UNIVERSITÉ MOULAY ISMAIL
FACULTÉ DES SCIENCES MEKNÈS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Exercices corrigés -Algèbre 3-
SMIA
2017-2018

Professeure : Mme Chahrazade BAKKARI

Table des matières

Chapitre 1

Les espaces vectoriels

Exercice 1

1) Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x - y + z - 3t = 4\}$.
E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?
2) Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x^2\}$.
H est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
3) Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1) $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x - y + z - 3t = 4\}$.
• $E \subseteq \mathbb{R}^4$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
• $0_{\mathbb{R}^4} \notin E$, donc E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x^2\}$.
• $H \subseteq \mathbb{R}^2$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
• $(0, 0) \in H$, donc $H \neq \emptyset$.
• Mais H est non stable dans $\mathbb{R}^2$ puisque :
$$u = (1, 1) \in H, \ v = (-1, 1) \in H \ \text{ et } u + v = (0, 2) \notin H.$$
Par suite H n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
3) $\rightarrow \ F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0\}$.
• $F \subseteq \mathbb{R}^3$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
• $(0, 0, 0) \in F$, donc $F \neq \emptyset$.
• On montre que F est stable dans $\mathbb{R}^3$ $(\forall X, Y \in F, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \ \alpha X + \beta Y \in F)$ ou il suffit de trouver une famille génératrice de F.
En effet :
Soit $X = (x, y, z) \in F$. On a : $x + y - z = 0 \Longrightarrow z = x + y$. Donc $X = (x, y, x + y) = (x, 0, x) + (0, y, y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$. Par suite, $F = Vect\big((1, 0, 1), (0, 1, 1)\big)$ (ou $F =< (1, 0, 1), (0, 1, 1) >$) . Dès lors, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$\rightarrow G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

Soit $X \in G$. On a : $X = (a-b, a+b, a-3b)$
$= (a,a,a) + (-b,b,-3b)$
$= a(1,1,1) + b(-1,1,-3)$.

Par suite, $G = Vect\big((1,1,1),(-1,1,-3)\big)$. Dès lors, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

a) $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$ où $u_1 = (1,2,3)$ et $u_2 = (1,0,1)$.

b) $\mathcal{F}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ où $u'_1 = (1,0,1)$, $u'_2 = (2,1,1)$ et $u'_3 = (1,1,1)$.

Solution.

a) $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$. On a $Card(\mathcal{F}) = 2 < \dim \mathbb{R}^3 = 3$, donc $\mathcal{F}$ est une famille non génératrice. Par suite $\mathcal{F}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

b) $\mathcal{F}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$. On a $Card(\mathcal{F}') = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Pour montrer que $\mathcal{F}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que $\mathcal{F}'$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ (ce qui équivaut à montrer que $\mathcal{F}'$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$).
En effet : $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \alpha u'_1 + \beta u'_2 + \gamma u'_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. (Calcul facile à vérifier).

Exercice 3

Soient $E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, x+y+z=0\big\}$ et $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, x-y+2z=0\big\}$.

1) Montrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer une base de E et une base de F.

3) Déterminer une base de $E \cap F$ et une base de $E + F$.

Solution.

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x-y+2z=0\}$.

1) $\to$ Soit $X = (x,y,z) \in E$. On a : $x+y+z=0$, donc $x = -y-z$. Par suite :

$$\begin{aligned} X &= (-y-z, y, z) = (-y, y, 0) + (-z, 0, z) \\ &= y(-1,1,0) + z(-1,0,1). \end{aligned}$$

Dès lors : $E = < (-1,1,0), (-1,0,1) >$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\mathcal{B} = \big((-1,1,0),(-1,0,1)\big)$.
Il est facile de vérifier que $\mathcal{B}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une base de E. (On en déduit que $\dim E = Card(\mathcal{B}) = 2$).
$\to$ Soit $X = (x,y,z) \in F$. On a : $x - y + 2z = 0$, donc $y = x + 2z$. Par suite :

$$\begin{aligned} X &= (x, x+2z, z) = (x, x, 0) + (0, 2z, z) \\ &= x(1,1,0) + z(0,2,1). \end{aligned}$$

Dès lors : $F = < (1,1,0), (0,2,1) >$.
Il est facile de vérifier que $\mathcal{B}' = \big((1,1,0),(0,2,1)\big)$ est libre, et sera donc une base de F. (On en déduit que $\dim F = 2$).

2) $\rightarrow E \cap F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0\}$.
Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3z & = & 0 \\ 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{2} z \\ y = \frac{1}{2} z. \end{cases}$$

Donc $(x, y, z) = (\frac{-3}{2} z, \frac{1}{2} z, z) = z(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

Par suite $E \cap F =< (\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}, 1) >=< (-3, 1, 2) >$ (car $< u >=< \lambda u >$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$).
$\mathcal{B}'' = \{(-3, 1, 2)\}$ est une famille génératrice de $E \cap F$ formée par un seul vecteur non nul, elle est donc libre et par suite $\mathcal{B}''$ est une base de $E \cap F$. (On en déduit que $\dim (E \cap F) = 1$).

$\rightarrow$ On sait que :

$$\begin{aligned} \dim (E + F) &= \dim E + \dim F - \dim (E \cap F) \\ &= 2 + 2 - 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{cases} E + F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3 \\ \text{et } \dim (E + F) = \dim \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

donc $E + F = \mathbb{R}^3$. Par suite, toute base de $\mathbb{R}^3$ sera aussi une base de $E + F$; en particulier la base canonique $\big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\big)$.

Exercice 4

On munit $\mathbb{R}^3$ de l'addition composante par composante définie par :

$$(x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v, z + w).$$

1) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la multiplication externe à opérateurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$c.(x, y, z) = (cx, 0, 0).$$

$\mathbb{R}^3$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les deux lois définies ci-dessus ?

2) On munit $\mathbb{R}^3$ de la multiplication externe à opérateurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$c.(x, y, z) = (cx, cy, cz).$$

a) $\mathbb{Q}^3$ est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$?

b) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ xz = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y = 0\}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Si oui, calculer leur dimension.

Solution.

1) Pour les deux lois définies dans 1), $\mathbb{R}^3$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car, par exemple, $1.(1, 1, 1)(= (1, 0, 0)) \neq (1, 1, 1)$.

2) *a)* $\mathbb{Q}^3$ n'est pas un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car, par exemple, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $(1, 1, 1) \in \mathbb{Q}^3$ et $\sqrt{2}.(1, 1, 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}^3$.

b) • L'ensemble E n'est pas un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car, par exemple, $(0,0,1) \in E$, $(1,0,0) \in E$ et $(0,0,1)+(1,0,0)=(1,0,1) \notin E$.

• D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} F &= \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x+y=0\} \\ &= \{\ (x,-x,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\ x(1,-1,0)+z(0,0,1)\ /\ x,z \in \mathbb{R}\} \\ &=< e_1, e_2 > \end{aligned}$$

F est donc un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (e_1,e_2), avec $e_1=(1,-1,0)$ et $e_2=(0,0,1)$.
On vérifie que (e_1,e_2) est un système libre, et comme on a $F=< e_1,e_2 >$, c'est-à-dire que (e_1,e_2) engendre F, alors c'est une base de F.
Ainsi, $\dim F = 2$.

Exercice 5

Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ muni des lois :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (rf)(x)=rf(x),$$

avec $f,g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $r \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $F_p=\{$ L'ensemble des applications paires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que $F_i=\{$ L'ensemble des applications impaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\}$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F_p dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Solution.

Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ muni des lois :

$$\begin{cases} (f+g)(x)=f(x)+g(x) \\ (rf)(x)=rf(x) \end{cases}$$

avec $f,g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $r \in \mathbb{R}$.

1) Soit F_p l'ensemble des applications paires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Il est clair que $F_p \neq \emptyset$ (car F_p contient l'application nulle θ).
Aussi, si $f,g \in F_p$ et $r \in \mathbb{R}$, alors on a $f+g \in F_p$ et $rf \in F_p$.
D'où, F_p est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2) • On montre, de même, que l'ensemble des applications impaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

• Montrons que $F_p \oplus F_i = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Pour cela, on doit montrer que $F_p \cap F_i = \{\theta\}$ et $F_p + F_i = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Soit $f \in F_p \cap F_i$ et $x \in \mathbb{R}$. On a $f(-x)=-f(x)$ (car $f \in F_i$) et $f(-x)=f(x)$ (car $f \in F_p$), de sorte que $f(x)=-f(x)$ et donc $f=\theta$. D'où $F_p \cap F_i = \{\theta\}$.
Reste à montrer que $F_p+F_i=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Il est clair que $F_p+F_i \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Inversement, soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On a :

$$f(x)=\frac{1}{2}\Big(f(x)+f(-x)\Big)+\frac{1}{2}\Big(f(x)-f(-x)\Big)$$

On vérifie aisément que $\frac{1}{2}\Big(f(x)+f(-x)\Big) \in F_p$ et $\frac{1}{2}\Big(f(x)-f(-x)\Big) \in F_i$.
D'où $F_p \oplus F_i = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 6
Soit $H = \{aX^2 + bX + c \ / \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

1) Vérifier que H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2) Soient P_1, P_2 et $P_3 \in H$ tels que $P_1(X) = X^2,\ P_2(X) = (X-1)^2$ et $P_3(X) = (X+1)^2$.

   a) Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de H.

   b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $R(X) = 12$ et $S(X) = 3X^2 - 1$ dans la base (P_1, P_2, P_3).

Solution.
$H = \{aX^2 + bX + c \ / \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

1) • $H \subseteq \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base canonique $(1, X, X^2, \ldots)$.
• Soit $P \in H$; $P(X) = aX^2 + bX + c$.
Il est clair de voir que $H = Vect(1, X, X^2)$ et de vérifier que $(1, X, X^2)$ est un système libre de $\mathbb{R}[X]$. Par suite $(1, X, X^2)$ est une base de H et $\dim H = 3$.

2) $P_1(X) = X^2,\ P_2(X) = (X-1)^2$ et $P_3(X) = (X+1)^2$.

   a) On a $Card\,(P_1, P_2, P_3) = 3 = \dim H$. Pour montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de H, il suffit donc de vérifier qu'elle est libre. En effet :
   Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(X) = 0 &\iff \alpha X^2 + \beta(X-1)^2 + \gamma(X+1)^2 = 0 \\
&\iff (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (-2\beta+2\gamma)X + (\beta+\gamma) = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ & - & 2\beta & + & 2\gamma & = & 0 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \alpha = \beta = \gamma = 0.
\end{aligned}$$

   b) Soient $R(X) = 12$ et $S(X) = 3X^2 - 1$. Et soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les coordonnées de $R(X)$ dans la base (P_1, P_2, P_3) et $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ celles de $S(X)$.

• On obtient :

$$\begin{aligned}
R(X)=\alpha_1P_1(X)+\alpha_2P_2(X)+\alpha_3P_3(X) &\Longleftrightarrow 12=\alpha_1X^2+\alpha_2(X-1)^2+\alpha_3(X+1)^2\\
&\Longleftrightarrow 12=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)X^2+(-2\alpha_2+2\alpha_3)X\\
&\qquad+(\alpha_2+\alpha_3)\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\alpha_1&+&\alpha_2&+&\alpha_3&=&0\\&-&2\alpha_2&+&2\alpha_3&=&0\\&&\alpha_2&+&\alpha_3&=&12\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\alpha_1&+&\alpha_2&+&\alpha_3&=&0\\&&&&\alpha_2&=&\alpha_3\\&&&&2\alpha_2&=&12\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\alpha_1&=&-12\\\alpha_3&=&6\\\alpha_2&=&6.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc $12=-12P_1(X)+6P_2(X)+6P_3(X)$.

