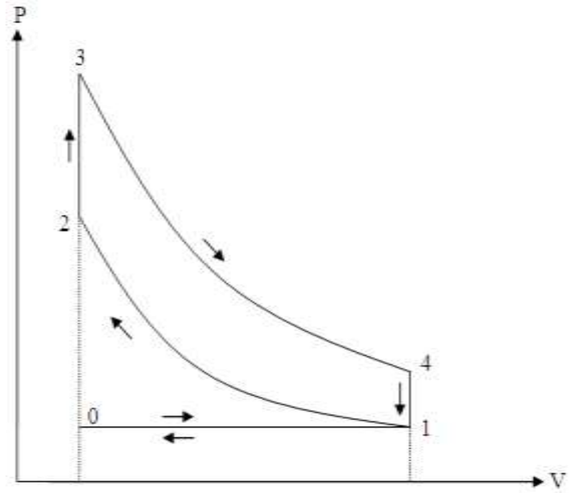
Exercice 3 : Cycle de Beau de Rochas

Partie A

A.1)







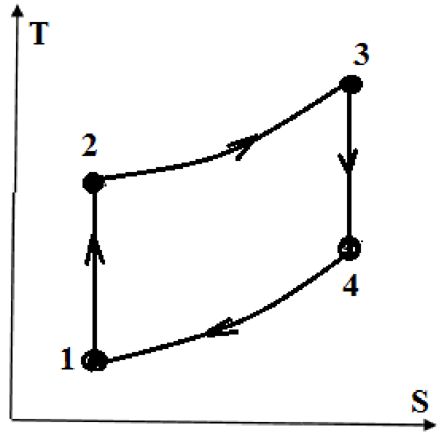
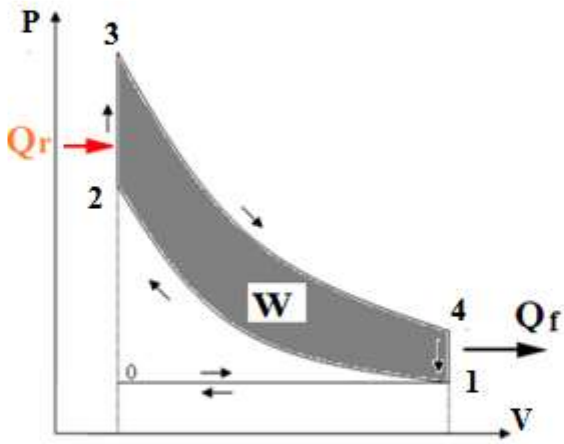


Diagramme de Clapeyron (P,V) **Diagramme entropique (T, S).**



La surface du cycle dans le diagramme (P,V) correspond au travail du cycle.

A.2)

a) Sur les deux **isentropiques** $1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$, aucune chaleur n'est échangée par définition (adiabatiques). Le mélange **reçoit** de la chaleur $(Q_r \succ 0)$ au cours de l'explosion (portion **2→3**), et **fourni** de la chaleur $(Q_f \prec 0)$ lors de la détente isochore (portion **4→1**).

Sur un cycle, du travail est fourni $W_{total} \prec 0$ (le cycle est parcouru dans le sens horaire; c'est un cycle moteur) et il résulte d'un travail $W_{12} \succ 0$ fourni au gaz au cours de sa compression entre 1 et 2, et d'un travail $W_{34} \prec 0$ que génère le gaz entre 3 et 4.

