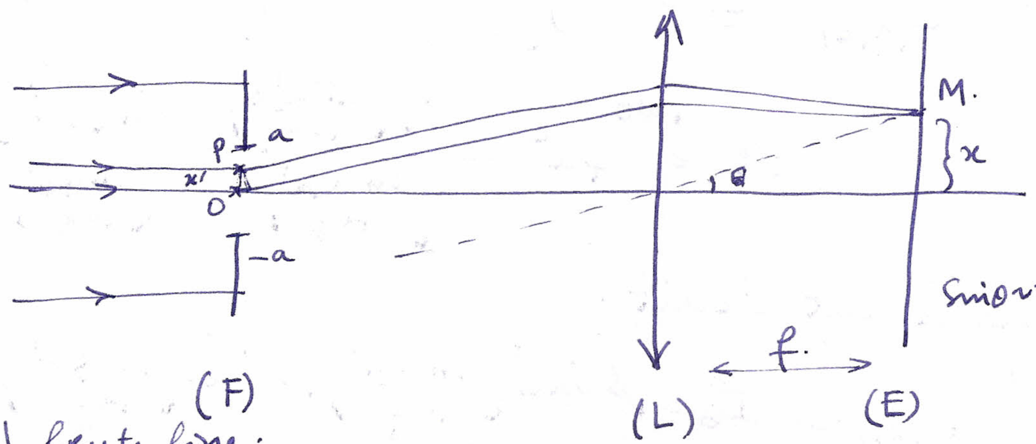
Diffraction : Ex 9 (2021). fente carrée. α_1



$\sin\theta \sim \tan\theta \sim \theta \simeq \frac{x}{f}$.

A] fente fine.

origine des phases en O. On considère P : l'onde arrive en M avec un retard $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$. $\delta_{(x)} = x'\sin\theta \simeq x' \cdot \frac{x}{f}$.

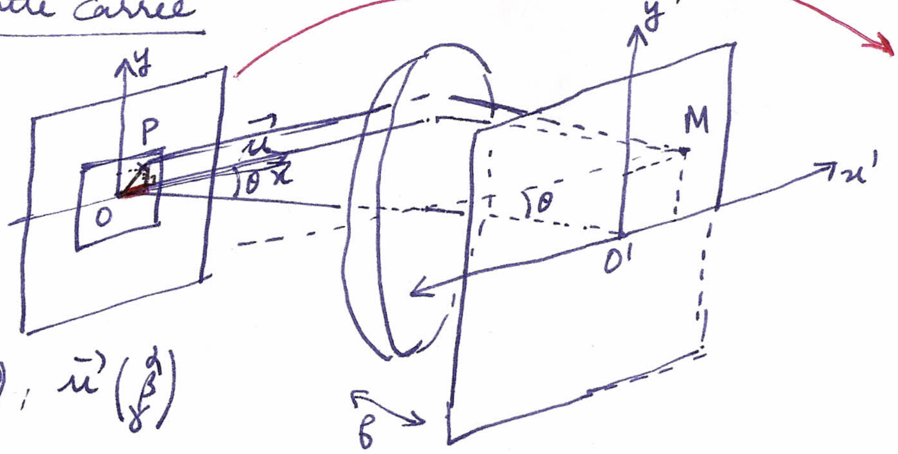
$$d_P E_{(M,t)} = E_0\, e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x'x}{f}\right)\right)} dx'.$$

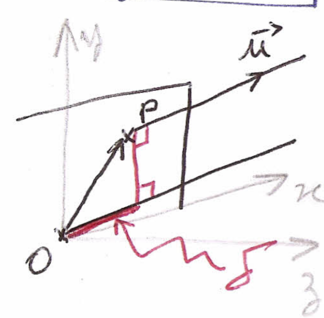
soit l'amplitude totale

$$E_{(M,t)} = E_0\, e^{i\omega t} \int_{-a}^{a} e^{-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{x'x}{f}\right)} dx' = E_0 e^{i\omega t} \frac{a}{\left(-i\frac{2\pi}{\lambda f}\cdot xa\right)} 2i\sin\left(\frac{2\pi xa}{\lambda f}\right)$$

$$I_{(M)} = |E_0|^2\, 4a^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi xa}{\lambda f}\right) \Rightarrow \boxed{4a^2 I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi xa}{\lambda f}\right) = I_{(M)}}$$