• Aussi, on a :

$$\begin{aligned}
S(X)=\beta_1P_1(X)+\beta_2P_2(X)+\beta_3P_3(X) &\Longleftrightarrow 3X^2-1=(\beta_1+\beta_2+\beta_3)X^2+(-2\beta_2+2\beta_3)X\\
&\qquad+(\beta_2+\beta_3)\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\beta_1&+&\beta_2&+&\beta_3&=&3\\&-&2\beta_2&+&2\beta_3&=&0\\&&\beta_2&+&\beta_3&=&-1\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\beta_1&+&\beta_2&+&\beta_3&=&3\\&&&&\beta_2&=&\beta_3\\&&&&2\beta_3&=&-1\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\beta_1&=&4\\\beta_2&=&-\frac{1}{2}\\\beta_3&=&-\frac{1}{2}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Exercice 7

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel défini par : $E=\{aX^3+bX^2+cX+d\ /\ a,b,c,$ $d\in\mathbb{R}\}$ et soient $F=\{(X-1)^2(aX+b)\ /\ a,b\in\mathbb{R}\}$ et $G=\{(X+1)^2(aX+b)\ /\ a,b\in\mathbb{R}\}$.

1) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

2) Donner une base $\mathcal{B}_1$ de F et une base $\mathcal{B}_2$ de G.

3) En déduire que $E=F\oplus G$.

Solution.

$E=\{aX^3+bX^2+cX+d\ /\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$.

On rappelle que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E admet pour base canonique $(1,X,X^2,X^3)$ et $\dim E=4$.

Soient $F=\{(X-1)^2(aX+b)\ /\ a,b\in\mathbb{R}\}$ et $G=\{(X+1)^2(aX+b)\ /\ a,b\in\mathbb{R}\}$.

1) $\rightarrow$ Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E.
Soit $P(X) \in F$. $P(X) = (X-1)^2(aX+b)$.
• $deg(P) \leq 3$, donc $P(X) \in E$. Par suite $F \subseteq E$.
• $P(X) = (X^2-2X+1)(aX+b) = aX^3+bX^2-2aX^2-2bX+aX+b$
$= a(X^3-2X^2+X)+b(X^2-2X+1) = aP_1(X)+bP_2(X)$.
On obtient que $F =< P_1, P_2 >$.
On vérifie que (P_1, P_2) est libre. En effet : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\alpha P_1(X) + \beta P_2(X) = 0 &\Longleftrightarrow \alpha(X^3-2X^2+X)+\beta(X^2-2X+1) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \alpha X^3 + (\beta-2\alpha)X^2 + (\alpha-2\beta)X + \beta = 0 \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} & & \alpha & = & 0 \\ -2\alpha & + & \beta & = & 0 \\ \alpha & - & 2\beta & = & 0 \\ & & \beta & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \alpha = \beta = 0.
\end{aligned}$$

Dès lors $\mathcal{B}_1 = (P_1, P_2)$ est une base de F.
$\rightarrow$ De même : soit $Q(X) \in G$.
$Q(X) = (X+1)^2(aX+b) = a(\underbrace{X^3+2X^2+X}_{\substack{\shortparallel \\ Q_1(X)}}) + b(\underbrace{X^2+2X+1}_{\substack{\shortparallel \\ Q_2(X)}})$.
Donc $G =< Q_1, Q_2 >$.
On vérifie de la même manière que $\mathcal{B}_2 = (Q_1, Q_2)$ est libre et donc $\mathcal{B}_2$ est une base de G.

2) Montrons que $E = F \oplus G$. Pour cela, montrons que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.
En effet :
$Card\,(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = Card\,(1, X, X^2, X^3) = 4 = \dim E$. Reste à vérifier donc que (P_1, P_2, Q_1, Q_2) est libre. Pour cela, soient $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma Q_1(X) + \lambda Q_2(X) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \alpha(X^3-2X^2+X)+\beta(X^2-2X+1)+\gamma(X^3+2X^2+X)+\lambda(X^2+2X+1) = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\alpha+\gamma)X^3 + (-2\alpha+\beta+2\gamma+\lambda)X^2 + (\alpha-2\beta+\gamma+2\lambda)X + (\beta+\lambda) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha & & & + & \gamma & & & = & 0 \\ -2\alpha & + & \beta & + & 2\gamma & + & \lambda & = & 0 \\ \alpha & - & 2\beta & + & \gamma & + & 2\lambda & = & 0 \\ & & \beta & & & + & \lambda & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & -\gamma \\ \alpha & = & \gamma \\ \lambda & = & 0 \\ \beta & = & -\lambda \end{array}\right. \\
&\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 8
Soient E un espace vectoriel et n un entier naturel non nul.
Montrer que toute partie de $n+1$ vecteurs de E, combinaison linéaire de n vecteurs, est liée.

Solution. Soient E un espace vectoriel et n un entier naturel non nul.
Soit $\mathcal{S}$ une partie de $n+1$ vecteurs de E qui est combinaison linéaire d'une partie $\mathcal{B}$ de n vecteurs. Montrons que $\mathcal{S}$ est liée par un raisonnement par absurde.

Supposons que $\mathcal{S}$ est libre. Donc $\mathcal{S}$ est une base du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{S}$ et $< \mathcal{S} >\subseteq< \mathcal{B} >$, de sorte que :

$$n+1 = Card\,(\mathcal{S}) = \dim < \mathcal{S} > \leq \dim < \mathcal{B} > \leq n$$

(car $Card\,(\mathcal{B}) = n$ et $\mathcal{B}$ engendre $< \mathcal{B} >$), absurde. Ainsi $\mathcal{S}$ est liée.

Exercice 9

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in E$. On pose :

$$u = b + c,\ \ v = a + c,\ \ w = a + b.$$

1) Montrer que $< a, b, c >=< u, v, w >$.
2) Montrer sans calcul que (a, b, c) est libre si et seulement si (u, v, w) est libre.

Solution. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in E$. On pose :

$$u = b + c,\ \ v = a + c,\ \ w = a + b.$$

1) On a : $u = b + c \in< a, b, c >,\quad v = a + c \in< a, b, c >$ et $w = a + b \in< a, b, c >$, de sorte que $< u, v, w >\subseteq< a, b, c >$.

   Inversement, on a : $a = \frac{1}{2}(-u + v + w) \in< u, v, w >,\ b = \frac{1}{2}(u - v + w) \in< u, v, w >$ et $c = \frac{1}{2}(u + v - w) \in< u, v, w >$, de sorte que $< a, b, c >\subseteq< u, v, w >$. Par suite $< u, v, w >=< a, b, c >$.
2) Supposons que (a, b, c) est libre. Donc (a, b, c) est une base de $< a, b, c >$ et par suite on a $\dim < u, v, w >= \dim < a, b, c >= 3$. De plus, (u, v, w) engendre $< u, v, w >$ et $Card\,(u, v, w) = \dim < u, v, w >= 3$. Dès lors, (u, v, w) est une base de $< u, v, w >$ et donc (u, v, w) est libre.

   Par un raisonnement analogue, on montre que si (u, v, w) est libre, alors (a, b, c) l'est aussi. Ce qui achève la preuve de l'exercice.

Exercice 10

Soit E le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\big((1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 0, -2)\big)$.
Déterminer une base de E et déduire la dimension de E.

Solution.

On a $E =< e_1, e_2, e_3 >$ avec $e_1 = (1, 2, 0),\ e_2 = (0, 1, 1)$ et $e_3 = (1, 0, -2)$.

On vérifie, par calcul, que le système générateur (e_1, e_2, e_3) de E est non libre, par suite il n'est pas une base de E. Dès lors, $\dim E \leq 2$.
On peut remarquer que $e_3 = e_1 - 2e_2$, sinon on vérifie que (e_1, e_2) est libre, par suite (e_1, e_2) est une base de $< e_1, e_2 >=< e_1, e_2, e_3 >= E$. Dès lors, $\dim E = 2$.

Exercice 11

Soit $E = \{ae^x + be^{-x}/\ a, b \in \mathbb{R}\}$ le sous ensemble du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, où x est une indéterminée sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2) On désigne par i et j les éléments de E définies par $i(x) = e^x$ et $j(x) = e^{-x}$.
   Montrer que (i, j) est une base de E.

3) On désigne par r et s les éléments de E définies par $r(x) = e^x + e^{-x}$ et $s(x) = e^x - e^{-x}$. Montrer que (r, s) est une base de E.
4) Calculer les coordonnées de i et j dans la base (r, s).

Solution.

1) On a $E = \{ae^x + be^{-x} \ / \ a, b \in \mathbb{R}\} =< e^x, e^{-x} >$ est le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par (e^x, e^{-x}).
2) On a (i, j) engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, où $i(x) = e^x$ et $j(x) = e^{-x}$.
Pour montrer que (i, j) est une base de E, il suffit de montrer que (i, j) est libre.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ai + bj = \theta$ (l'application nulle) ; c'est-à-dire que $ae^x + be^{-x} = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. D'où $ae^{2x} + b = 0$ et donc $b = -ae^{2x}$.
Supposons que $a \neq 0$. On obtient,
$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(-ae^{2x}\right) = \mp\infty$$
suivant le signe de a, ce qui est absurde. Donc $a = 0$ et par conséquent $b = 0$. Ainsi (i, j) est une base de E.
3) On désigne par r et s les éléments de E définies par $r(x) = e^x + e^{-x}$ et $s(x) = e^x - e^{-x}$. Montrons que (r, s) est une base de E.
On a $\dim E = 2 = Card\,(r, s)$, ainsi, il suffit de montrer que (r, s) est libre pour déduire que c'est une base de E.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ar + bs = \theta$. Donc $\theta = ar + bs = a(i + j) + b(i - j) = (a + b)i + (a - b)j$, de sorte que $a + b = a - b = 0$ puisque (i, j) est libre. D'où $a = b = 0$ et donc (r, s) est une base de E.
4) Soit (a, b) les coordonnées du vecteur i dans la base (r, s) ; c'est-à-dire que :
$$\begin{aligned} i &= ar + bs \\ &= a(i + j) + b(i - j) \\ &= (a + b)i + (a - b)j. \end{aligned}$$
Ainsi, on a :
$$\begin{cases} a + b & = 1 \ \ et, \\ a - b & = 0 \end{cases}$$
c'est à dire que $a = b = \frac{1}{2}$. Ainsi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sont les coordonnées du vecteur i dans la base (r, s).
On vérifie de même que $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ sont les coordonnées du vecteur j dans la base (r, s).

Exercice 12

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équations :
$$H : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$
Et soit $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 0, 0)$. On pose $L =< \{u, v\} >$.

1) Déterminer le sous-espace vectoriel $H \cap L$. Puis préciser une base de H.
2) Montrer que H et L sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.
3) Soient a, b, c, d quatre réels. Préciser la décomposition du vecteur (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$, comme somme d'un vecteur de H et d'un vecteur de L.

Solution.

1) Soit $w \in H \cap L$.
Comme $w \in L$, il existe a et b réels tels que :
$$\begin{aligned} w &= au + bv \\ &= a(1,1,1,1) + b(1,0,0,0) \\ &= (a+b, a, a, a). \end{aligned}$$
Comme $w \in H$, ses coordonnées vérifient les équations de H. On obtient :
$$\begin{cases} (a+b) + a + a + a &= 0 \\ (a+b) - a + a - a &= 0. \end{cases}$$
On obtient $4a + b = 0$ et $b = 0$. Ainsi, $a = b = 0$ et $w = 0$. Nous avons ainsi montré que $H \cap L = \{0\}$ admettant l'ensemble vide pour base.
2) • Le vecteur $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in H$ si et seulement si :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ \quad 2x_2 \quad + 2x_4 &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_2 = -x_4 \\ x_1 = -x_3. \end{cases}$$
Ainsi, $H = \{x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,-1,0,1) / \; x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$. Le système $\big((-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\big)$ est donc un système générateur de H. Il est libre, car si $x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,-1,0,1) = (0,0,0,0)$, alors $(-x_3, -x_4, x_3, x_4) = (0,0,0,0)$. Par suite $x_3 = x_4 = 0$. Ainsi, $\big((-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\big)$ est une base de H. Par conséquent, $\dim_{\mathbb{R}}(H) = 2$.