Le bilan thermique sur un cycle est le suivant :

$$\Delta U_{cycle} = W_{Cycle} + Q_{Cycle} = 0$$

$$W_{Cycle} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} \quad \text{et} \quad Q_{Cycle} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}$$

$$W_{23} = W_{41} = 0 \quad \text{et} \quad Q_{12} = Q_{34} = 0 \quad \text{avec} \quad Q_r = Q_{23} \text{ et } Q_f = Q_{41}$$

$$\Delta U_{cycle} = W_{12} + Q_r + W_{34} + Q_f = 0$$

soit $$W_{Cycle} = W_{12} + W_{34} = -Q_r - Q_f$$

Au cours des transformations isochores, les quantités de chaleur échangées sont égales à la variation d'énergie interne du gaz, dont l'expression est simple, soient :

$$Q_r = mC_V(T_3 - T_2) \qquad \text{et} \qquad Q_f = mC_V(T_1 - T_4)$$

Rq : C_V et donné en $J.kg^{-1}.K^{-1}$ est une constante massique donc on utilise m et non pas n

Le rendement énergétique du cycle de Beau De Rochas du moteur à combustion est donné comme :

$$\eta = \frac{|W|}{Q_r} = \frac{(Q_r + Q_f)}{Q_r} = 1 + \frac{Q_f}{Q_r}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)}}$$

Le rendement théorique du moteur à combustion, avec un gaz parfait, est inférieur au rendement théorique du cycle de Carnot qui serait dans ce cas $r = 1 - \frac{T_1}{T_3}$, les valeurs extrêmes des températures.

b) En supposant que le fluide moteur est un gaz idéal, les conditions d'évolution des volumes de V_1 à V_2 et réciproquement obéissent aux conditions des **transformations adiabatiques** : $TV^{\gamma-1} = C^{te}$

1 → 2 : $\Longrightarrow T_2V_2^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}$

3 → 4 : $\Longrightarrow T_3V_3^{\gamma-1} = T_4V_4^{\gamma-1}$ et $V_3 = V_2$ et $V_4 = V_1$

Dnc $T_3V_2^{\gamma-1} = T_4V_1^{\gamma-1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_3}{T_4} = \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}$

On obtient que: $\frac{T_3}{T_4} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}$ **(1)**

Comme : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_3}{T_4} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{(T_3 - T_2)}{(T_4 - T_1)}$

$$\eta = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{V_2^{\gamma-1}}{V_1^{\gamma-1}}$$

Le taux de compression $\alpha = \frac{V_1}{V_2} \Longrightarrow \boxed{\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{(\gamma-1)}}}$

A.3) **a)** rendement théorique du cycle d'Otto $V_1 = 600\, cm^3$ et $V_1 = 100\, cm^3$

$$\alpha = \frac{600}{100} = 6 \quad \eta = 1 - \frac{1}{6^{(1,4-1)}} = 1 - 6^{-0,4} \quad \boxed{\eta = 0,5116}$$

A.3) b) $W_{Cycle} = W_{12} + W_{34} = -Q_r - Q_f = -mC_V(T_3 - T_2) - mC_V(T_1 - T_4)$

$$W_{Cycle} = mC_V(T_2 - T_3 - T_1 + T_4)$$

$T_1 = 300\, K$ et $T_3 = 1100\, K$ $\quad T_2 = ?$ et $T_4 = ?$

Or d'après **(1)** $\frac{T_3}{T_4} = \frac{T_2}{T_1} = \alpha^{\gamma-1} = 6^{0,4} = 2,047$

Donc $T_2 = T_1 \times \alpha^{\gamma-1}$ **(2)**

Et $T_4 = \frac{T_3}{\alpha^{\gamma-1}}$

$T_2 = 300 \times 6^{1,4-1} = 614,2K$ et $T_4 = \frac{1100}{6^{1,4-1}} = 537,2K$

$m = ?$ $\quad n = \frac{P_1 V_1}{RT_1}$ $\quad m = M . \frac{P_1 V_1}{RT_1}$

$T_1 = 300\, K$; $V_1 = 600\, cm^3 = 600\, ml = 0,6 l$; $P_1 = 1 atm$;

$R = 0,082\, atm.l.K^{-1}.mol^{-1}$

$$m = 29 \times \frac{1 \times 0,6}{0,082 \times 300} = 0,7076\ g = 7,076 . 10^{-4}\, kg$$

$$W_{total} = 7,076.10^{-4} \times 714 \times (614,2 - 1100 - 300 + 537,2)$$

$\boxed{W_{Cycle} = -125,6 J}$ (Valeur négative)

