Contents

Chapter 1

Calcul d'intégrales et de primitives

Chapter 2

Équations différentielles

Chapter 3

Intégrales généralisées

3.0.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons intégré les fonctions continues sur des segments $[a, b]$.
Posons-nous les questions suivantes:
• Est ce qu'on peut intégrer une fonction continue sur un intervalle non borné du type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$?
• Peut-on intégrer une fonction continue sur un intervalle borné du type $[a, b[$ mais qui est non bornée au voisinage de b?

L'intégrale généralisée désigne une extension de l'intégrale usuelle définie par un passage à la limite dans les intégrales. Elle partage avec l'intégrale usuelle un certain nombre de propriétés élementaires.

Les Intégrales généralisées interviennent dans beaucoup de phénomènes physiques: optique, thermodynamique... par exemple les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ dites intégrales de Fresnel jouent un rôle important en optique ondulatoire.

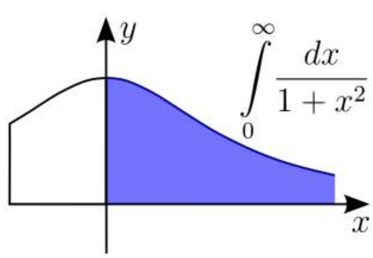
On distingue en général trois cas d'intégrales généralisées:

1. Lorsqu'on intégre jusqu'à une borne infinie $+\infty$ ou $-\infty$.
2. Lorsqu'on intégre jusqu'à une borne finie où la fonction n'admet pas de limite finie.
3. lorsque l'intervalle d'intégration contient un point où la fonction n'est pas définie.

Par exemple peut-on donner, entre autres, un sens aux intégrales suivantes

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2+5}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int_2^{+\infty} \ln^2(x)\,dx, \quad \int_{-1}^{2} \frac{1}{x^4}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\ln x}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \ln^2(x)\,dx, \ldots$$

3.0.2 Extension d'intégrale définie aux intervalles non bornés



Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Intégrer f de a à $+\infty$ revient à mesurer l'aire d'une zone illimitée. Bien que cette zone est non bornée elle peut avoir une aire finie ou une aire infinie.... Pour préciser, on borne le domaine par une droite verticale qu'on déplace ensuite à droite vers l'infini. Ainsi nous avons la définition suivante:

Définition 3.0.1. *Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et $u \geq a$.*
Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^u f(x)\,dx$ admet une limite finie I quand $u \to +\infty$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et on pose

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Dans le cas contraire (limite infinie ou pas de limite) on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

De même, on peut définir une intégrale généralisée sur $]-\infty, a]$.
exemple 1 On a

$$\int_1^u \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_1^u = \arctan u - \arctan 1.$$

Quand $u \to +\infty$, $\arctan u \to \frac{\pi}{2}$. Par conséquent $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ converge et sa valeur est $\frac{\pi}{4}$.
exemple 2 Pour $t < -1$ on a

$$\int_t^{-1} \frac{1}{x}\,dx = -\ln|t|$$

donc $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty} -\ln|t| = -\infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$ diverge.
exemple 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ diverge (voir TD).

Remarques 3.0.1. • *$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ ont la même nature (elles convergent) et n'ont pas la même valeur. On dit que la nature d'une intégrale (convergence ou bien divergence) d'une fonction continue sur $[a, +\infty[$ est indépendante de la borne finie a.*
• *Soit f une fonction admettant une limite l en $+\infty$. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge alors $l = 0$. Mais $l = 0$ n'est pas une condition suffisante pour la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ comme le montre l'exemple suivant $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge et $\lim_{x\to+\infty} = 0$.*

La proposition suivante nous donne la nature d'une intégrale généralisée de référence appelée intégrale de Reimann,

Proposition 3.0.1. ***(Intégrale de Reimann)*** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*
Si $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge de valeur égale à $\dfrac{1}{\alpha - 1}$,
si $\alpha \leq 1$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ diverge.