B] fente carrée





$P(x, y)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$

$\alpha \sim \frac{x'}{f}$

$\beta \sim \frac{y'}{f}$.

$$\delta_{P(M)} = \vec{OP}\cdot\vec{u} = x\alpha + \beta y + 0\cdot\gamma = \alpha x + \beta y$$

Soit $$dE_{P(M)} = E_0\, e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)} dx\,dy$$

La vibration résultante en $M\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$ est :

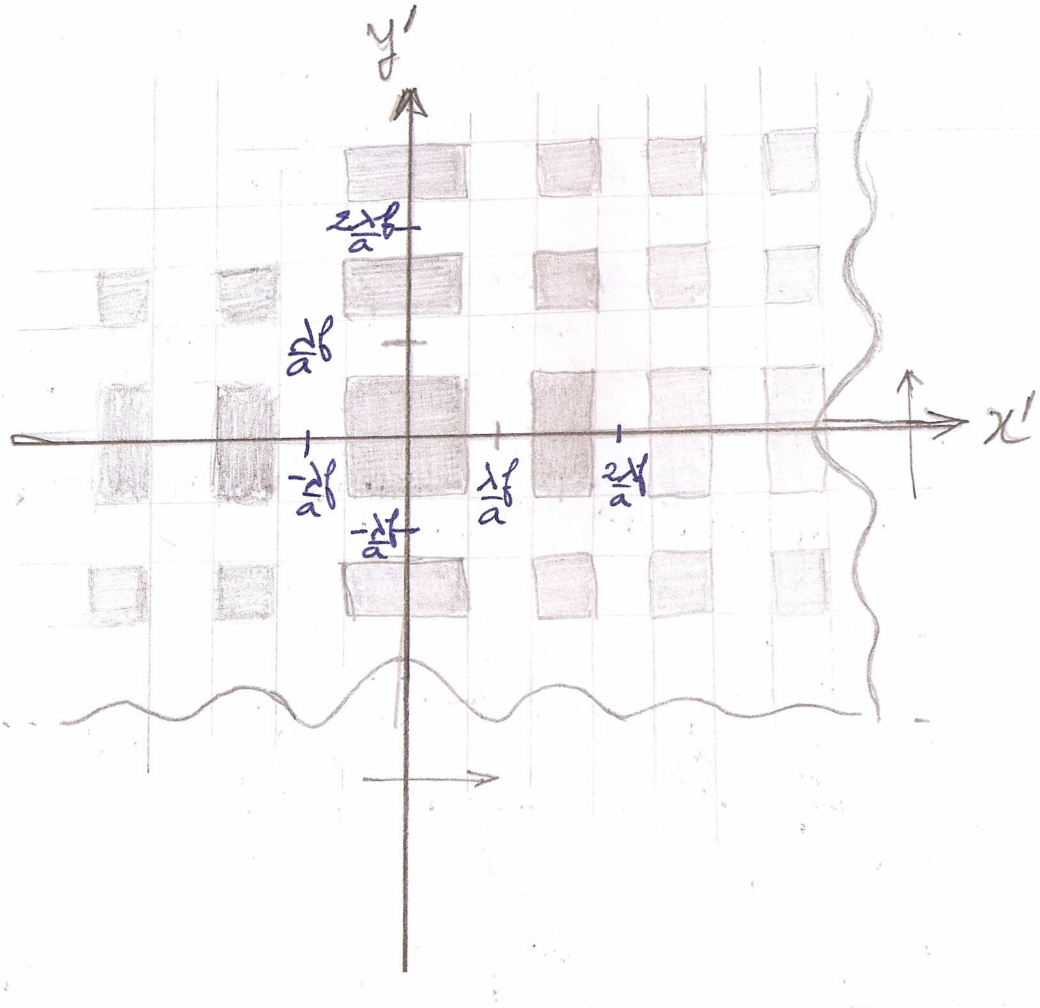
$$E_{(M,t)} = E_0\, e^{i\omega t} \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)} dx\,dy.$$