A.4) Rendement de cycle de Carnot :

$$r_{carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_3} \Longrightarrow r_{carnot} = 1 - \frac{300}{1100} = 0,72721$$

$$r_{carnot} = \eta \qquad \Longrightarrow r_{carnot} = 1 - \frac{1}{\alpha^{(\gamma-1)}} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{(1 - r_{carnot})^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

$$\alpha = \frac{1}{(1 - 0,72721)^{\frac{1}{1,4-1}}} \qquad \Longrightarrow \boxed{\alpha = 25,7}$$

Partie B

B.1) Calculer la pression P_2 et la température T_2 en fin de compression.

1 → 2 : Transformation adiabatique :

$$P^{1-\gamma}(T)^{\gamma} = c^{te} \quad \Longrightarrow P_1^{1-\gamma}(T_1)^{\gamma} = P_2^{1-\gamma}(T_2)^{\gamma} \quad \Longrightarrow P_2 = P_1\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

Or d'après **(2)** : $T_2 = T_1 \times \alpha^{\gamma-1}$

Donc
$$P_2 = P_1\left(\frac{T_1}{T_1 \times \alpha^{\gamma-1}}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \frac{P_1}{\alpha^{-\gamma}} = P_1 \times \alpha^{\gamma}$$

$$\boxed{P_2 = 10^5 \times 7^{1,4} = 15,24.10^5\, Pa}$$

$$T_2 = T_1 \times \alpha^{\gamma-1} = 288 \times 7^{0,4} \qquad \boxed{T_2 = 627\ K}$$

B.2) La quantité de chaleur Q_{23} mise en jeu au cours de la phase **2 → 3**, est évaluée à 1 500 J. La masse d'air admise dans un cylindre est 1,16 10^{-3} kg.
En déduire la température T_3, puis la pression P_3 en fin d'explosion.

$$Q_{23} = mC_V(T_3 - T_2) = mC_V T_3 - mC_V T_2$$

$$T_3 = \frac{Q_{23}}{mC_V} + T_2 = \frac{Q_{23}}{mC_V} + T_2$$

$$T_3 = \frac{1500}{1,16.10^{-3} \times 714} + 627 = 2430\ K$$

2 → 3 : Transformation isobare : $V_2 = V_3$ et $V_2 = \dfrac{V_1}{\alpha} \Longrightarrow V_3 = \dfrac{V_1}{\alpha}$

$$P_3 = \frac{nRT_3}{V_3} = \frac{m}{M}.\frac{RT_3}{V_1}.\alpha$$

Donc $$P_3 = \frac{1,16}{29} \times \frac{8,31 \times 2430}{962.10^{-6}} \times 7$$ $$\boxed{P_3 = 58,77.10^5\,Pa}$$

B.3) En fin de détente on a P_4 = 3,9.10^5 Pa et T_4 = 1 115 K.
En déduire la quantité de chaleur Q_{41} mise en jeu au cours de la phase 4-1.

$$Q_{41} = mC_V(T_1 - T_4) = 1.16.10^{-3} \times 714 \times (288 - 1115)$$

$$Q_{41} = -685\,J$$

B.4) Montrer que la quantité de chaleur mise en jeu au cours du cycle est voisine de 810 J.

$$Q_{Cycle} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}$$ et $$Q_{12} = Q_{34} + = 0$$

$$Q_{Cycle} = Q_{23} + Q_{41} = 1500 - 685 = 815J$$

B.5) Déterminer l'énergie mécanique W_{cycle} correspondante (on justifiera le résultat).

$$\Delta U_{cycle} = W_{Cycle} + Q_{Cycle} = W_{12} + Q_{23} + W_{34} + Q_{41} = 0$$

$$W_{Cycle} = W_{12} + W_{34} = -Q_{23} - Q_{41}$$

$$W_{Cycle} = -1500 + 685 = -815J$$