Proof. Soit $\alpha \neq 1$. On a pour tout $u > 1$,

$$\int_1^u \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \Big[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Big]_1^u = \frac{1}{(1-\alpha)u^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)}$$

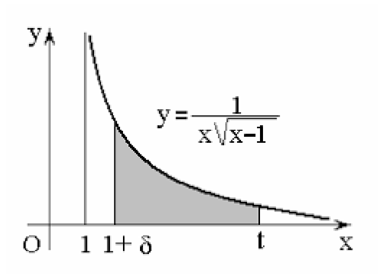
le résultat s'en suit en faisant tendre u vers $+\infty$ selon que $\alpha > 1$, ou $\alpha < 1$:
Si $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_1^u \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln u\big]_1^u = \ln u \to_{u\to+\infty} +\infty.$$

$\square$

Par exemple $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$, $\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$ convergent et $\int_1^{+\infty} \sqrt[5]{x}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ divergent.

3.0.3 Extension d'intégrale définie aux fonctions non bornées



Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ telle que f est non bornée au voisinage de a. de la même manière que dans la partie précédente, on peut étendre la notion l'intégrale définie sur $]a, b]$:

Définition 3.0.2. *Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ telle que f est non bornée au voisinage de a et soit $a < u \leq b$.*
Si l'intégrale $\int_u^b f(x)\,dx$ admet une limite finie I quand $u \to_> a$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,dx$ converge et on pose

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dans le cas contraire (limite infinie ou pas de limite) on dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

D'une manière analogue, on peut définir une intégrale généralisée sur $[a, b[$ et sur $]a, b[$.
exemple 1 On a pour $-2 \leq u < 0$,

$$\int_{-2}^u \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_{-2}^u = \ln|u| - \ln 2.$$

Quand $u \to 0^-$, $\ln|u| - \ln 2 \to -\infty$. Par conséquent $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{x}\,dx$ diverge.

exemple 2 Pour $\frac{1}{2} \leq t < 1$, on a

$$\int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin t - \arcsin \frac{1}{2}$$

donc $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to 1^-} \arcsin t - \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Ce qui implique que

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{3}.$$

exemple 3 La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0 mais elle est prolongeable par continuité en 0 et par suite elle est bornée sur un voisinage de 0. Plus précisement on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Par conséquent la fausse intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx$ peut être considérée comme l'intégrale définie de la fonction $\tilde{f}$ la prolongée par continuité de f sur $[0,1]$. Ainsi $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge.

D'une manière générale, nous avons la proposition suivante

Proposition 3.0.2. *Soit f une fonction continue sur $]a,b]$ $(a,b \in \mathbb{R})$.*
Si f est prolongeable par continuité en a alors $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ converge.

Remarque 3.0.1. *La nature d'une intégrale généralisée est indépendante de la borne où il n'y a pas de problème de convergence. Par exemple l'intégrale suivante $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ qui est généralisée (impropre) en 1 possède la même nature que celle de $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. D'après l'exemple précédent, elles convergent. De plus, la première vaut $\dfrac{\pi}{3}$ et la seconde vaut $\dfrac{\pi}{2}$.*

N.B 3.0.1. *L'intégrale suivante $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$ est généralisée en 0, c'est pour cela que l'évaluation suivante:*

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx = \Big[\frac{-1}{2x^2}\Big]_{-1}^{2} = \frac{-1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

est incorrecte

La proposition suivante nous donne la nature d'une autre intégrale généralisée de référence appelée aussi intégrale de Reimann,

Proposition 3.0.3. ***(Intégrale de Reimann)*** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*
Si $\alpha < 1$, alors $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge de valeur égale à $\dfrac{1}{\alpha - 1}$,
si $\alpha \geq 1$, alors $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ diverge.

Proof. Par primitivation sur $[u,1]$ où $u \in]0,1]$ et faire tendre u vers 0^+... □

Par exemple $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$, $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$ divergent et $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt[5]{x}\,dx$, $\displaystyle\int_{0}^{1,5} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ convergent.

3.0.4 Propriétés d'intégrales généralisées

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la linéarité des intégrales définies après un passage à la limite

Proposition 3.0.4 (Linéarité)**.** *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$ et λ et μ deus nombres réels.*
Si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ convergent, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx$ converge et

$$\int_a^{+\infty} \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Proposition 3.0.5 (Croissance et positivité)**.** *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$ telles que*
les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ sont convergentes.

$$\text{Si} \quad f \le g \text{ sur } \quad [a,+\infty[\quad \text{alors} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

En particulier si $f \ge 0$ sur $[a,+\infty[$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \ge 0$.