Soit : $$E_{(M,t)} = E_0 e^{i\omega t} \int_{-a}^{a} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{xx'}{f}} dx \int_{-a}^{a} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda f}yy'} dy$$

$$= E_0 e^{i\omega t} 4a^2 \frac{\sin\left(\frac{2\pi x' a}{\lambda f}\right)}{\left(\frac{2\pi a x'}{\lambda f}\right)} \frac{\sin\left(\frac{2\pi a y'}{\lambda f}\right)}{\left(\frac{2\pi a y'}{\lambda f}\right)}$$

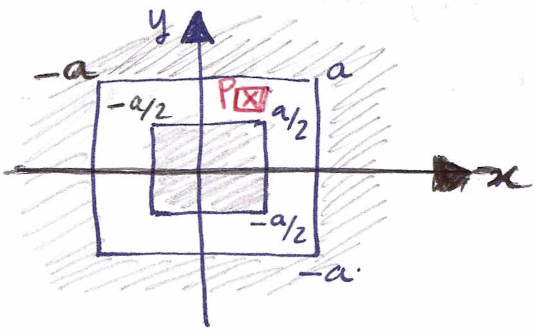
l'éclairement s'écrit :

$$\boxed{I_{(M)} = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi a x'}{\lambda f}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi a y'}{\lambda f}\right)}$$



Diffraction : Ex 9 (2021)

Q.2/



$$x \in \left[-a, -\tfrac{a}{2}\right] \cup \left[\tfrac{a}{2}, a\right]$$

$$y \in \left[-a, -\tfrac{a}{2}\right] \cup \left[\tfrac{a}{2}, a\right]$$

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un élément de surface, centré autour de P, contribue à l'amplitude au point M de l'écran selon l'expression suivante :

$$dE_{(M,t)} = E_0 \, e^{i(\omega t - \frac{2\pi \delta}{\lambda})} \, dx \, dy$$

avec la même configuration que dans la question (1) on a :

$\alpha = \frac{x'}{f}$, $\beta = \frac{y'}{f}$ et en posant $u = \frac{2\pi}{\lambda}\alpha$, $v = \frac{2\pi}{\lambda}\beta$,

on a :

$$\int dE_{(M,t)} = E_0 \, e^{i\omega t} \left[\int_{-a}^{-a/2} e^{-iux} dx + \int_{a/2}^{a} e^{-iux} dx \right] \times \left[\int_{+a/2}^{+a} e^{-ivy} dy + \int_{-a}^{-a/2} e^{-ivy} dy \right]$$

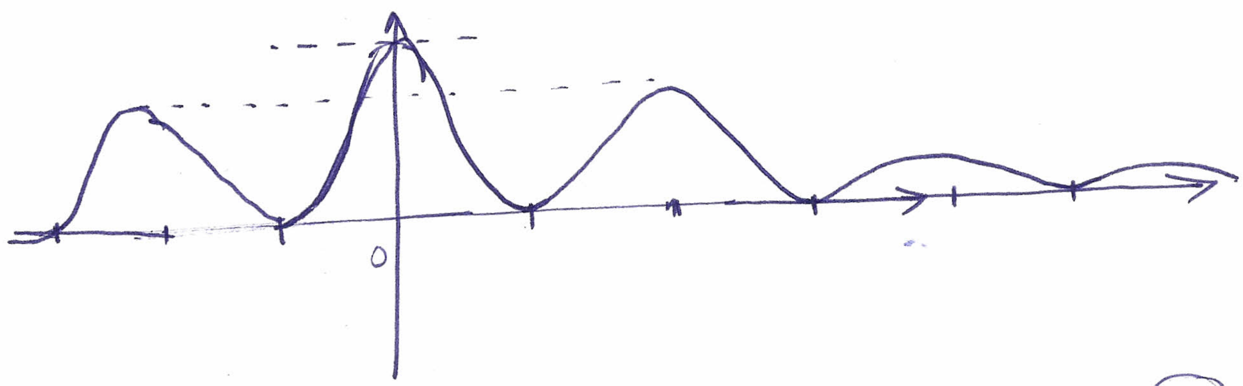
après calculs on obtient :

$$E_{(M,t)} = E_0 \, e^{i\omega t} \, e^{-ia\frac{3}{4}(u+v)} \, a^2 \, \mathrm{sinc}\left(\frac{ua}{4}\right) \cos\left(\frac{3au}{4}\right) . \mathrm{sinc}\left(\frac{va}{4}\right) \cos\left(\frac{3}{4} av\right)$$

où $u = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x'}{f}$ et $v = \frac{2\pi}{\lambda} . \frac{y'}{f}$.