• On montre facilement que le système (u, v) est libre. (u, v) engendre L par construction, c'est donc une base de L et $\dim_{\mathbb{R}}(L) = 2$.

• Ainsi, nous avons :
$$H \cap L = \{0\} \quad , \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 2 + 2 = \dim_{\mathbb{R}}(H) + \dim_{\mathbb{R}}(L).$$
Cela assure que H et L sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.
3) Comme H et L sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$, le vecteur (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme :
$$(a, b, c, d) = l + h \quad avec \quad l \in L \quad et \quad h \in H.$$
Comme $l \in L$, il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :
$$l = \alpha u + \beta v = \alpha(1,1,1,1) + \beta(1,0,0,0) = (\alpha + \beta, \alpha, \alpha, \alpha).$$

On obtient :

$$h = (a, b, c, d) - (\alpha + \beta, \alpha, \alpha, \alpha) = (a - \alpha - \beta, b - \alpha, c - \alpha, d - \alpha).$$

D'autre part, puisque $h \in H$, on obtient :

$$\begin{cases} a + b + c + d & = 4\alpha + \beta \\ a - b + c - d & = \beta. \end{cases}$$

Il vient que :

$$\begin{cases} \beta = a - b + c - d \\ \alpha = \frac{1}{2}(b + d). \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$l = (a - \frac{b}{2} + c - \frac{d}{2}, \frac{b}{2} + \frac{d}{2}, \frac{b}{2} + \frac{d}{2}, \frac{b}{2} + \frac{d}{2}) \; et \; h = (\frac{b}{2} - c + \frac{d}{2}, \frac{b}{2} - \frac{d}{2}, -\frac{b}{2} + c\frac{d}{2}, -\frac{b}{2} + \frac{d}{2}).$$

Chapitre 2

Généralités sur les matrices

Exercice 1
Soient
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A^2 + B^2 + 2AB$, $(A+B)^2$, $A^2 - B^2$, et $(A-B)(A+B)$.
Que peut-on conclure ?.

Solution.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

  $B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

  $A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

  Donc $A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$

  $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

  On remarque que $(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$ (ceci puisque $AB \neq BA$).
- $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

  $(A-B)(A+B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

  On remarque que $A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B)$. Et ceci est dû au fait que $AB \neq BA$.

Exercice 2

Soit $E = \{aI_2 + bK \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$, où

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer K^2.
2) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donner une base de E et déduire sa dimension.
3) Soient A et B deux matrices de E. Comparer AB et BA. Que peut-on constater ?

Solution.

$E = \{aI_2 + bK \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$, où $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) $K^2 = K.K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) On rappelle que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2 \times 2 = 4$.
   - $E = Vect(I_2, K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par (I_2, K).
   - (I_2, K) est libre dans E. En effet :

   Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha I_2 + \beta K = O &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ -\beta & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta \\ -\beta & \alpha-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta & = & 0 \\ & & \beta & = & 0 \\ \alpha & - & \beta & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

3) Soient $A, B \in E$. On peut écrire donc

$$A = aI_2 + bK \text{ et } B = cI_2 + dK \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} AB &= (aI_2 + bK)(cI_2 + dK) = acI_2^2 + adI_2.K + bcK.I_2 + bdK^2 \\ &= acI_2 + adK + bcK + bd\,O \\ &= acI_2 + (ad + bc)K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= (cI_2 + dK)(aI_2 + bK) = caI_2^2 + cbK.I_2 + daI_2.K + dbK^2 \\ &= acI_2 + (ad + bc)K. \qquad (ac = ca \text{ car } a, c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

On constate que le produit des matrices est commutatif dans l'espace vectoriel E. Ce qui n'est pas vrai en général dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3
Soit E l'ensemble des matrices de la forme :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 0 & -b \\ 0 & a+2b & 0 \\ -b & 0 & a+b \end{pmatrix}, \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base et la dimension de E.

Solution.

$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 0 & -b \\ 0 & a+2b & 0 \\ -b & 0 & a+b \end{pmatrix} \ / \ a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit $M(a,b) \in E$.

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & -b \\ 0 & 2b & 0 \\ -b & 0 & b \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ I_3}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ J}}.$$

Donc $E = Vect(I_3, J)$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I_3 et J.
Vérifions que (I_3, J) est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En effet : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha I_3 + \beta J = O \iff \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha+2\beta & 0 \\ -\beta & 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0.$$

Par suite, (I_3, J) est une base de E et $\dim E = 2$.

Exercice 4
Montrer que :

1) Pour toute matrice A, le produit $A\,{}^tA$ est une matrice carrée symétrique.
2) Si A est une matrice symétrique ou antisymétrique, alors A^2 est symétrique.
3) Toute matrice carrée peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Solution.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
• On a ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Donc $\underset{(m,n)}{\underset{\downarrow}{A}} \,.\, \underset{(n,m)}{\underset{\downarrow}{{}^tA}}$ est de type (m,m), par suite $A\,.\,{}^tA$ est carrée.
• ${}^t(A.{}^tA) = {}^t({}^tA).{}^tA = A.{}^tA$. Par suite, $A.{}^tA$ est symétrique puisqu'elle coïncide avec sa transposée.

2) • A est symétrique $\Longleftrightarrow$ ${}^tA = A$.
Or ${}^t(A^2) = {}^t(A.A) = {}^tA.{}^tA = A.A = A^2$. Donc A^2 est symétrique.
• A est antisymétrique $\Longleftrightarrow$ ${}^tA = -A$.
Or ${}^t(A^2) = {}^t(A.A) = {}^tA.{}^tA = (-A).(-A) = A^2$. Donc A^2 est symétrique.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} A &= A + \frac{1}{2}\,{}^tA - \frac{1}{2}\,{}^tA \\ &= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\,{}^tA - \frac{1}{2}\,{}^tA \\ &= \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\,{}^tA\right) + \left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\,{}^tA\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(A + {}^tA)}_{\overset{\shortparallel}{S}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - {}^tA)}_{\overset{\shortparallel}{U}} = S + U. \end{aligned}$$

Vérifions que S est symétrique et T est antisymétrique. En effet :

$${}^tS = {}^t\left(\frac{1}{2}(A + {}^tA)\right) = \frac{1}{2}\,{}^t(A + {}^tA) = \frac{1}{2}({}^tA + {}^t{}^tA) = \frac{1}{2}({}^tA + A) = S.$$

$${}^tU = {}^t\left(\frac{1}{2}(A - {}^tA)\right) = \frac{1}{2}\,{}^t(A - {}^tA) = \frac{1}{2}({}^tA - {}^t{}^tA) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA) = -U.$$

Exercice 5

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $B^3 - 3B^2 + 2I_3$. En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}.

2) Calculer $D = B^{-1}AB$. En déduire A^{-1} et A^n pour tout $n \geq 2$.

Solution.

1) $B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$

$B^3 = B^2.B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 18 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$

$B^3 - 3B^2 + 2I_3 = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 18 & 12 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 18 & 12 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

On a :

$$\begin{aligned} B^3 - 3B^2 + 2I_3 = 0 &\Longleftrightarrow B^3 - 3B^2 = -2I_3 \\ &\Longleftrightarrow -\frac{1}{2}B^3 + \frac{3}{2}B^2 = I_3 \\ &\Longleftrightarrow B\left(-\frac{1}{2}B^2 + \frac{3}{2}B\right) = I_3. \end{aligned}$$

Donc B est inversible et son inverse est :

$$\begin{aligned} B^{-1} &= -\frac{1}{2}B^2 + \frac{3}{2}B = \frac{1}{2}\left(-B^2 + 3B\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & -4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) • $D = B^{-1}AB = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

• $D = B^{-1}AB \Longrightarrow D^{-1} = \left(B^{-1}AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\left(B^{-1}\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}B$

$\Longrightarrow BD^{-1}B^{-1} = BB^{-1}A^{-1}BB^{-1} = IA^{-1}I = A^{-1}$.

Donc $A^{-1} = BD^{-1}B^{-1}$.

Or D est diagonale, donc $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Par suite,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

• On a $D = B^{-1}AB \Longrightarrow BDB^{-1} = BB^{-1}ABB^{-1} = IAI = A$.
Donc $A = BDB^{-1}$. Par suite, $\forall n \geq 2$

$$\begin{aligned} A^n &= BD\underbrace{B^{-1}.B}_{I}D\underbrace{B^{-1}}_{I}\cdots BDB^{-1} \qquad \text{(n fois)} \\ &= BD^nB^{-1}. \end{aligned}$$

Or $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ puisque D est diagonale.
Dès lors,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3^{n+1} & 2.3^n & -3^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+3^{n+1} & -2+2.3^n & 1-3^n \\ 0 & 2 & 0 \\ -3+3^{n+1} & -2+2.3^n & 3-3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 6
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A - I_3.$$

1) Calculer B^n pour $n \geq 1$.
2) En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 1$.

Solution.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Soit $n \geq 1$.

$$B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B^3 = B^2.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Notons que B est une matrice nilpotente).
Par suite, $\forall n \geq 3$, $B^n = B^3.B^{n-3} = O.B^{n-3} = O$.

2) On a : $B = A - I_3 \Longrightarrow A = B + I_3$.
Or $B.I_3 = I_3.B\,(= B)$, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.
On obtient donc : $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} A^n = (B + I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I_3 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k \\ &= C_n^0 B^0 + C_n^1 B^1 + C_n^2 B^1 + \underbrace{C_n^3 B^3}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \cdots \\ &= I_3 + nB + n(n-1)B^2. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n(n-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 6n(n-1) \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 7

Soient les matrices

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer J^2, J^n pour tout $n \geq 3$.
2) En déduire A^n pour tout $n \geq 2$.

Solution.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) $J^2 = J.J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3J.$

$J^3 = J^2.J = 3J.J = 3J^2 = 3.3J = 3^2 J.$
$J^4 = J^3.J = 3^2 J.J = 3^2 J^2 = 3^2.3J = 3^3 J.$

Montrons que $J^n = 3^{n-1} J \quad \forall n \geq 2$. (Par récurrence sur n).

- $n = 2 \qquad J^2 = 3J^1 = J.$
- Supposons que $J^n = 3^{n-1} J$.
- Montrons que $J^{n+1} = 3^n J$. En effet :

$$J^{n+1} = J^n.J = 3^{n-1} J.J = 3^{n-1} J^2 = 3^{n-1}.3J = 3^n J.$$

2) On remarque que $A = J - I_3$.
Or $JI_3 = I_3J = J$. On applique donc la formule du binôme de Newton. On obtient donc : $\forall n \geq 2$,

$$\begin{aligned} A^n = (J - I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k J^k (-1)^{n-k} I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} J^k \\ &= C_n^0 (-1)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} J^k \\ &= (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} nJ + \sum_{k=2}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} 3^{k-1} J. \end{aligned}$$

Exercice 8

1) Soit A une matrice carrée d'ordre n et à coefficients réels.
   a) On suppose que A est une matrice nilpotente. Montrer que A n'est pas inversible.
   b) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p + A + I = 0$.
   Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que $A^2 = -A + 2I$.
   b) Déterminer A^{-1}.