Outre la linéarité et la positivité, les intégrales généralisées possèdent les propriétés suivantes:

Proposition 3.0.6. *Si les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ sont convergentes alors la somme*

$$J = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

a une valeur indépendante de a et $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Proposition 3.0.7. *Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ et $c \in]a,b[$.*
Si les integrales $\displaystyle\int_a^{c} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_c^{b} f(x)\,dx$ sont convergentes alors la somme

$$J = \int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{b} f(x)\,dx$$

a une valeur indépendante de c et $J = \displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$.

N.B 3.0.2. *La convergence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ implique que*

$$J = \lim_{u \to +\infty} \int_{-u}^{u} f(x)\,dx$$

la réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant:
On a $\int_{-u}^{u} x\,dx = 0$ *donc* $\lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^{u} x\,dx = 0$. *Cependant les deux intégrales* $\int_{-\infty}^{0} x\,dx$ *et* $\int_{0}^{+\infty} x\,dx$ *divergent de sorte que* $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ *ne converge pas.*[1]

Les propriétés d'intégration par parties et du changement de variable s'étendent aux intégrales généralisées après justification avec des passages à la limite. Ces propriétés permetent non seulement de calculer ces intégrales mais aussi de déterminer leur nature:

Proposition 3.0.8 (Intégration par parties)**.** *Soit u et v des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, alors dans la formule d'intégration par parties*

$$\int_{a}^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\big[u(x)v(x)\big]_a^t - \int_{a}^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx$$

L'existence de deux des trois termes entraîne l'existence du troisième et la validité de la formule.

Remarque Des propriétés analogues sont vraies pour les autres cas $]-\infty,b]$, $[a,b[$, $]a,b[\dots$

Exemple Considérons l'intégrale de sinus cardinal $I = \int_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$. La proposition permet d'écrire

$$I = [\frac{-\cos x}{x}]_1^{+\infty} - \int_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

On a $\lim_{x\to+\infty}\frac{-\cos x}{x} = 0$ en appliquant du théorème de comparaison des limites (ou des gendarmes), donc

$$[\frac{-\cos x}{x}]_1^{+\infty} = \cos 1$$

La convergence de l'intégrale $\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$ sera établie dans le dernier paragraphe. Ainsi I converge.

Proposition 3.0.9 (Changement de variable)**.** *Soient les fonctions f continue sur $[a,b[$, φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta[$ avec $\varphi(\alpha)=a$, $\lim_{t\to\beta^-}\varphi(t) = b^-$ et $\varphi([\alpha,\beta[) \subset [a,b[$. Les intégrales suivantes sont simultanément convergentes (ou divergentes) et sont alors égales*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Remarque Des propriétés analogues sont vraies pour les autres cas $]a,b[$, $[a,+\infty[\dots$

Exemple Considérons l'intégrale $F = \int_{0}^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$. On a $x\mapsto\sin(x^2)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et soit $\varphi(t)=\sqrt{t}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\varphi(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$. Donc

$$F = \int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt$$

L'intégrale F ainsi que $F' = \int_{0}^{+\infty}\cos(x^2)\,dx$ s'appellent intégrales de Fresnel. Elles jouent un rôle important en optique ondulatoire.

[1] On peut écrire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to-\infty}\left(\lim_{v\to+\infty}\int_{u}^{v} f(x)\,dx\right)$

3.0.5 Intégrales de fonctions de signe constant

Nous allons présenter des critères de base pour les intégrales généralisées de fonctions positives. le cas de fonctions négatives se ramène, par linéarité, au cas des fonctions positives.

critère de comparaison

Théorème 3.0.1. *Soient f, g des fonctions continues et positives sur $[a, b[$ ($b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$). S'il existe une constante k indépendante de x telle que $f(x) \leq kg(x)$ sur $[a, b[$, alors*

$\odot$ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ *converge* $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *converge,*

$\odot$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge* $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ *diverge.*

Exemple 1 On a pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\quad e^{-x^2} \leq e^{-x}$ et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge (utiliser la définition) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge.

Exemple 2 L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^3}\,dx$ est-elle convergente ?