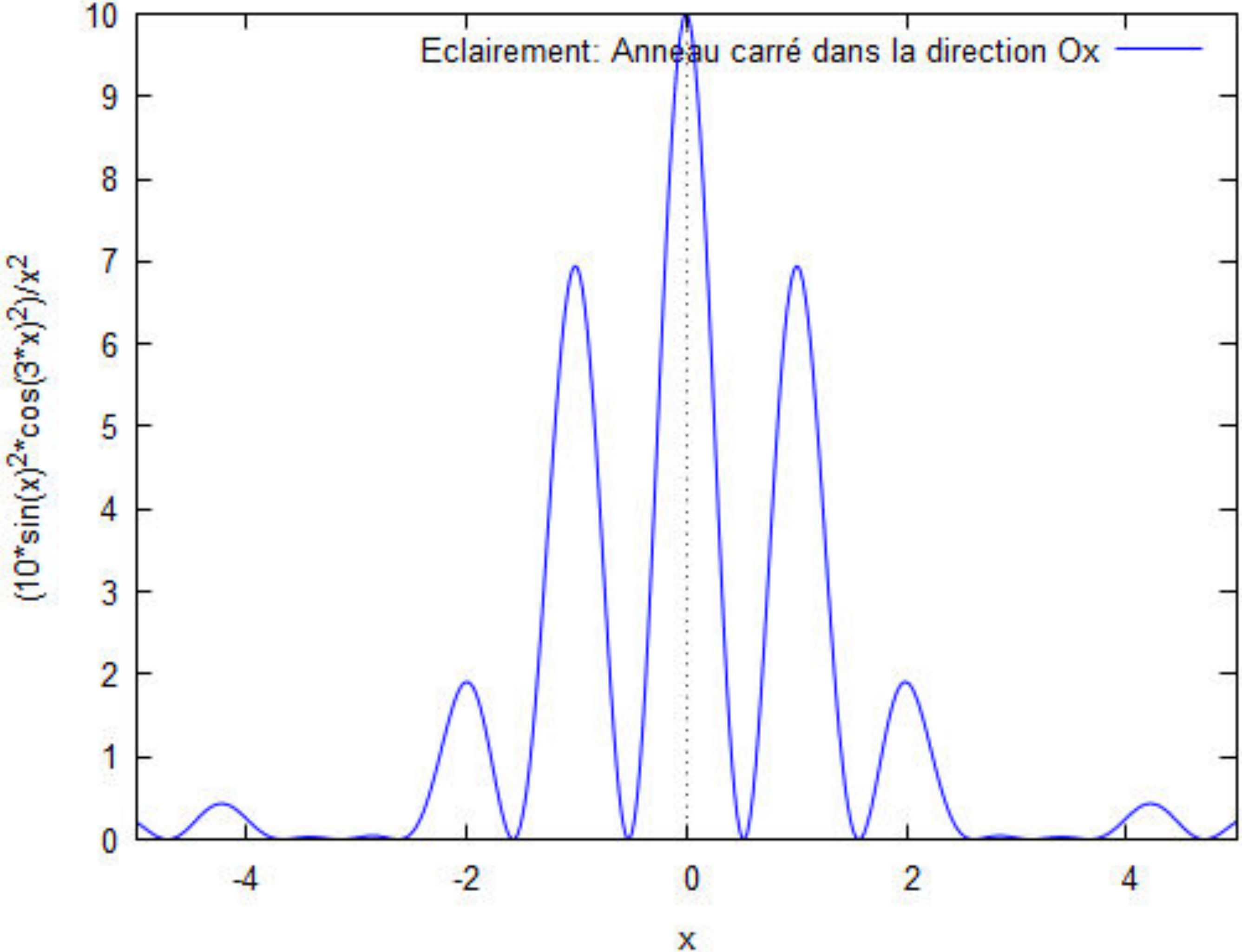
l'éclairement s'écrit :