Solution.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) On suppose que A est nilpotente, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ / $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.
   Supposons que A est inversible, donc A^{-1} existe.
   $$A^p = 0 \Longrightarrow A^{p-1} = A^p.A^{-1} = 0.A^{-1} = 0.$$
   Ce qui est absurde. Donc A est non inversible.
   b) On suppose que $\exists p \in \mathbb{N}^*$ / $A^p + A + I = 0$.
   On a $-A^p - A = I \Longleftrightarrow A\left(-A^{p-1} - I\right) = I$. Donc A est inversible et son inverse est $A^{-1} = -\left(A^{p-1} + I\right)$.
2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.
   a) $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.
   $$-A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ -6 & 8 & -12 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$
   D'où l'égalité $A^2 = -A + 2I_3$.

b) $A^2 = -A + 2I_3 \Longleftrightarrow A^2 + A = 2I_3 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(A^2 + A) = I_3$
$\Longleftrightarrow A\left[\frac{1}{2}(A + I_3)\right] = I_3.$

A est donc inversible et son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 6 & -7 & 12 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

Soit $E = \{M(a,b,c) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$, où

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a-3c & b \\ 3b & 3c-3b & a-3c \end{pmatrix}$$

1) Trouver deux matrices J et K de E indépendantes de a, b et c telles que toute matrice de E s'écrit sous la forme : $M = aI_3 + bJ + cK$.

2) Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

3) Calculer J^2, JK, et K^2.

4) En déduire que E muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un sous anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Solution.

1) On a :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 3c & a-3c & b \\ 3b & 3c-3b & a-3c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Donc, $M = aI_3 + bJ + cK$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

La matrice J appartient à E pour $a = 0$, $b = 1$ et $c = 0$. De même pour K pour $a = 0$, $b = 0$ et $c = 1$.

2) D'après 1), $E =< I_3, J, K >$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On vérifie aisément que le système générateur (I_3, J, K) de E est libre, c'est donc une base de E, par suite $\dim E = 3$.

3) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = K$

$JK = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ -9 & 9 & 3 \end{pmatrix}$
$= 3(I_3 - J)$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -9 & 9 & 3 \\ 9 & -18 & 9 \end{pmatrix}$$
$$= 3(J - K).$$

4) • On sait que $(E, +)$, étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, est un sous-groupe commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
• Aussi, si $M, N \in E$, alors $\exists a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$ tels que $M = aI_3 + bJ + cK$ et $N = a'I_3 + b'J + c'K$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \; MN &= (aI_3 + bJ + cK)(a'I_3 + b'J + c'K) \\ &= aa'I_3 + ab'J + ac'K + ba'J + bb'J^2 + bc'JK + ca'K + cb'KJ + cc'K^2 \\ &= aa'I_3 + ab'J + ac'K + ba'J + bb'K + 3bc'(I_3 - J) + ca'K + \\ &\quad 3cb'(I_3 - J) + 3cc'(J - K) \\ &= (aa' + 3bc' + 3cb')I_3 + (ab' + ba' - 3bc' - 3cb' + 3cc')J + \\ &\quad (ac' + bb' + ca' - 3cc')K. \end{aligned}$$

On voit bien que $MN \in E$. De plus $MN = NM$ (du fait que $KJ = JK$).
D'où E muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Chapitre 3

Déterminants

Exercice 1
Trouver deux matrices A et B telles que :

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Solution.
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $\det(A) = 0,\ \det(B) = 2$ et $\det(A+B) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4.$

Il est clair que $\det(A) + \det(B) \neq \det(A+B)$.

Exercice 2
Calculer les déterminants (où a, b et $c \in \mathbb{R}^*$).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3a \\ 10 & 9 & a^2 \\ 35 & 21 & 14a \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} \text{ et } \Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}.$$

Solution. (Voit détails en cours)
Soient a, b et $c \in \mathbb{R}^*$.

- $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & a & b & 0 & a \\ a & 0 & c & a & 0 \\ b & c & 0 & b & c \end{array}\right. = (0 + acb + bac) - (0 + 0 + 0)$

  $= 2abc.$

  (On rappelle que cette méthode dite de Sarrus n'est applicable qu'à l'ordre 3).

ou
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = abc + bac = 2abc.$$
(on a développé le calcul suivant la première ligne).

- $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ \\ L_3 + L_1 \\ L_4 + 2L_1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{matrix} L_1 + 2L_3 \\ L_2 + 2L_3 \\ \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 0 & -4 & 13 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ -4 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = -23.$$

- $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3a \\ 10 & 9 & a^2 \\ 35 & 21 & 14a \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3a \\ 2 & 9 & a^2 \\ 7 & 21 & 14a \end{vmatrix} = 5 \times 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3a \\ 2 & 3 & a^2 \\ 7 & 7 & 14a \end{vmatrix} = 15a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & a \\ 7 & 7 & 14 \end{vmatrix}$$
$$= 15a \times 7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 105a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 105a \begin{array}{ccc} {\scriptstyle C_1 - C_2} & & \\ \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 105a\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -105a.$$

- $$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ L_2 + aL_1 \\ L_3 - bL_1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ 0 & 1+a^2 & c-ab \\ 0 & -c-ab & 1+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a^2 & c-ab \\ -c-ab & 1+b^2 \end{vmatrix}$$
$$= (1+a^2)(1+b^2) + (c+ab)(c-ab) = 1 + a^2 + b^2 + c^2.$$

- $$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 16 \\ 0 & 3 & 12 & 31 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 16 \\ 3 & 12 & 31 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 13 \end{vmatrix}$$
$$= 13 - 12 = 1.$$

Exercice 3
Calculer le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans chacun des cas suivants, et en déduire si elle est inversible.

1) A est triangulaire.
2) A est diagonale.
3) A est nilpotente ($A^p = O_n$ pour $p \neq 0$).

4) A est idempotente ($A^2 = A$).
5) A est involutive ($A^2 = I_n$).
6) A est antisymétrique (${}^tA = -A$) d'ordre impair.

Solution.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Si A est triangulaire supérieure (ou inférieure), alors :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Par suite, A est inversible $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow a_{ii} \neq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

2) Si A est diagonale alors A est triangulaire. Par suite $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ et A est inversible $\Longleftrightarrow a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$.

3) Si A est nilpotente alors $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O$ et $A^{p-1} \neq O$.

   $A^p = O \Longrightarrow \det A^p = \det O \Longleftrightarrow (\det A)^p = 0 \Longleftrightarrow \det A = 0$.

   Donc, si A est nilpotente alors A est non inversible.

4) Si A est idempotente alors $A^2 = A$. Par suite $\det A = \det(A^2) = (\det A)^2$.
   On obtient donc : $\det A - (\det A)^2 = 0 \Longrightarrow \det A\,(1 - \det A) = 0 \Longrightarrow \det A = 0$ ou $\det A = 1$.

5) Si A est involutive alors $A^2 = I_n$. Par suite $1 = \det I_n = \det(A^2) = (\det A)^2$. Ce qui implique que $\det A = -1$ ou $\det A = 1$. Donc A est involutive $\Longrightarrow A$ est inversible.

6) Si A est antisymétrique alors ${}^tA = -A$. Par suite $\det({}^tA) = \det(-A)$. Or $\det({}^tA) = \det A$ et $\det(-A) = (-1)^n \det A$. Donc $\det A = (-1)^n \det A$.
   On en déduit que si n est impair alors $\det A = -\det A$; ce qui veut dire que $\det A = 0$, par suite A est non inversible.

Exercice 4
Soient a, b et c trois nombres réels. Et soient les systèmes de vecteurs $\mathbf{S} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\mathbf{T} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ où $u_1 = (1, -a, b); u_2 = (a, 1, -c); u_3 = (-b, c, 1)$;
$v_1 = (a, b, b, a); v_2 = (0, b, a, b); v_3 = (b, 0, 0, 0)$ et $v_4 = (a, a, b, a)$.
En utilisant les déterminants et selon les valeurs de a, b et c, discuter quand le système :

1) $\mathbf{S}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
2) $\mathbf{T}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.

Solution.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Et soient $\mathbf{S} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\mathbf{T} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ où $u_1 = (1, -a, b); u_2 = (a, 1, -c); u_3 = (-b, c, 1); v_1 = (a, b, b, a); v_2 = (0, b, a, b); v_3 = (b, 0, 0, 0)$ et $v_4 = (a, a, b, a)$.

1) $\mathbf{S}$ est libre $\Longleftrightarrow \det \mathbf{S} \neq 0$
$\Longleftrightarrow 1 + a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$
(det $\mathbf{S} = \Delta_4$ de l'exercice 3).

2) $\mathbf{T}$ est libre $\Longleftrightarrow \det \mathbf{T} \neq 0$.
Or,

$$\det \mathbf{T} = \begin{vmatrix} a & 0 & b & a \\ b & b & 0 & a \\ b & a & 0 & b \\ a & b & 0 & a \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} \overset{C_1-C_3}{b-a} & b & a \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix}$$

$$= b(b-a) \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = b(b-a)(a^2-b^2) = -b(a-b)(a-b)(a+b)$$

$$= -b(a-b)^2(a+b).$$

Donc $\mathbf{T}$ est libre dans $\mathbb{R}^4 \Longleftrightarrow b \neq 0,\ a \neq b$ et $a \neq -b$.

Exercice 5

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Chercher A^2 en fonction de A et I_3. Déduire que A est inversible et calculer son inverse.

2) Calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs.

Solution.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $A^2 = 2I_3 + A$.
On a $A^2 - A = 2I_3 \Longleftrightarrow A\left[\frac{1}{2}(A - I_3)\right] = I_3$
$\Longleftrightarrow A$ est inversible et son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$
avec $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Calculons A^{-1} par la méthode des cofacteurs :
$\rightarrow \det A = \left|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 2 \neq 0$, A est donc inversible.

$$\to Com\,A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\to {}^tCom\,A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\to A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^tCom\,A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} m-1 & 2 & 2 \\ 2 & m+1 & 1 \\ -2 & -3 & m-3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le déterminant de A_m.
2) Pour quelles valeurs de m, A_m est inversible ?
3) Calculer le rang de A_m (selon les valeurs de m).

Solution.

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} m-1 & 2 & 2 \\ 2 & m+1 & 1 \\ -2 & -3 & m-3 \end{pmatrix}$.

1) $\det A = \begin{vmatrix} m-1 & 2 & 2 \\ 2 & m+1 & 1 \\ -2 & -3 & m-3 \end{vmatrix} \underset{L_3+L_2}{=} \begin{vmatrix} m-1 & 2 & 2 \\ 2 & m+1 & 1 \\ 0 & m-2 & m-2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & C_2-C_3 & \end{array} \\ \begin{vmatrix} m-1 & 0 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 0 & 0 & m-2 \end{vmatrix} \end{array}$

$$= m\begin{vmatrix} m-1 & 2 \\ 0 & m-2 \end{vmatrix} = m(m-1)(m-2).$$

Remarque : On a choisi cette méthode pour trouver $\det A_m$ sous forme de produit afin de répondre à la question suivante.

2) A_m est inversible $\Longleftrightarrow \det A_m \neq 0 \Longleftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$.
3) Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$, alors $rg\,A_m = 3$.

   Si $m \in \{0, 1, 2\}$, alors $rg\,A_m \neq 3 \Longrightarrow rg\,A_m \leq 2$.

   $\to$ Si $m = 0$, alors on peut extraire de $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ le déterminant

   d'ordre 2 : $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Donc $rg\,A_0 = 2$.

$\rightarrow$ Si $m = 1$, alors on peut extraire de $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ le déterminant d'ordre 2 : $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Donc $rg\, A_1 = 2$.

$\rightarrow$ Si $m = 2$, alors on peut extraire de $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ le déterminant d'ordre 2 : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Donc $rg\, A_2 = 2$.

Exercice 7

Soit $D(X) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & X & X^2 & X^3 \end{vmatrix}$ où a, b et c sont trois réels distincts.