L'intégrale est généralisée en $+\infty$. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{\ln x}{1+x^3}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sont positives au voisinage de $+\infty$ et vérifient $\dfrac{\ln x}{1+x^3} \leq \dfrac{1}{x^2}$ pour tout $x \geq 1$. Puisque l'intégrale de Reimann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (voir la proposition 3.0.1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^3}\,dx$ converge.

critère d'équivalence

Théorème 3.0.2. *Soient f, g des fonctions continues et strictement positives sur $[a, b[$. S'il existe une constante $L > 0$ telle que $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ (en particulier si $f \sim_b g$), alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ sont de même nature.*

Exemple 1 Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\,dx$ qui est généralisée en $\frac{\pi}{2}$?

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ est strictement positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et l'approximation affine de cos au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ s'écrit

$$\cos(x) = \frac{\pi}{2} - x + o(x - \frac{\pi}{2})$$

ce qui implique $\dfrac{1}{\cos x} \sim_{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$. Comme $x \mapsto \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$ est strictement positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}\,dx$ diverge (sa primitive est usuelle) le théorème nous permet de conclure que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\,dx$ diverge.

Exemple 2 Pour déterminer la nature de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$, on peut remarquer qu'il s'agit d'une fonction positive sur $]0,1]$ (ou sur un voisinage de 0) et que

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \sim_0 \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{(la limite du rapport des deux fonctions en 0 vaut 1)}$$

et comme l'intégrale de Reimann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$ converge, K converge.

Exemple 3 Déterminons la nature de l'intégrale $H = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}\,dx$. on remarque d'abord qu'il s'agit d'une fonction positive sur $]0,1]$ et que

$$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin x}{x}\frac{1}{x} \sim_0 \frac{1}{x}$$

car $\displaystyle\lim_0 \frac{\sin x}{x} = 1$ et l'équivalence des fonctions au voisinage d'un point est compatible avec le produit.

Comme l'intégrale de Reimann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverge, H diverge.

critère de negligeabilité

Théorème 3.0.3. *Soient f, g des fonctions continues sur $[a,b[$ ($b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$) de signe constant au voisinage de b telles que $f = o_b(g)$. Alors*

⊙ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ *converge* $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *converge,*

⊙ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge* $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ *diverge.*

Remarques

• Si on sait seulement que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge ou que $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ diverge, on ne peut rien conclure.

• Il es utile d'utiliser ce critère avec $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ et se ramener dans l'étude aux intégrales de Reimann.

Exemple Les intégrales de reimann offrent une échelle pratique de comparaison comme le montre l'exemple suivant: On a $\dfrac{\ln x}{x^2} = o_{+\infty}(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}})$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = 0$ et les deux fonctions sont positives au voisinage de $+\infty$. Puisque $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ converge, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ converge aussi.

3.0.6 Intégrales de fonctions de signe quelconque

Le théorème suivant permet de se ramener pour la convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction de signe quelconque au cas d'une intégrale d'une fonction de signe constant (positive).

Théorème 3.0.4. *Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ ($b \in \mathbb{R}$ ou $b=+\infty$). Alors si $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.*

Définition 3.0.3. ◦ *On dit que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est absolument convergente si $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge.*

◦ *On dit que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est semi-convergente si elle est convergente et non absoluement convergente.*

Exemple La fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x^2}$ change de signe sur $[1,+\infty[$ aux points $\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$) et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$ est absolument convergente, en effet, sur $[1,+\infty[$, on a

$$0 \leq |\frac{\cos(x)}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$$

et comme l'intégrale de Reimann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge on obtient en utilisant le critère de comparaison que $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\frac{\cos(x)}{x^2}|\,dx$ converge et par le théorème précédent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$ converge aussi.

Remarque D'après le théorème précédent on conclut que:

La convergence absolue $\Rightarrow$ la convergence.