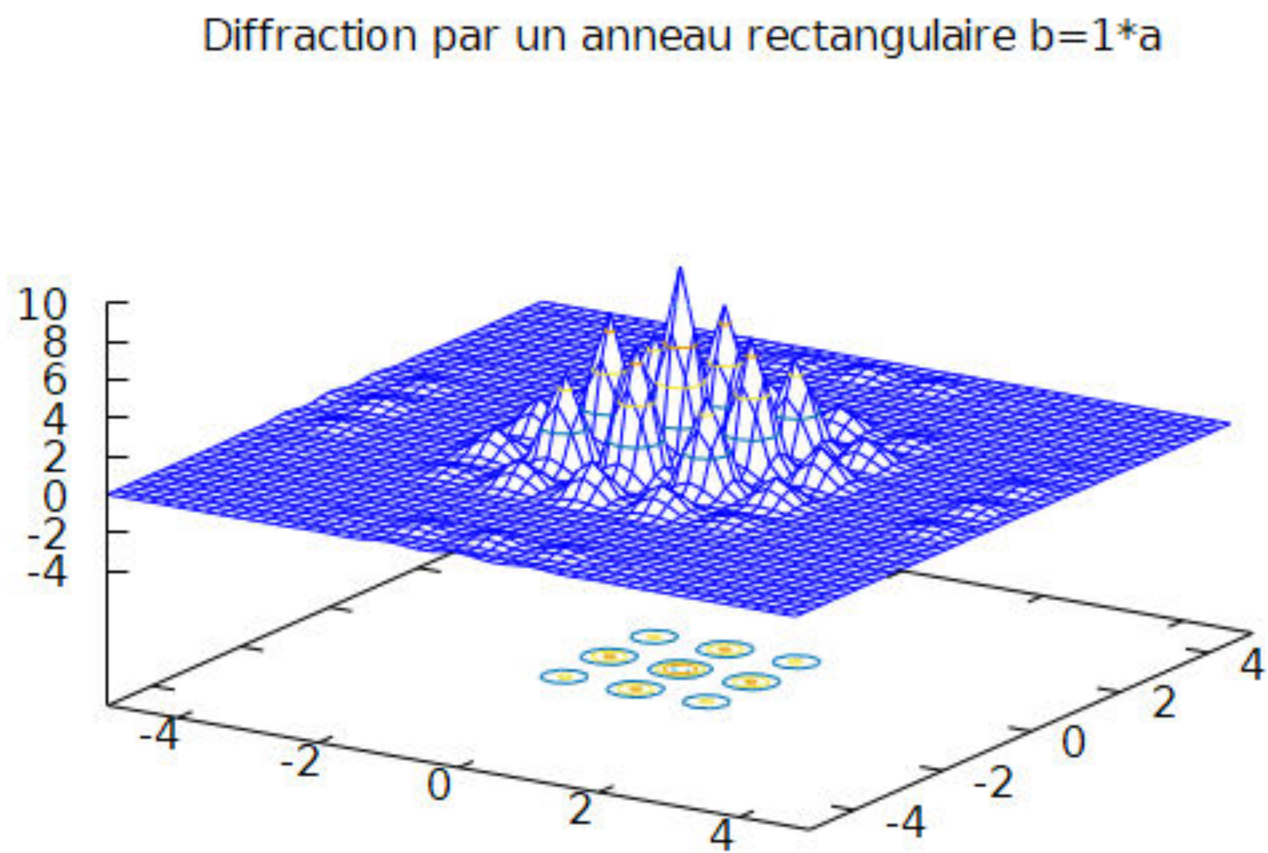
$$I_{(M)} = I_0 \, \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a x'}{2\lambda f}\right) \cos^2\left(\frac{3\pi a}{2\lambda f} x'\right) \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a y'}{2\lambda f}\right) \cos^2\left(\frac{3\pi a y'}{2\lambda f}\right)$$



3/ Si la longueur $b \gg 2a$, la courbe d'intensité tend vers celle de $I(x) = I_0 \, \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a x'}{2\lambda f}\right) \cos^2\left(\frac{3\pi a x'}{2\lambda f}\right)$.

(voir courbes).


Eclairement: Anneau carré dans la direction Ox
(10*sin(x)^2*cos(3*x)^2)/x^2
x
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-4
-2
0
2
4


Diffraction par un anneau rectangulaire b=1*a
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4
-4
-2
0
2
4

Diffraction par un anneau rectangulaire b=4*a