1) Montrer que $D(X) \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg D(X) = 3$.

2) Montrer que $D(a) = 0$.
En déduire que : $\exists k \in \mathbb{R} \ / \ D(X) = k(X-a)(X-b)(X-c)$.

3) Montrer que $D(X) = (b-a)(a-c)(b-c)(X-a)(X-b)(X-c)$.

Solution.

Soit $D(X) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & X & X^2 & X^3 \end{vmatrix}$ où a, b et c sont trois réels distincts.

1) Pour répondre automatiquement à la question, on développe le calcul par rapport à L_4 (sinon, on effectue le calcul pour se ramener à la forme d'un polynôme).
En effet :

$$D(X) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & X & X^2 & X^3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} - X^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} + X^3 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3$$

où $\lambda_0 = -\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$, $\lambda_1 = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$, $\lambda_2 = -\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$ et $\lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$
sont tous des réels puisque a, b et c le sont. Par suite $D[X] \in \mathbb{R}[X]$.
Reste à vérifier que $D[X]$ est de degré 3 ; ce qui revient à vérifier que $\lambda_3 \neq 0$. En

effet :

$$\begin{aligned}
\lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &\begin{matrix} L_1 - L_3 \\ = L_2 - L_3 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & a-c & a^2-c^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a-c & a^2-c^2 \\ b-c & b^2-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & (a-c)(a+c) \\ b-c & (b-c)(b+c) \end{vmatrix} \\
&= (a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & (a+c) \\ 1 & (b+c) \end{vmatrix} \\
&= (a-c)(b-c)(b+c-a-c) \\
&= (a-c)(b-c)(b-a) \neq 0 \ \text{ puisque a, b et c sont tous distincts.}
\end{aligned}$$

2) $\rightarrow D(a) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 0$ puisque $L_1 = L_4$.

$\rightarrow$ On aimerait déduire que : $\exists k \in \mathbb{R} \ / \ D(X) = k(X-a)(X-b)(X-c)$. Pour cela, il suffit de vérifier si a, b et c sont des racines de $D(X)$.
En effet : $D(a) = 0 \Longrightarrow a$ est une racine de $D(X)$.
Aussi, et pour les mêmes raisons de a, $D(b) = D(c) = 0$. Donc b et c sont des racines de $D(X)$. Par suite $D(X) = (X-a)(X-b)(X-c)Q(X)$, où $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$. Or, $deg\, D(X) = 3 \Longrightarrow deg\, Q(X) = 0 \Longrightarrow Q = k \in \mathbb{R}$.

3) Montrons que : $D(X) = (b-a)(a-c)(b-c)(X-a)(X-b)(X-c)$. D'après (1), on a $D(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3$.
Or $\lambda_3 = (a-b)(a-c)(b-c)$ qui est le coefficient dominant de $D(X)$.

Exercice 8 (Facultatif)
En calculant le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} \quad \text{où} \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

de deux façons différentes, montrer que :

$$D = \sin(a-b) + \sin(b-c) + \sin(c-a) = -4 \sin\tfrac{a-b}{2} . \sin\tfrac{b-c}{2} . \sin\tfrac{c-a}{2}.$$

(Indication)

Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
D = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & \sin a - \sin c & \cos a - \cos c \\ 0 & \sin b - \sin c & \cos b - \cos c \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sin a - \sin c & \cos a - \cos c \\ \sin b - \sin c & \cos b - \cos c \end{vmatrix} \\
&= (\sin a - \sin c)(\cos b - \cos c) - (\sin b - \sin c)(\cos a - \cos c) \\
&= (\sin a\,\cos b - \sin b\,\cos a) + (\sin b\,\cos c - \sin c\,\cos b) + (\sin c\,\cos a - \sin a\,\cos c) \\
&= \sin(a-b) + \sin(b-c) + \sin(c-a).
\end{aligned}
$$

(On rappelle que $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$).

Exercice 9 (Facultatif)

Résoudre l'équation $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$ où a, b et c sont des réels non nuls.

(Indication)

On développe le calcul par rapport à L_2. En effet :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} &= -x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & b & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix} \\
&= -x \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + a \left[-x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & c \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & c \end{vmatrix} \right] \\
&= -xbc - axc + ab(c-x) \\
&= -x(bc+ac+ab) + abc.
\end{aligned}$$

Chapitre 4

Les applications linéaires

Exercice 1
Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 5y, 0)$.
2) $s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $s(x, y, z) = (ax+by+cz, a'x+b'y+c'z)$ où $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$.
3) $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y, z, t) = (2x + 1, x - y, 2z)$.
4) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $h(x, y) = (|x|, y)$.
5) $\ell : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\ell(P) = XP' + P$ où $\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients réels.

Solution.

1) $$\begin{aligned} f\ :\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (2x + 3y, 3x - 5y, 0). \end{aligned}$$

Soient $u = (x, y)$, $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $$\begin{aligned} f(u + v) &= f\big((x, y) + (x', y')\big) = f(x + x', y + y') \\ &= \big(2(x + x') + 3(y + y'), 3(x + x') - 5(y + y'), 0\big) \\ &= (2x + 3y, 3x - 5y, 0) + (2x' + 3y', 3x' - 5y', 0) \\ &= f(x, y) + f(x', y') \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f\big(\alpha(x, y)\big) = (2\alpha x + 3\alpha y, 3\alpha x - 5\alpha y, 0) \\ &= \alpha(2x + 3y, 3x - 5y, 0) \\ &= \alpha f(u). \end{aligned}$$

L'application f est bien linéaire. $\Big($On peut montrer aussi que $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)\Big)$.

2) $$\begin{aligned} s\ :\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (ax + by + cz, a'x + b'y + c'z). \end{aligned}$$

Soient $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
$s(\alpha u + v) = s\big((\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (x', y', z')\big)$

$$\begin{aligned}
&= s(\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z') \\
&= \big(a(\alpha x+x')+b(\alpha y+y')+c(\alpha z+z'), a'(\alpha x+x')+b'(\alpha y+y')+c'(\alpha z+z')\big) \\
&= (a\alpha x+b\alpha y+c\alpha z, a'\alpha x+b'\alpha y+c'\alpha z)+(ax'+by'+cz', a'x'+b'y'+c'z') \\
&= \alpha(ax+by+cz, a'x+b'y+c'z)+(ax'+by'+cz', a'x'+b'y'+c'z') \\
&= \alpha s(x,y,z)+s(x',y',z') = \alpha s(u)+s(v).
\end{aligned}$$

L'application s est bien linéaire.

3) $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y,z,t) \longmapsto (2x+1, x-y, 2z)$.

Notons que $g(0_{\mathbb{R}^4}) = g(0,0,0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
g est donc non linéaire.

4) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (|x|, y)$.

Soient $u = (-1,1)$ et $v = (1,1) \in \mathbb{R}^2$.
$h(u+v) = h\big((-1,1)+(1,1)\big) = h(0,2) = (|0|,2) = (0,2)$.
Et $h(u)+h(v) = h(-1,1)+h(1,1) = (|-1|,1)+(|1|,1) = (2,2)$.

Notons que $h(u+v) \neq h(u)+h(v)$, h est donc non linéaire (même si on a $h(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{R}^2}$).

5) $\ell : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$
$P \longmapsto XP'+P$ (P' est le polynôme dérivé de P).

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $$\begin{aligned}
\ell(P+Q) &= X(P+Q)'+(P+Q) \\
&= X(P'+Q')+(P+Q) \\
&= XP'+XQ'+P+Q \\
&= (XP'+P)+(XQ'+Q) \\
&= \ell(P)+\ell(Q).
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\ell(\alpha P) &= X(\alpha P)'+\alpha P \\
&= X\alpha P'+\alpha P \\
&= \alpha\,(XP'+P) \\
&= \alpha\,\ell(P).
\end{aligned}$$

ℓ est donc une application linéaire.

Exercice 2
On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x-y-z+t).$$

1) Vérifier que f est une application linéaire.
2) Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f puis sa dimension.
3) L'application f est-elle surjective ?

Solution.
Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z,t) \longmapsto (x+y+z+t, x-y-z+t)$.

1) Soient $u = (x, y, z, t)$, $v = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha u + v) &= f(\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z', \alpha t + t') \\ &= \big((\alpha x + x') + (\alpha y + y') + (\alpha z + z') + (\alpha t + t'), (\alpha x + x') - (\alpha y + y') \\ &- (\alpha z + z') + (\alpha t + t')\big) \\ &= \alpha(x + y + z + t, x - y - z + t) + (x' + y' + z' + t', x' - y' - z' + t') \\ &= \alpha f(u) + f(v). \end{aligned}$$

2) $\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ f(x, y, z, t) = (0, 0)\}$.

• On a :

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) = (0, 0) &\iff (x + y + z + t, x - y - z + t) = (0, 0) \\ &\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 & (1) \\ x - y - z + t = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(1) + (2) : \qquad 2x + 2t = 0 \Longrightarrow x = -t.$$

On obtient :

$$\begin{cases} -t + y + z + t = 0 \\ x = -t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -z \\ x = -t. \end{cases}$$

Donc $(x, y, z, t) = (-t, -z, z, t) = (-t, 0, 0, t) + (0, -z, z, 0)$
$= t(-1, 0, 0, 1) + z(0, -1, 1, 0)$.

Par suite : $\operatorname{Ker} f = < (-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0) >$.

• On vérifie que le système $\big((-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)\big)$ est libre dans $\mathbb{R}^4$, ce qui implique que c'est une base de $\operatorname{Ker} f$. Dès lors, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

3) D'après le théorème du rang :

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim \operatorname{Ker} f} + \dim \operatorname{Im} f = \underset{\substack{\shortparallel \\ 4}}{\dim \mathbb{R}^4}.$$

On a $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Or $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. Par suite f est surjective.

Exercice 3

On considère les applications linéaires :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ définie par } f(x, y, z) = (x + y, x - z) \text{ et}$$
$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ définie par } g(x, y) = (x + 2y, 3x - y, x + y).$$

1) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$.
2) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(g)$ et une base de $\operatorname{Im}(g)$.
3) En déduire si f et g sont injectives, surjectives, bijectives.

Solution.

Soient les applications linéaires suivantes :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ définie par } f(x, y, z) = (x + y, x - z) \text{ et}$$
$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ définie par } g(x, y) = (x + 2y, 3x - y, x + y).$$

1) $\rightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (0,0)\}$.

On a : $f(x,y,z) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=x. \end{cases}$

Donc $(x,y,z) = (x,-x,x) = x(1,-1,1)$. Par suite $\operatorname{Ker} f =< (1,-1,1) >$. La famille $\{(1,-1,1)\}$ est formée par un seul vecteur non nul, donc elle est automatiquement libre, et c'est une base de $\operatorname{Ker} f$. (On en déduit que : $\dim \operatorname{Ker} f = 1$).

$\rightarrow$ D'après le théorème du rang, on a :

$$\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\dim \operatorname{Ker} f} + \dim \operatorname{Im} f = \underset{\overset{\shortparallel}{3}}{\dim} \mathbb{R}^3.$$

Donc $\dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$. Or $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Par suite $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. Et donc la base canonique $\{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ sera aussi une base de $\operatorname{Im} f$.

2) $\rightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ g(x,y) = (0,0,0)\}$.

On a :

$$g(x,y) = (0,0,0) \Longleftrightarrow (x+2y, 3x-y, x+y) = (0,0,0)$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ 3x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x=y=0.$$

Donc $\operatorname{Ker} g = \{(0,0)\}$. (On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} g = 0$).

$\rightarrow$ D'après le théorème du rang, on a :

$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dim \operatorname{Ker} g} + \dim \operatorname{Im} g = \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\dim} \mathbb{R}^2.$$

Donc $\dim \operatorname{Im} g = 2$.