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant:
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ est semi-convergente. En effet elle converge (en utilisant une intégration par parties, voir TD pour l'étude du cas général $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\,dx$ $(\alpha > 0)$ ou en vertue de la règle d'Abel..) mais elle n'est pas absolument convergente en remarquant que pour tout $x \geq 1$ on a

$$|\frac{\sin(x)}{x}| \geq \frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{1-2\cos(2x)}{2x}.$$

Par une intégration par partie sur les intégrales définies(avec $f'(x) = \cos 2x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$) on obtient pour tout $u > 1$:

$$\int_1^u \frac{1-2\cos(2x)}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\big[\ln x\big]_1^u - \frac{1}{4}\big[\frac{\sin(2x)}{x}\big]_1^u - \frac{1}{4}\int_1^u \frac{\sin(2x)}{x^2}\,dx$$

En faisant tendre u vers $+\infty$, le premier terme du membre à droite tend vers $+\infty$, le deuxième terme converge vers $\dfrac{\sin 1}{4}$ en utilisant le fait que $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \frac{\sin(2u)}{u} = 0$ (par la règle des gendarmes) et pour le troisième terme, nous remarquons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2}\,dx$ converge absolument. Ainsi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-2\cos(2x)}{2x}\,dx \qquad \text{diverge.}$$

Et enfin, par le théorème de comparaison des fonctions à signe constant, on déduit que

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx \qquad \text{diverge.}$$

Pour montrer qu'une intégrale est semi-convergente c'est à dire qu'elle converge sans qu'elle soit absolument convergente, on dispose du théorème suivant:

Théorème 3.0.5 (Règle d'Abel pour les intégrales)**.** *Soient f, g des fonctions continues sur $[a, +\infty[$ telles que*

(i) *f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$,*

(ii) *f décroît et tend vers 0 quand $x \to +\infty$,*

(iii) *il existe un réel $C \geq 0$ tel que $\left|\int_a^u g(x)\, dx\right| \leq C \quad \forall u \in [a, +\infty[$ (g de primitive bornée).*

Alors

$$\textit{l'intégrale } \int_a^b f(x)g(x)\, dx \textit{ est convergente.}$$

Exemple L'intégrale $A = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\, dx$ converge. En effet, en peut écrire $\frac{\sin(x)}{x^2} = \sin(x)\frac{1}{x^2}$. la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, elle décroît et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ de plus, on a pour tout $u \geq 0$

$$\left|\int_1^u \sin x\, dx\right| = \left|\left[-\cos x\right]_1^u\right| = |-\cos u + \cos 1| \leq |-\cos u| + |\cos 1| \leq 2.$$

D'après la règle d'Abel, A converge.
Remarque Nous pouvons montrer la convergence absolue de A (et donc la convergence de A) en remarquant que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a

$$\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

et que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge puisque c'est une intégrale de Reimann qui correspond à $\alpha = 2$ dans la proposition 3.0.1.
Exemple Plus généralement que dans l'exemple précédent, considérons pour $\alpha \in \mathbb{R}$, les intégrales suivantes

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\, dx \quad \text{et} \quad J_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}\, dx$$

grâce aux résultats précédents (propriétés, critères de comparaison, d'Abel...) il découle que

$$I_\alpha \text{ et } J_\alpha \text{ sont}$$

- convergentes si $\alpha > 0$, plus précisement elles sont absolument convergentes pour $\alpha > 1$ et semi-convergentes pour $0 < \alpha \leq 1$
- divergentes pour $\alpha \leq 0$.

Ainsi l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx + I_1$ converge.
Les intégrales de Fresnel (voir les intégrales de réference dans le paragraphe suivant) convergent puisque en effectuant un changement de variable, elles s'expriment en $I_{\frac{1}{2}}$ et $J_{\frac{1}{2}}$.

3.0.7 Intégrales de références [Facultatif]

Outre les intégrales de Reimann $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ presentées dans les propositions 3.0.1 et 3.0.3 on a d'autres intégrales de références:

<u>Intégrales de Bertrand :</u>

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $a > 0$
i) Si $a > 1$, $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}\,dx$ converge si $\alpha > 1$, β est quelconque ou bien si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
ii) Si $0 < a < 1$, $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta}\,dx$ converge si $\alpha > 1$, β est quelconque ou bien si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

<u>Intégrales de Gauss:</u>

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge (voir critère de comparaison) et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

<u>Intégrales de Dirichlet:</u>
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

<u>Intégrales de Fresnel:</u>

$\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)dx$ et $\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right)dx$ convergent (voir l'exemple dans la partie changement de variables) et leurs valeur est $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

<u>Fonction Eulérienne: fonction Gamma</u>

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1}\,dt \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$.
$\Gamma(\alpha)$ converge ssi $\alpha > 0$ (en exercice) et sa valeur est égale pour $n \in \mathbb{N}^*$ à

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$