Université Moulay Ismaïl
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire 2020-2021
Filière SMPC
Module Analyse 2

Corrigé de la série 3

1 Exercice 1

1) Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes et donner leures valeurs :
$i = \displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^2+3t}\,dt, \quad j = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+2}\,dt, \quad k = \int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx,$
$l = \displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad m = \int_0^1 \ln u\,du.$
2) Montrer que les intégrales suivantes sont divergentes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{e^t+2}\,dt, \quad J = \int_0^{\pi/2} \tan x\,dx, \quad K = \int_0^{+\infty} \cos u\,du.$$

Corrigé de l'exercice 1 :

1) i est généralisée (ou impropre) en $+\infty$ et en décomposant la fraction $\dfrac{1}{X^2+3X}$ en éléments simples on obtient

$$\frac{1}{X^2+3X} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+3}\right)$$

par définition :

$$\begin{aligned}
i &= \int_e^{+\infty} \frac{1}{t^2+3t}\,dt,\\
&= \lim_{u\to+\infty} \int_e^{u} \frac{1}{t^2+3t}\,dt,\\
&= \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{3}\int_e^{u} \frac{1}{t} - \frac{1}{t+3}\,dt,\\
&= \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{3}\big[\ln(t) - \ln(t+3)\big]_e^u,\\
&= \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{3}\left[\ln\frac{t}{t+3}\right]_e^u,\\
&= \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{3}\left(\ln\left(\frac{u}{u+3}\right) - \ln\left(\frac{e}{e+3}\right)\right),\\
&= \frac{1}{3}\big(\ln(1) - \ln\left(\frac{e}{e+3}\right)\big),\\
&= \frac{\ln(e+3)-1}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi i est convergente de valeur $i = \dfrac{ln(e+3)-1}{3}$.
La fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2+2X+2}$ est un élément de deuxième espèce. En remarquant que

$$X^2+2X+2 = X^2+2X+1+1 = (X+1)^2+1,$$

il vient

$$
\begin{aligned}
j &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+2}\,dt,\\
&= \lim_{u\to+\infty} \int_0^{u} \frac{1}{t^2+2t+2}\,dt,\\
&= \lim_{u\to+\infty} \int_0^{u} \frac{1}{1+(t+1)^2}\,dt,\\
&= \lim_{u\to+\infty} \big[\arctan(1+t)\big]_0^u,\\
&= \lim_{u\to+\infty} \left(\arctan(1+u)-\arctan 1\right),\\
&= \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4},\\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Donc j est convergente et $j=\dfrac{\pi}{4}$.

On a $k=\displaystyle\int_0^{-1}\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$, cette intégrale est impropre en -1 puisque la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ n'est pas définie en -1 et elle n'est pas bornée au voisinage de -1, on a :

$$
\begin{aligned}
k &= \int_0^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx,\\
&= \lim_{u\to-1^+} \int_0^{u} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx,\\
&= \lim_{u\to-1^+} \int_0^{u} (x+1)'(x+1)^{-1/3}\,dx,\\
&= \lim_{u\to-1^+} \left[\frac{(x+1)^{2/3}}{2/3}\right]_0^u,\\
&= \lim_{u\to-1^+} 3/2\left(\sqrt[3]{(u+1)^2}-1\right),\\
&= -3/2.
\end{aligned}
$$

cà d que k converge et $k=-3/2$.

Dans $l=\displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, le point incertain est 1. On a :

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^{1} \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,\\
&= \lim_{u\to1^-} \int_0^{u} \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,\\
&= \lim_{u\to1^-} \int_0^{u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\\
&= \lim_{u\to1^-} \left[\arcsin(t)-\sqrt{1-t^2}\right]_0^u,\\
&= 1+\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

donc l est convergente et vaut $1+\dfrac{\pi}{2}$.

On a :

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^1 \ln(x)\, dx,\\
&= \lim_{u\to 0^+} \int_u^1 \ln(x)\, dx,\\
&= \lim_{u\to 0^+} \left[x\ln(x) - x\right]_u^1, \qquad \text{(par intégration par parties)}\\
&= -1. \qquad \text{(Rappellons que pour tout } r>0 \text{ on a } \lim_{u\to 0^+} u^r \ln u = 0)
\end{aligned}$$

par suite, m est convergente et $m=-1$.
2) Montrons que les intégrales suivantes sont divergentes :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{e^t+2}\, dt,\\
&= \lim_{u\to+\infty} \int_0^u \frac{e^t}{e^t+2}\, dt,\\
&= \lim_{u\to+\infty} \left[\ln(e^t+2)\right]_0^u,\\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

cette intégrale est donc divergente.
Le point incertain dans J est le point $\frac{\pi}{2}$ et pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$\int_0^u \tan(x)\, dx = \int_0^u \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx = \left[\ln(|\cos(x)|)\right]_0^u$$

et comme $\lim_{u\to\pi/2} (\ln(|\cos(u)|) - \ln 1) = -\infty$, l'intégrale J diverge.