Cherchons une famille génératrice de $\operatorname{Im} g$.

On a $\big((1,0),(0,1)\big)$ est un système générateur de $\mathbb{R}^2$, alors $\big(g(1,0), g(0,1)\big) = \big((1,3,1),(2,-1,1)\big)$ est un système générateur de $\operatorname{Im} f$. Or $\dim \operatorname{Im} g = 2$, par suite $\big((1,3,1),(2,-1,1)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} g$.

3) $\rightarrow$ $\operatorname{Ker} f \neq \{(0,0,0)\}$. Donc f est non injective.

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. Donc f est surjective.

Donc f est non bijective.

$\rightarrow$ $\operatorname{Ker} g = \{(0,0)\}$. Donc g est injective.

$\dim \operatorname{Im} g \neq \dim \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \operatorname{Im} g \neq \mathbb{R}^3 \Longrightarrow g$ est non surjective.

Donc g est non bijective.

Exercice 4

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que :

$$\dim E \neq \dim F \Longrightarrow f \text{ est non bijective.}$$

Solution.
Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Supposons que $\dim E \neq \dim F$.
Deux cas se présentent :

- $\rightarrow$ Si f est non injective, alors f est non bijective.
- $\rightarrow$ Si f est injective, alors : $\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\dim \operatorname{Ker} f} + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$. Ce qui implique que $\dim \operatorname{Im} f = \dim E \neq \dim F$. On obtient :

$$\dim \operatorname{Im} f \neq \dim F \Longrightarrow \operatorname{Im} f \neq F \Longrightarrow f \text{ est non surjective} \Longrightarrow f \text{ est non bijective.}$$

Exercice 5
Déterminer les matrices associées aux applications linéaires, relatives aux bases canoniques, de l'exercice 1.

Solution.
On rappelle que $\mathcal{B} = \big((1,0),(0,1)\big)$ et $\mathcal{B}' = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (respectivement).

1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y) \longmapsto (2x+3y, 3x-5y, 0)$.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} f(1,0) & f(0,1) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}') = & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow (1,0,0) \\ \leftarrow (0,1,0) \\ \leftarrow (0,0,1) \end{array} \end{array}$$

car :

$$\begin{aligned} f(1,0) &= (2,3,0) = (2,0,0)+(0,3,0)+(0,0,0) = 2(1,0,0)+3(0,1,0)+0(0,0,1), \\ f(0,1) &= (3,-5,0) = (3,0,0)+(0,-5,0)+(0,0,0) = 3(1,0,0)-5(0,1,0)+0(0,0,0). \end{aligned}$$

2) $s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \longmapsto (ax+by+cz, a'x+b'y+c'z) \qquad (a,b,c,a',b',c' \in \mathbb{R})$.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \mathcal{M}(s,\mathcal{B}',\mathcal{B}) = & \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow (1,0) \\ \leftarrow (0,1) \end{array} \end{array}$$

En effet :

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (a,a') = a(1,0)+a'(0,1), \\ f(0,1,0) &= (b,b') = b(1,0)+b'(0,1), \\ f(0,0,1) &= (c,c') = c(1,0)+c'(0,1). \end{aligned}$$

3) $\ell : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$
$\quad P \longmapsto XP' + P.$

On rappelle que $\mathcal{C} = \big(1, X, X^2, \dots, X^n\big)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\mathcal{M}(\ell,\mathcal{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \ell(1) & \ell(X) & \ell(X^2 & \cdots & \ell(X^{n-1}) & \ell(X^n) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow X \\ \leftarrow X^2 \\ \quad\vdots \\ \leftarrow X^{n-1} \\ \leftarrow X^n \end{array}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\ell(1) &= X.1' + 1 = X.0 + 1 = 1 = 1.1 + 0.X + 0.X^2 + \cdots + 0.X^{n-1} + 0.X^n, \\
\ell(X) &= X.X' + X = X.1 + X = 2X = 0.1 + 2.X + 0.X^2 + \cdots + 0.X^{n-1} + 0.X^n, \\
\ell(X^2) &= X.(X^2)' + X^2 = 2X.X + X^2 = 3X^2 = 0.1 + 0.X + 3.X^2 + \cdots + 0.X^{n-1} + 0.X^n, \\
&\vdots \\
\ell(X^{n-1}) &= X.(X^{n-1})' + X^{n-1} = (n-1)X.X^{n-2} + X^{n-1} = nX^{n-1} \\
&= 0.1 + 0.X + 0.X^2 + \cdots + n.X^{n-1} + 0.X^n, \\
\ell(X^n) &= X.(X^n)' + X^n = nX.X^{n-1} + X^n = (n+1)X^n \\
&= 0.1 + 0.X + 0.X^2 + \cdots + 0.X^{n-1} + (n+1).X^n.
\end{aligned}$$

Exercice 6

Soit l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(Z) = \overline{Z}$; où $\overline{Z}$ est le conjugué de Z.

1) Montrer que f n'est pas un homomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.
2) Montrer que f est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels qui est injectif. En déduire que f est un automorphisme.
3) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{C}$.

Solution.

Soit l'application

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & Z & \longmapsto & \overline{Z} \quad \text{le conjugé de } Z. \end{array}$$

1) Notons que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de base $\{1\}$.
Soient $Z, Z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$f(Z+Z') = \overline{Z+Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'} = f(Z) + f(Z')$. Mais, $f(\alpha Z) = \overline{\alpha Z} \neq \alpha \overline{Z} = \alpha f(Z)$ si $\alpha \in i\mathbb{R}^*$. $\big($par exemple pour $\alpha = i$, $\overline{\alpha Z} = \overline{i(a+ib)} = \overline{ia-b} = -b-ia$ et $\alpha\overline{Z} = i\overline{(a+ib)} = i(a-ib) = ia+b = b+ia\big)$.
Dans ce cas, f est non linéaire.

2) Notons que $\mathbb{C}$ est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $\big(1, i\big)$.
• Soient $Z, Z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(Z+Z') &= f(Z) + f(Z'). \\ f(\alpha Z) &= \overline{\alpha Z} = \overline{\alpha(a+ib)} = \alpha(a-ib) = \alpha a - i\alpha b = \alpha(a-ib) \\ &= \alpha\overline{(a+ib)} = \alpha f(Z). \end{aligned}$$

f est donc linéaire.
• $\operatorname{Ker} f = \{Z \in \mathbb{C} \ / \ f(Z) = 0\}$.
Soit $Z = a+ib$.

$$\begin{aligned} f(Z) = 0 &\Longleftrightarrow \overline{Z} = a - ib = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0 \\ &\Longleftrightarrow Z = 0. \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker} f = \{0\} \Longrightarrow f$ est injective.
• f est un endomorphisme injectif, par suite f est surjectif. D'où f est un automorphisme.

3) On rappelle que $\mathcal{B} = (1, i)$ est la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

$$\mathcal{M}(f,\mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(1) & f(i) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow i \end{array}$$

En effet :

$$\begin{aligned} f(1) &= \overline{1} = 1 = 1.1 + 0.i\,, \\ f(i) &= \overline{i} = -i = 0.i - 1.i\,. \end{aligned}$$

Exercice 7
Soit l'application

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & M & \longmapsto & A.M \end{array}$$

où $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution.
Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & & M & \longmapsto & A.M \end{array}$$

une application.

1) Montrons que f est linéaire :
Soient $M, M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
• $f(M + M') = A(M + M') = AM + AM' = f(M) + f(M')$.
• $f(\alpha M) = A.\alpha M = \alpha AM = \alpha(AM) = \alpha f(M)$.
Donc f est linéaire.

2) Remarque : On rappelle d'abord que la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ est la suivante :

$$\mathcal{B} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ M_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ M_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ M_3}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ M_4}} \right)$$

car toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aussi, il est facile de vérifier que (M_1, M_2, M_3, M_4) est libre.
On a :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(M_1) & f(M_2) & f(M_3) & f(M_4) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow M_1 \\ \leftarrow M_2 \\ \leftarrow M_3 \\ \leftarrow M_4 \end{array}$$

En effet :

$$\begin{aligned} f(M_1) &= A.M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1.M_1 + 1.M_2 + 0.M_3 + 0.M_4\,, \\ f(M_2) &= A.M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.M_1\,, \\ f(M_3) &= A.M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.M_3 + 1.M_4\,, \\ f(M_4) &= A.M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.M_3\,. \end{aligned}$$

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = e_2 + e_3,\ f(e_2) = e_1 + e_3 \text{ et } f(e_3) = -e_1 + e_2.$$

1) Écrire M, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2) Soit la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ telle que : $u_1 = e_1 - e_2 - e_3,\ u_2 = e_2 + e_3$ et $u_3 = e_1 + e_3$.
   a) Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
   b) Chercher M' la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ en exprimant directement $f(u_i)$ en fonction de $u_i,\ i = 1, 2, 3$.
3) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.
4) Retrouver M' en utilisant $M,\ P$ et P'.

Solution.
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel tel que $\dim E = 3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme défini par :

$$f(e_1) = e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 + e_3 \ \text{ et } \ f(e_3) = -e_1 + e_2.$$

1) La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}$$

2) Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ telle que :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 - e_2 - e_3 \\ u_2 = e_2 + e_3 \\ u_3 = e_1 + e_3. \end{cases}$$

   a) Une base est une famille qui est à la fois libre et génératrice. Mais, en remarquant que $Card\,(\mathcal{B}') = 3 = \dim E$, il suffit de montrer que $\mathcal{B}'$ est libre.
   En effet : soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 &\Longleftrightarrow \alpha(e_1 - e_2 - e_3) + \beta(e_2 + e_3) + \gamma(e_1 + e_3) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (\alpha + \gamma)e_1 + (-\alpha + \beta)e_1 + (-\alpha + \beta + \gamma)e_3 = 0 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \qquad\qquad (\text{ car } (e_1, e_2, e_3) \text{ est libre}) \end{cases} \\ &\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{B}'$ est libre. Par suite $\mathcal{B}'$ est une base de E.
   b) Exprimons $f(u_1),\ f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de $u_1,\ u_2$ et u_3.
   - $$\begin{aligned} f(u_1) = f(e_1 - e_2 - e_3) &= f(e_1) - f(e_2) - f(e_3) \qquad (\text{ car } f \text{ est linéaire}) \\ &= e_2 + e_3 - e_1 - e_3 + e_1 - e_2 \\ &= 0\ (= 0u_1 + 0u_2 + 0u_3). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(u_2) = f(e_2+e_3) &= f(e_2)+f(e_3) \qquad (\text{ car } f \text{ est linéaire}) \\ &= e_1+e_3-e_1+e_2 = e_2+e_3 = u_2 \ (= 0u_1+1u_2+0u_3). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(u_3) = f(e_1+e_3) &= f(e_1)+f(e_3) \qquad (\text{ car } f \text{ est linéaire}) \\ &= e_2+e_3-e_1+e_2 \\ &= -e_1+2e_2+e_3 (=?u_1+?u_2+?u_3). \end{aligned}$$

On cherche à écrire $f(u_3)$ comme $au_1+bu_2+cu_3$, on doit donc déterminer a, b et c.
On a : $f(u_3) = -e_1+2e_2+e_3 = au_1+bu_2+cu_3$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow -e_1+2e_2+e_3 = a(e_1-e_2-e_3)+b(e_2+e_3)+c(e_1+e_3) \\ &\Longleftrightarrow -e_1+2e_2+e_3 = (a+c)e_1+(-a+b)e_2+(-a+b+c)e_3 \\ &\Longleftrightarrow (a+c+1)e_1+(-a+b-2)e_2+(-a+b+c-1)e_3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a+c+1=0 \\ -a+b-2=0 \\ -a+b+c-1=0 \qquad (\text{ car } (e_1,e_2,e_3) \text{ est libre}) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a+c=-1 \\ -a+b=2 \\ 2+c=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+c=-1 \\ -a+b=2 \\ c=-1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $f(u_3) = 0u_1+2u_2-u_3$. Par suite,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ M' = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}') = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \leftarrow u_3 \end{array} \end{array}$$

3) • $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array} \end{array}$$

• $P^{-1} = \frac{1}{\det P}\, {}^t Com\, P.$

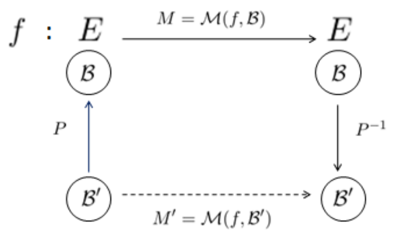
$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} = (1-1)-(-1) = 1.$$

$$Com\, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$${}^{t}Com\,P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4)



On a :

$$\begin{aligned} M' = P^{-1}.M.P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 9

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit f l'application définie sur E par :

$$f(P) = \frac{1}{2}(1 - X - X^3 + X^4)P'' + (1 - X^3)P' + (1 + X + X^2)P \quad \text{pour tout } P \in E.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) Déterminer la matrice A de f relativement à la base canonique de E.

