Département de Mathématiques
Filière : SMPC
Semestre 2
Session ordinaire 11 octobre 2020

Corrigé de l'examen d'Analyse II

Exercice 1. (9 pts)

1. $I = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ (**1.5 pt**)

   $J \geq 0$ car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ est positive sur $[0,1]$. (**0.5 pt**)

   De plus, d'après la formule de la moyenne, il existe $c \in [0,1]$ tel que $J = \dfrac{1}{(1+c^2)^2}$ d'où $J > 0$. (**1 pt**)

2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$I^2 = \Big(\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt\Big)^2 \leq \int_0^1 \Big(\frac{1}{1+t^2}\Big)^2 dt. \int_0^1 dt = J \qquad (\mathbf{1.5\ pt})$$

3. **a)** Par i.p.p, $J = \dfrac{1}{2} I + \dfrac{1}{4}$ (**1.5 pt**)

   b) $J = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}$. (**1 pt**)

4. Poser $t = \tan x$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. D'où

$$K = \int_0^1 \frac{1+t}{(1+t^2)^2}\, dt \quad (\mathbf{1\ pt})$$

$$K = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+t^2}\right]_0^1 + J = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}. \quad (\mathbf{1\ pt})$$

Exercice 2. (11 pts)

1. **a)** Pour $u \in]0,1[$ on a (soit directement soit en procédant par une i.p.p)

$$\int_u^1 \ln x\, dx = -u \ln u + u - 1$$

Comme $\lim\limits_{u \to 0^+} -u \ln u + u - 1 = -1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$ converge. (**1.5 pt**)

b) La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ est négative sur $]0,1]$ et on a

$$\frac{\ln x}{1+x^2} \underset{0^+}{\sim} \ln x \ .$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx$ converge, donc d'après le critère d'équivalence, l'intégrale A_1 converge. (**1.5 pt**)

2. **a)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} = 0.$ (**1.5 pt**)

   b) La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ est positive sur $[1,+\infty[$ et d'après a) on a

$$\frac{\ln x}{1+x^2} = \underset{+\infty}{o}\,(x^{\frac{3}{2}})$$

par suite, A_2 converge par le critère de négligeabilité. (*on peut aussi utiliser la règle en x^α en comparant avec l'intégrale de Reimann pour $\alpha = \dfrac{3}{2}$*). (**1.5 pt**)

3. **a)** Chacune des intégrales A_1 et A_2 converge, le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$ qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,1]$ dans $[1,+\infty[$ donne

$$A_1 = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx = \int_{+\infty}^1 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2} \,.-du/u^2 = -A_2 \quad (\mathbf{1.5\ pt})$$

   b) A_1 et A_2 convergent, donc par linéarité, l'intégrale A est convergente (**1 pt**) et

$$A = A_1 + A_2 = 0 \quad (\mathbf{1\ pt})$$

4. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)\ln(x)}{1+x^2}$ n'est pas de signe constant sur $[1,+\infty[$.
On a pour tout $x \geq 1$,

$$\left|\frac{\sin(x)\ln(x)}{1+x^2}\right| \leq \frac{\ln x}{1+x^2}$$

Puisque l'intégrale A_2 converge, l'intégrale B converge absolument et par conséquent B converge. (**1.5 pt**)