Examen d'Analyse II
(1h30min)

Exercice 1. (7 Pts$= 2+2+3$)

a. En utilisant la décomposition en éléments simples, montrer que
$$\int \frac{1}{x^3-x}\,dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + cte.$$

b. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)-\cos(t)}\,dt.$

c. Résoudre sur $]1,+\infty[$ l'équation linéaire : $\quad (E) \quad xy' - y = \dfrac{x}{x^2-1}.$

Exercice 2. (7 Pts$= 2+3+2$)

a. Etudier la nature des séries de terme général suivant : $u_n = e^{-n}$ et $v_n = \frac{n}{2^n}$.

b. Etudier la convergence des intégrales généralisées :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2-1)}{t^2-1}dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt.$$

c. Donner le domaine de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n e^{-n^2 x}}{1+n^4}.$

Exercice 3. (6 Pts $= 4\times 1,5$)

On considère, pour tout $n\in\mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [-1,1]\to\mathbb{R}$ définies par
$$f_n(x) = \sin(nx^2)\exp(-nx^2) + \frac{1}{1+x^2}.$$

a. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f qu'on déterminera.

b. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.

c. Montrer que $\forall a>0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

d. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_n(x)\,dx.$

N.B :
— Dans l'exercices 2, les questions sont indépendantes.
— Les calculettes et les documents sont interdits.

Bonne chance