Solution.

Soit $E = \mathbb{R}^2[X] = \{P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0 \;/\; a_i \in \mathbb{R}\}$. Et soit

$$f(P) = \frac{1}{2}(1 - X - X^3 + X^4)P'' + (1 - X^3)P' + (1 + X + X^2)P.$$

1) Montrons que f est un endomorphisme de E (i.e. f est une application linéaire de E dans E).
   $\rightarrow$ Montrons que f est linéaire : Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \bullet f(P+Q) &= \frac{1}{2}(1 - X - X^3 + X^4)(P+Q)'' + (1 - X^3)(P+Q)' + (1 + X + X^2)(P+Q) \\ &= \frac{1}{2}(1 - X - X^3 + X^4)(P'' + Q'') + (1 - X^3)(P' + Q') + (1 + X + X^2)(P+Q) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{\frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)P'' + (1-X^3)P' + (1+X+X^2)P}_{\overset{\shortparallel}{f(P)}} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)Q'' + (1-X^3)P' + (1+X+X^2)Q}_{\overset{\shortparallel}{f(Q)}} \\
&= f(P) + f(Q).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bullet f(\alpha P) &= \frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)(\alpha P)'' + (1-X^3)(\alpha P)' + (1+X+X^2)(\alpha P) \\
&= \frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)\alpha P'' + (1-X^3)\alpha P' + (1+X+X^2)\alpha P \\
&= \alpha\left[\frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)P'' + (1-X^3)P' + (1+X+X^2)P\right] \\
&= \alpha f(P).
\end{aligned}
$$

Donc f est linéaire.
$\rightarrow$ Montrons que $f : E \longrightarrow E$ (i.e. si $P \in E$ alors $f(P) \in E$).

Remarque : $f(P)$ est un polynôme qui contient X^3 et X^4. On veut montrer que $f(P)$ est de degré inférieur ou égal à 2. Pour cela, $f(P)$ doit se simplifier et ne pas contenir X^3 et X^4.
En effet :
Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a $P'(X) = 2a_2X + a_1$ et $P''(X) = 2a_2$.
Donc,

$$
\begin{aligned}
f(P) &= \frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)P'' + (1-X^3)P' + (1+X+X^2)P \\
&= \frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)2a_2 + (1-X^3)(2a_2X+a_1)' + (1+X+X^2)(a_2X^2+a_1X+a_0) \\
&= (a_2+a_1+a_0)X^2 + (a_2+a_1+a_0)X + (a_2+a_1+a_0).
\end{aligned}
$$

On obtient alors que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X] = E$.

2) On rappelle que $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
\mathcal{M}(f,\mathcal{B}) = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow X \\ \leftarrow X^2 \end{array}
\end{array}
$$

En effet :

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4).1'' + (1-X^3).1' + (1+X+X^2).1 \\
&= (1+X+X^2).1 \qquad \text{(car } 1'' = 1' = 0) \\
&= 1 + X + X^2 = 1.1 + 1.X + 1.X^2.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
f(X) &= \frac{1}{2}(1 - X - X^3 + X^4)X'' + (1 - X^3)X' + (1 + X + X^2)X \\
&= (1 - X^3) + (1 + X + X^2)X \qquad \text{(car } X' = 1 \text{ et } X'' = 0) \\
&= 1 - X^3 + X + X^2 + X^3 \\
&= 1 + X + X^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(X^2) &= \frac{1}{2}(1 - X - X^3 + X^4)(X^2)'' + (1 - X^3)(X^2)' + (1 + X + X^2)X^2 \\
&= (1 - X - X^3 + X^4) + (1 - X^3)2X + (1 + X + X^2)X^2 \qquad \text{(car } (X^2)' = 2X \text{ et } (X^2)'' = 2) \\
&= 1 + X + X^2.
\end{aligned}$$

Exercice 10

Donner l'expression des endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ suivants définis par leurs matrices respectives :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Solution.

$\rightarrow$ Soit $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{rcl} f \quad : \quad \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & f(x) = y = (y_1, y_2, y_3) = ? \end{array}$$

On va traduire cette écriture vectorielle recherchée en une écriture matricielle pour utiliser la matrice A.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées des vecteurs x et $y = f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
y = f(x) \Longleftrightarrow (y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3) \curvearrowright \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \mathcal{M}(f, \mathcal{B}).\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_2 + 4x_2 - 2x_3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{6}(x_1 + 2x_2 - x_3) \\ y_2 = \frac{1}{6}(2x_2 + 4x_2 - 2x_3) \\ y_3 = \frac{1}{6}(-x_1 - 2x_2 + x_3). \end{cases}$

Par suite, $\begin{array}{rcl} f \; : \; \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \left(\frac{1}{6}(x_1 + 2x_2 - x_3), \frac{1}{6}(2x_2 + 4x_2 - 2x_3), \frac{1}{6}(-x_1 - 2x_2 + x_3)\right). \end{array}$

$\rightarrow$ Soit $B = \mathcal{M}(g, \mathcal{B}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ où g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

De la même manière, on obtient :

$$\begin{array}{llll} g & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \left(\frac{1}{9}(8x_1 - x_2 - 4x_3), \frac{1}{9}(-x_1 + 8x_2 - 4x_3), \frac{1}{9}(-4x_1 - 4x_2 - 7x_3)\right). \end{array}$$

Exercice 11 Soit $E = \mathbb{C}_3[X] = \{P \in \mathbb{C}[X] : deg(P) \leq 3\}$. Soit f l'application de E dans E définie par $f(P) = P(X+\alpha) - P(X+\beta)$, où α et β sont deux complexes distincts.

1) Montrer que f est un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.
2) Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.

Solution.

1) Il est clair que $\forall P \in E$, $f(P) \in E$.
Aussi, $\forall \eta \in \mathbb{C}$ et $\forall P, Q \in E$, on a :
$$\begin{aligned} f(P+Q) &= (P+Q)(X+\alpha) - (P+Q)(X+\beta) \\ &= P(X+\alpha) + P(X+\alpha) - P(X+\beta) - Q(X+\beta) \\ &= f(P) + f(Q) \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} f(\eta P) &= (\eta P)(X+\alpha) - (\eta P)(X+\beta) \\ &= \eta P(X+\alpha) - \eta P(X+\beta) \\ &= \eta f(P). \end{aligned}$$

2) • $Ker(f) = \{P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 \in E \,/\, f(P) = 0\}$.

$$\begin{aligned} P \in Ker(f) &\iff P(X+\alpha) - P(X+\beta) = 0 \\ &\iff \left[a + b(X+\alpha) + c(X+\alpha)^2 + d(X+\alpha)^3\right] \\ &\qquad - \left[a + b(X+\beta) + c(X+\beta)^2 + d(X+\beta)^3\right] = 0 \\ &\iff \left[\left(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3\right) + \left(b + 2c\alpha + 3d\alpha^2\right)X + (c + 3d\alpha)X^2 + dX^3\right] \\ &\qquad - \left[\left(a + b\beta + c\beta^2 + d\beta^3\right) + \left(b + 2c\beta + 3d\beta^2\right)X + (c + 3d\beta)X^2 + dX^3\right] = 0 \\ &\iff \left\{\begin{array}{lllllll} b(\alpha-\beta) & + & c\left(\alpha^2-\beta^2\right) & + & d\left(\alpha^3-\beta^3\right) & = 0 \\ & & 2c(\alpha-\beta) & + & 3d\left(\alpha^2-\beta^2\right) & = 0 \\ & & & & 3d(\alpha-\beta) & = 0 \end{array}\right. \\ &\overset{(\alpha\neq\beta)}{\iff} \left\{\begin{array}{llll} b(\alpha-\beta) & + & c\left(\alpha^2-\beta^2\right) & = 0 \\ & & 2c(\alpha-\beta) & = 0 \\ & & d & = 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{ll} b(\alpha-\beta) & = 0 \\ c & = 0 \\ d & = 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ainsi $Ker(f) = \{a \,/\, a \in \mathbb{C}\} = < 1 >$. (1) est libre et donc c'est une base de $Ker(f)$. Par suite $\dim Ker(f) = 1$.

• On sait que $\left(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)\right)$ est un système générateur de $Im(f)$, et que $\dim Im(f) = \dim E - \dim Ker(f) = 4 - 1 = 3$. Il suffit alors de choisir trois vecteurs libres ; choisissons :

$$\begin{aligned} f(X) &= \alpha - \beta, \\ f(X^2) &= (X+\alpha)^2 - (X+\beta)^2 = 2\,(\alpha-\beta)\,X + \alpha^2 - \beta^2, \\ \text{et } f(X^3) &= (X+\alpha)^3 - (X+\beta)^3 = 3\,(\alpha-\beta)\,X^2 + 3\left(\alpha^2-\beta^2\right)X + \alpha^3 - \beta^3. \end{aligned}$$

Soient $l, m, n \in \mathbb{C}$ tels que :

$$l\,[\alpha-\beta] + m\left[2\,(\alpha-\beta)\,X + \alpha^2 - \beta^2\right] + n\left[3\,(\alpha-\beta)\,X^2 + 3\left(\alpha^2-\beta^2\right)X + \alpha^3 - \beta^3\right] = 0.$$

Alors

$$l\,(\alpha-\beta) + m\left(\alpha^2-\beta^2\right) + n\left(\alpha^3-\beta^3\right) + \left[2\,(\alpha-\beta)\,m + 3n\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right]X + 3n\,(\alpha-\beta)\,X^2 = 0.$$

Donc,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} l\,(\alpha-\beta) & + & m\left(\alpha^2-\beta^2\right) & + & n\left(\alpha^3-\beta^3\right) & = 0 \\ & & 2\,(\alpha-\beta)\,m & + & 3n\left(\alpha^2-\beta^2\right) & = 0 \\ & & & & 3n\,(\alpha-\beta) & = 0 \end{array}\right.$$

Par conséquent,

$$\left\{\begin{array}{l} l = 0 \\ m = 0 \\ n = 0. \end{array}\right.$$

D'où $\left(f(X), f(X^2), f(X^3)\right)$ est libre, et par suite c'est une base de $Im(f)$.

Exercice 12 On considère l'application suivante

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (z-y, z-x, z) \end{aligned}$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2) On désigne par i l'endomorphisme identique de $\mathbb{R}^3$. Expliciter les applications $(f-i)$ et $(f+i)$.
3) Déterminer une base de $Ker(f-i)$ et une base de $Ker(f+i)$.
4) Montrer que $\mathbb{R}^3 = Ker(f-i) \oplus Ker(f+i)$.

