Université Moulay Ismaïl — Faculté des Sciences

Département de Mathématiques
Filière : SMPC S_2
Session ordinaire : 11/10/2020

Examen d'Analyse II (1h)

Exercice 1. (9 pts)

Soient I et J les intégrales définies par

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \,, \qquad J = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

1. Calculer I et vérifier que $J > 0$.
2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $I^2 \leq J$.
3. **a)** Montrer par une intégration par parties que $J = \frac{1}{2}I + \frac{1}{4}$
   b) En déduire la valeur de J.
4. Application : calculer l'intégrale suivante $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan x}{1+\tan^2 x}\,dx.$

Exercice 2. (11 pts)

Soit A l'intégrale impropre définie par

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx$$

1. **a)** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ est convergente.
   b) En déduire que l'intégrale $A_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx$ est convergente.
2. **a)** Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(x)}{1+x^2}$
   b) En déduire que l'intégrale $A_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx$ est convergente.
3. **a)** À l'aide d'un changement de variable, montrer que $A_1 = -A_2$.
   b) Déduire de ce qui précède que A est convergente en déterminant sa valeur.
4. Étudier la convergence de l'intégrale $B = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)\ln(x)}{1+x^2}\,dx$.