Corrigé d'Examen d'Analyse II

Exercice 1. (7 Pts$= 2 + 2 + 3$)

a. On a $\dfrac{1}{x^3 - x} = \dfrac{1}{x(x-1)(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$ avec $a = -1, b = c = \frac{1}{2}$, d'où

$$\int \frac{1}{x^3 - x}\, dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + cte.$$

b. On pose $x = \cos(t)$, d'où $dx = -\sin(t)dt$, donc

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t) - \cos(t)}\, dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{x^3 - x}\, dx = -\frac{\ln(3)}{2}.$$

c. On commence par résoudre l'équation homogène $xy' - y = 0$. On a

$$\begin{aligned} xy' - y = 0 \Rightarrow\ & \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow\ & \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow\ & \ln|y| = \ln|y| + \text{cte} \\ \Rightarrow\ & y = C.x, \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On cherche maintenant une solution particulière de (E) ; sous la forme $y_p = C(x).x$; par la méthode de variation de la constante :

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) \Rightarrow\ & xy_p' - y_p = \frac{x}{x^2 - 1} \\ \Rightarrow\ & x^2C'(x) + xC(x) - xC(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \\ \Rightarrow\ & C'(x) = \frac{1}{x^3 - x} \\ \Rightarrow\ & C(x) = \int \frac{1}{x^3 - x}\, dx \\ \Rightarrow\ & C(x) = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| \\ \Rightarrow\ & y_p = C(x).x = x(-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1|). \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Cx + x(-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1|), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Prière de m'envoyer le fichier des notes avec les absents avant 08-06-2018.
zitanem@gmail.com ; Tel : 0666317445.

Exercice 2. (7 Pts$= 2 + 3 + 2$)

a.

Exercice 3. (6 Pts $= 4 \times 1,5$)

a.