UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL — FACULTÉ DES SCIENCES

Département de Mathématiques
Filière : SMPC
Session Ordinaire : 15-06-19

Examen d'Analyse II (1h30)

Exercice 1. (7 Pts$= 2+2+3$)

a. En utilisant la décomposition en éléments simples, montrer que

$$(\forall x > 1) : \qquad \int \frac{-2}{x^3-x}\,dx = \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) + cte.$$

b. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_1^2 \frac{-2}{e^{2t}-1}\,dt = \ln\left(\frac{e^2}{e^2+1}\right)$.

c. Résoudre sur $]1,+\infty[$ l'équation linéaire : $\quad (E) \quad x(x^2-1)y' + 2y = x^2.$

Exercice 2. (9 Pts$= 2+2+3+2$)

a. Donner la forme d'une solution particulière de l'équation :

$$y'' - 2y' + y = xe^x.$$

b. Étudier la nature des séries de terme général suivant :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \ln(1+e^{-n}).$$

c. Étudier la convergence des intégrales généralisées :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

d. Donner le domaine de définition de la fonction $\displaystyle\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

Exercice 3. (4 Pts $= 2+1+1$)

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = x^n(2-x).$$

a. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f et que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

b. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,a]$ pour tout $a \in]0,1[$.

c. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,dx$.

N.B :

— Dans l'exercices 2, les questions sont indépendantes.
— Les calculettes et les documents sont interdits.

Bon Courage