$$\begin{aligned}
K &= \int_0^{+\infty} \cos(x)\, dx,\\
&= \lim_{u\to+\infty} \int_0^u \cos(x)\, dx,\\
&= \lim_{u\to+\infty} \left[\sin(x)\right]_0^u,\\
&= \lim_{u\to+\infty} \sin(u).
\end{aligned}$$

On sait que $\lim_{u\to+\infty} \sin(u)$ n'existe pas, en effet si l'on considére les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies respectivement pour tout entier n par $u_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ et $v_n = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{cases} u_n \to +\infty, & \text{quand } n\to+\infty\,;\\ v_n \to +\infty, & \text{quand } n\to+\infty\,; \end{cases} \quad \text{alors que} \quad \begin{cases} \sin(u_n) \to 1, & \text{quand } n\to+\infty\,;\\ \sin(v_n) \to -1, & \text{quand } n\to+\infty\,; \end{cases}$$

Ainsi, l'intégrale K diverge.

2 Exercice 2

(*Quelques critères pour des fonctions de signe constant*)
Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes
$A = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\, dx$, $\quad B = \displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\, dx$, $\quad C = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-x}{\sqrt{(x^2+9)^4}}\, dx$,

$D = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^3}}\, dx, \quad E = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\, dx, \quad F = \int_0^{+\infty} \frac{-10}{t^2+2t+2}\, dt.$

Corrigé de l'exercice 2 : [1]

La fonction sous le signe intégrale A est positive sur $[1, +\infty[$ et on a

$$\big(\forall x \in [1, +\infty[\big) \quad 1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \big(\forall x \in [1, +\infty[\big) \quad \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

Comme l'intégrale de Reimann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ diverge, d'après le critère de comparaison on déduit que A diverge.

<u>*Autrement :*</u> on peut utiliser l'équivalence suivante $\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$ et utiliser le critère d'équivalence.

On a $\big(\forall x \in]-\infty, 0]\big)$ $\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} \leq e^{2x}$ et comme $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx$ converge (utiliser la définition) B converge aussi par le le critère de comparaison.

<u>*Autrement :*</u> au voisinage de $-\infty$ on a $\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} \sim e^{2x}$ et puisque $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx$ converge (utiliser encore la définition) B converge d'après le critère déquivalence.

<u>*Remarque :*</u> L'usage des critères nous permet seulement de déterminer la nature de l'intégrale(convergente ou bien divergente). Pour déterminer la valeur, nous utilisons souvent la définition : pour le cas de B, on remarque que

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\, dx = \frac{1}{2}\arctan(e^{2x}) + c...$$

Ce qui entraine par passage à la limite que $B = \frac{\pi}{8}$.

La fonction $x \mapsto \frac{-x}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$ est négative sur $[1, +\infty[$. On a l'équivalence $x^2 + 9 \sim_{+\infty} x^2$ ce qui implique que

$$\frac{-x}{\sqrt{(x^2+9)^3}} \sim \frac{-1}{x^2}.$$

l'intégrale de Reimann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge, donc la convergence de C en découle d'après le critère d'équivalence.

Remarque : On peut aussi utiliser le critère de comparaison en remarquant que pour tout $x \in [3, +\infty[$, on a

$$x^2 \leq x^2 + 9 \leq 2x^2$$

ce qui implique que

$$\forall x \geq 3, \quad \frac{1}{8x^6} \leq \frac{1}{\sqrt{(x^2+9)^3}} \leq \frac{1}{x^6}$$

par conséquent

$$\forall x \geq 3, \quad \frac{-1}{x^2} \leq \frac{-x}{\sqrt{(x^2+9)^3}} \leq \frac{-1}{\sqrt{8}x^2}$$

1. ***Parmi les différents critères qui nous servent dans ce type de situations, nous allons nous intéresser essentiellement au critère de comparaison et au critère d'équivalence dans des cas simples***

la convergence de l'intégrale de Reimann $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ implique la convergence de $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{-x}{\sqrt{(x^2+9)^3}}\,dx$ et comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{3} \frac{-x}{\sqrt{(x^2+9)^3}}\,dx$ est définie (pas de point incertain), C converge.
La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{x^3}}$ est positive sur $[1,+\infty[$. De plus pour tout x dans $[1,+\infty[$, on a $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ ce qui implique que

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad 0 \leq \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

Puisque l'intégrale de Reimann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ est convergente, l'intégrale D converge.
L'intégrale F est impropre en $+\infty$ et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3x^3e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^6e^{-x^2} = 0$ ce qui implique que $x^3e^{-x^2}$ est negligeable devant $\dfrac{1}{x^3}$ au voisinage de $+\infty$, ce qui entraîne la convergence de F par le critère de négligeabilité (on peut aussi utiliser la règle de Reimann).
L'intégrale F est impropre en $+\infty$, elle est de même nature que $F_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-10}{t^2+2t+2}\,dt$.
Au voisinage de $+\infty$ on a t^2+2t+2 est équivalent à t^2, par suite on a

$$\frac{-10}{t^2+2t+2} \sim_{+\infty} \frac{-10}{t^2}$$

donc F_1 converge d'après le critère d'équivalence et le fait que l'intégrale de Reimann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge.
Par suite F converge.