Corrigé d'Examen d'Analyse II

Exercice 1. (7 Pts$= 2 + 2 + 3$)

a. On a $F(x) := \dfrac{-2}{x^3 - x} = \dfrac{-2}{x(x-1)(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$, avec :

$$a = x.F(x)\Big|_{x=0} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}\Big|_{x=0} = 2,$$

$$b = (x-1).F(x)\Big|_{x=1} = \frac{-2}{x(x+1)}\Big|_{x=1} = -1,$$

$$c = (x+1).F(x)\Big|_{x=-1} = \frac{-2}{x(x-1)}\Big|_{x=-1} = -1,$$

d'où, $F(x) := \dfrac{-2}{x^3 - x} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$. Donc,

$$\int \frac{1}{x^3 - x}\, dx = 2\ln(x) - \ln(x-1) - \ln(x+1) + cte = \ln\left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right) + cte.$$

b. On pose $x = e^t$, d'où $dx = e^t\, dt = x\, dt$, c-à-d $dt = \dfrac{dx}{x}$, donc

$$\int_1^2 \frac{-2}{e^{2t} - 1}\, dt = \int_e^{e^2} \frac{-2}{x^3 - x}\, dx = \left[\ln\left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right)\right]_e^{e^2} = \ln\left(\frac{e^2}{e^2 + 1}\right).$$

c. On commence par résoudre l'équation homogène $x(x^2 - 1)y' + 2y = 0$. On a

$$\begin{aligned} x(x^2-1)y' + 2y = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-2dx}{x^3 - x} \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-2dx}{x^3 - x} \\ &\Rightarrow \ln|y| = \ln\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) + \text{cte} \\ &\Rightarrow y = \frac{C.x^2}{x^2 - 1}, \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On cherche maintenant une solution particulière de (E) ; sous la forme $y_p = C(x).\dfrac{x^2}{x^2 - 1}$; par la méthode de variation de la constante :

$$
\begin{aligned}
y_p \text{ est solution de } (E) &\Rightarrow x(x^2-1)y_p' + 2y_p = x^2 \\
&\Rightarrow x^3C'(x) - C(x).\frac{x^2}{x^2-1} + C(x).\frac{x^2}{x^2-1} = x^2 \\
&\Rightarrow C'(x) = \frac{1}{x} \\
&\Rightarrow C(x) = \int \frac{1}{x}\,dx \\
&\Rightarrow C(x) = \ln(x) \\
&\Rightarrow y_p = C(x).\frac{x^2}{x^2-1} = \ln(x).\frac{x^2}{x^2-1}.
\end{aligned}
$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y(x) = y_h(x)+y_p(x) = C.\frac{x^2}{x^2-1}+\ln(x).\frac{x^2}{x^2-1} = \Big(C+\ln(x)\Big)\frac{x^2}{x^2-1}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. (7 Pts$= 2+2+3+2$)

a. L'équation caractéristique (EC) : $r^2-2r+1=0$ admet une racine double $r=1$. Et $xe^x = e^{mx}\Big(P_1(x)\cos(\omega x)+Q_{-\infty}(x)\sin(\omega x)\Big)$ avec $m=1$, $\omega=0$, $P_1(x)=x$ et $Q_{-\infty}(x)=0$. Or $m+i\omega=1$ est racine double de (EC), alors, la solution particulière de (E) est de la forme :

$$
\begin{aligned}
y_p(x) = &\ x^2e^{mx}\Big(R_1(x)\cos(\omega x)+T_1(x)\sin(\omega x)\Big) \\
= &\ x^2e^{x}\Big((ax+b)\cos(0.x)+(\alpha x+\beta)\sin(0.x)\Big) \\
= &\ x^2(ax+b)e^x.
\end{aligned}
$$

b. ♣ On a $n^2u_n = n^2\big(\frac{1}{2}\big)^{\sqrt{n}} = e^{2\ln n}e^{-\sqrt{n}\ln 2} = e^{\sqrt{n}\left(2\frac{\ln n}{\sqrt{n}}-\ln 2\right)}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = 0 \neq \infty$, parconséquent, d'après les règles de Riemann, la série $\sum u_n$ converge.
♣ On a $\ln(1+e^{-n}) \sim_{+\infty} e^{-n}$ et $\sum e^{-n}$ est une série géométrique ($q=\frac{1}{e}<1$) convergente (on peut utiliser le critère de Cauchy, critère de D'Alembert, les règles de Riemenn...), donc, d'après le critère de comparaison, la série $\sum \ln(1+e^{-n})$ converge.

c. ♣ La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$ est continue sur $]1;+\infty[$, il y a donc deux problèmes en 1 et en $+\infty$.

◇ On a $\lim_{t\to 1} \frac{\ln(t)}{t^2-1} = \lim_{t\to 1} \frac{\ln(t)}{t-1}.\frac{1}{t+1} = 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2} =$ finie, donc, l'intégrale $\int_1^c \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ est convergente $(c>1)$.

◇ On a $\frac{\ln(t)}{t^2-1} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2(\ln t)^{-1}}$ et $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^2(\ln t)^{-1}}\,dt$ est une intégrale de Bertrand convergente car $(\alpha = 2 > 1, \beta\text{qlq})$, donc, d'après le critère de comparaison $\int_c^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ converge.

Ou bien, on a : $\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}}.\frac{\ln(t)}{t^2-1} = 0 \neq \infty$. Donc, $\int_c^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$ converge (d'après les règles de Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1$).

Conclusion : $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt = \int_1^{c} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt + \int_c^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt = cv + cv = cv.$

♣ La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$, il y a donc un problème en $+\infty$. On a $\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$, donc, d'après les règles de Riemann $(\alpha = 2 > 1)$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge.

d. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\left|\frac{\arctan(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{\pi}{2}.\frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série de fonction $\sum_{n\geq 1} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $D_\psi = \mathbb{R}$.

Ou bien, on a : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\lim_{n\to+\infty} n^2.\frac{\arctan(nx)}{n^2} = \frac{\pi}{2} \neq \infty$. Par conséquent, d'après les règles de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. D'où, $D_\psi = \mathbb{R}$.

Exercice 3. (4 Pts = 2 + 1 + 1)

a. soit $x \in [0,1]$, on a $\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0,1[, \\ 1 & \text{pour } x = 1. \end{cases}$

D'où, pour $x = 1$ on a $f_n(1) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et pour $0 \leq x < 1$ on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0,1[\\ 1, & \text{pour } x = 1. \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ mais la fonction f est discontinue, donc, la convergence n'est pas uniforme.

b. soit $x \in [0, a]$, on a $|f_n(x) - f(x)| = |x^n(2-x) - 0| = x^n(2-x) \leq 2a^n$,d'où $\sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| \leq 2a^n$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ (car $0 \leq a < 1$), donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

C-à-d, la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $g = 0$.

Ou bien, $\Big(|f_n(x) - f(x)|\Big)' = \Big(x^n(2-x)\Big)' = x^{n-1}\Big(2n - (n+1)x\Big) \geq 0$, donc, $\sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = a^n(2-a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c. Les fonctions f_n sont intégrables (continues) sur $[0, \frac{1}{2}]$ et la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, \frac{1}{2}]$ vers la fonction $g = 0$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ dt = \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)\ dt = \int_0^{\frac{1}{2}} 0\ dt = 0.$$