Solution.

1) Il est simple de montrer que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3$,

$$f\,(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y).$$

2) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(f-i)(x,y,z) = f(x,y,z) - i(x,y,z)$
$$= (z-y, z-x, z) - (x,y,z)$$
$$= (-x-y+z, -x-y+z, 0).$$
L'application s'écrit donc :
$$\begin{array}{rccl} f-i: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (-x-y+z, -x-y+z, 0) \end{array}$$
De même :
$$\begin{array}{rccl} f+i: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, -x+y+z, 2z). \end{array}$$

3) • $Ker(f-i) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (f-i)(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$.
$$\begin{aligned} (x,y,z) \in Ker(f-i) &\iff (-x-y+z, -x-y+z, 0) = (0,0,0) \\ &\iff -x-y+z = 0 \\ &\iff z = x+y. \end{aligned}$$
Donc $(x,y,z) = (x,y,x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1)$.
Ainsi $Ker(f-i) = <(1,0,1),(0,1,1)>$.
On vérifie que le système $\big((1,0,1),(0,1,1)\big)$ est libre et ainsi il présente une base de $Ker(f-i)$.

• $Ker(f+i) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (f+i)(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$.
$$\begin{aligned} (x,y,z) \in Ker(f+i) &\iff (x-y+z, -x+y+z, 2z) = (0,0,0) \\ &\iff \left\{\begin{aligned} x-y+z &= 0 \\ -x+y+z &= 0 \\ 2z &= 0 \end{aligned}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} x = y \\ z = 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$
Ainsi $Ker(f-i) = \{(x,x,0) \,/\, x \in \mathbb{R}\} = <(1,1,0)>$.
On a $(1,1,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ alors $\{(1,1,0)\}$ est libre et ainsi c'est une base de $Ker(f+i)$.

4) On a $\dim Ker(f-i) + \dim Ker(f+i) = 2+1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Donc il suffit de montrer que le système $\big((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\big)$ est libre. Pour cela, soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,1,0) = (0,0,0) &\iff \left\{\begin{array}{l} \alpha+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{aligned} \alpha+\beta+2\gamma &= 0 \\ \beta+\gamma &= 0 \\ \alpha+\beta &= 0 \end{aligned}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$
D'où le résultat.

Exercice 13 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et g un endomorphisme de E. Montrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} Ker(g) = Ker(g^2) &\Longleftrightarrow Im(g) = Im(g^2) \\ &\Longleftrightarrow E = Ker(g) \oplus Im(g). \end{aligned}$$

Solution.

- Notons qu'on a toujours $Ker(g) \subseteq Ker(g^2)$ et $Im(g^2) \subseteq Im(g)$. En effet :
  $x \in Ker(g) \Longleftrightarrow\ g(x) = 0 \Longrightarrow\ g^2(x) = 0 \Longleftrightarrow\ x \in Ker(g^2)$.
  Et $z \in Im(g^2) \Longleftrightarrow \exists x \in E,\ z = g^2(x) \Longrightarrow \exists y = g(x) \in E,\ z = g(y) \Longleftrightarrow z \in Im(g)$.
- Montrons que $Ker(g) = Ker(g^2) \Longleftrightarrow Im(g) = Im(g^2)$.
  On a, $\dim E = \dim Im(g) + \dim Ker(g)$ *et* $\dim E = \dim Im(g^2) + \dim Ker(g^2)$.
  Donc, $\dim Im(g) + \dim Ker(g) = \dim Im(g^2) + \dim Ker(g^2)$.
  - Si $Im(g) = Im(g^2)$ alors $\dim Ker(g) = \dim Ker(g^2)$. Dans ce cas, puisque $Ker(g) \subseteq Ker(g^2)$, on obtient $Ker(g) = Ker(g^2)$.
  - Si $Ker(g) = Ker(g^2)$ alors $\dim Im(g) = \dim Im(g^2)$. Dans ce cas, puisque $Im(g^2) \subseteq Im(g)$, on obtient $Im(g) = Im(g^2)$.
- Montrons que : $Im(g) = Im(g^2) \Longleftrightarrow E = Ker(g) \oplus Im(g)$.

  $\Rightarrow$) On suppose que $Im(g) = Im(g^2)$. Montrons que $E = Ker(g) \oplus Im(g)$.
  On a $\dim E = \dim Im(g) + \dim Ker(g)$, il suffit donc de montrer que $Ker(g) \cap Im(g) = \{0_E\}$. En effet,
  soit $z \in Ker(g) \cap Im(g)$. Il existe $x \in E$ tel que $g(z) = 0_E$ *et* $z = g(x)$.
  Ainsi, $g^2(x) = 0_E$. Donc, $x \in Ker(g^2)$.
  Cependant, puisque $Im(g) = Im(g^2)$, on a $Ker(g) = Ker(g^2)$. Par suite, $x \in Ker(g)$ et $z = g(x) = 0_E$. On en déduit que $Ker(g) \cap Im(g) = \{0_E\}$.

  $\Leftarrow$) On suppose maintenant que $E = Ker(g) \oplus Im(g)$, et on montre que : $Im(g) = Im(g^2)$.
  D'après ce qui précède, il suffit de vérifier que $Im(g) \subseteq Im(g^2)$. En effet,
  si $z \in Im(g)$ alors il existe $y \in E$ tel que $z = g(y)$. Or $E = Ker(g) \oplus Im(g)$, donc il existe $x_1 \in Ker(g)$ et $x_2 \in E$ tels que $y = x_1 + g(x_2)$. Ainsi, $z = g(x_1 + g(x_2))$.
  Du fait que g est linéaire, on obtient $z = g(x_1) + (g \circ g)(x_2) = g^2(x_2)$ (car $x_1 \in Ker(g)$).
  Finalement, $z \in Im(g^2)$, ce qui achève la preuve de l'exercice.

Exercice 14 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Pour un entier naturel k donné, on pose $N_k = Ker(f^k)$ et $I_k = Im(f^k)$ (avec la convention $f^0 = Id_E$).

1) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ (N_k \subset N_{k+1}\ et\ I_{k+1} \subset I_k\ )$.
2) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ (N_k = N_{k+1} \Longrightarrow N_{k+1} = N_{k+2}\ )$.

Dans ce qui suit, on suppose de plus que E est de dimension finie n.

3) *a*) Montrer que : $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} k < p \Rightarrow\ N_k \subsetneqq N_{k+1} \\ et\ k \geq p \Rightarrow\ N_k = N_{k+1}. \end{cases}$$

b) Montrer que $p \leq n$.

4) Montrer que :

$$\begin{cases} k < p \Rightarrow \; I_k \supsetneqq I_{k+1} \\ et \; k \geq p \Rightarrow \; I_k = I_{k+1}. \end{cases}$$

5) Soit $d_k = \dim I_k$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante (en d'autres termes la suite des images itérées décroît de moins en moins vite, ou aussi les noyaux itérées croît de moins en moins vite).

Solution.

1) Soient k un entier naturel et x un élément de E.
• On a $x \in N_k \Longrightarrow f^k(x) = 0$
$\Longrightarrow \; f(f^k(x)) = f(0)$
$\Longrightarrow f^{k+1}(x) = 0$
$\Longrightarrow \; x \in N_{k+1}$.
Donc, $\forall k \in \mathbb{N},\; N_k \subset N_{k+1}$.
• On a $x \in I_{k+1} \Longrightarrow \exists y \in E,\; x = f^{k+1}(y)$
$\Longrightarrow \exists z (= f(y)) \in E,\; x = f^k(z)$
$\Longrightarrow x \in I_k$.
Donc, $\forall k \in \mathbb{N},\; I_{k+1} \subset I_k$.

2) Soit k un entier naturel. Supposons que $N_k = N_{k+1}$ et montrons que $N_{k+1} = N_{k+2}$.
On a déjà $N_{k+1} \subset N_{k+2}$. Montrons que $N_{k+2} \subset N_{k+1}$.
Soit x un élément de E.
On a $x \in N_{k+2} \Longrightarrow f^{k+2}(x) = 0$
$\Longrightarrow \; f^{k+1}(f(x)) = 0$
$\Longrightarrow f(x) \in N_{k+1} = N_k$
$\Longrightarrow f^k(f(x)) = 0$
$\Longrightarrow \; f^{k+1}(x) = 0$
$\Longrightarrow x \in N_{k+1}$.

3) *a*) On a $\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \cdots$. Supposons que chacune de ces inclusions soit stricte. Alors,

$$0 = \dim N_0 < \dim N_1 < \dim N_2 \cdots$$

Donc $\dim N_1 \geq 1$, $\dim N_2 \geq 2$ et par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dim N_k \geq k$. En particulier, $\dim N_{n+1} \geq n + 1 > n = \dim E$, ce qui est impossible. Donc, il existe k entier naturel tel que $N_k = N_{k+1}$.

Ainsi, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\; N_k = N_{k+1}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Donc $\{k \in \mathbb{N},\; N_k = N_{k+1}\}$ admet un plus petit élément ; soit p le plus petit des entiers k tels que $N_k = N_{k+1}$.
Par définition de p (et même si $p = 0$), pour $k < p$, $N_k \subsetneqq N_{k+1}$. D'autre part, d'après 2) et puisque $N_p = N_{p+1}$, on montre par récurrence que pour tout $k \geq p$, on a $N_k = N_p$.

b) Si $p = 0$ (ou encore si f est surjectif), on a $p \leq n$. Sinon,

$$0 < \dim N_1 < \cdots < \dim N_p$$

et donc, par récurrence, pour $k \leq p$, on a $\dim N_k \geq k$. En particulier

$$p \leq \dim N_p \leq n.$$

4) Puisque $N_k \subset N_{k+1}$, $I_{k+1} \subset I_k$ et que $\dim E < +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} N_k = N_{k+1} &\iff \dim N_k = \dim N_{k+1} \\ &\iff n - rg(f^k) = n - rg(f^{k+1}) \\ &\iff \dim I_k = \dim I_{k+1} \\ &\iff I_k = I_{k+1}. \end{aligned}$$

Donc, pour $k < p$, $I_k \underset{\neq}{\supset} I_{k+1}$ et pour $k \geq p$, $I_k = I_{k+1}$.

5) Soient k un entier naturel puis g_k la restriction de f à I_k. D'après le théorème du rang,

$$d_k = \dim I_k = \dim Ker(g_k) + \dim Im(g_k).$$

Maintenant, $Im(g_k) = g_k(I_k) = f(I_k) = I_{k+1}$ et donc $\dim Im(g_k) = d_{k+1}$.
D'autre part, $Ker(g_k) = Ker(f_{/I_k}) = Ker(f) \cap I_k$.
Ainsi, pour tout entier naturel k,

$$d_k - d_{k+1} = \dim(Ker(f) \ \cap I_k).$$

Puisque la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, alors la suite d'entiers naturels $(\dim(Ker(f) \cap I_k))_{k\in\mathbb{N}} = (d_k - d_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 15 (Facultatif) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie notée n. Soit u un endomorphisme de E.
On dit que u est nilpotent si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$ et on appelle alors indice de nilpotence de u le plus petit de ces entiers k.
Par exemple, le seul endomorphisme u, nilpotent d'indice 1 est l'endomorphisme nul.

1) Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p. Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0, u(x_0), \cdots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.
2) Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que $u^n = 0$.
3) On suppose dans cette question que u est nilpotent d'indice n exactement. Déterminer $rg(u)$ (utiliser l'exercice précédent).

Chapitre 5

Les systèmes linéaires

Exercice 1

Résoudre, par la méthode de pivot de Gauss, les systèmes linéaires suivants :

1) $(S_1) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 5y & & & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$

2) $(S_2) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 3z & + & 2t & = & -2 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & + & t & = & -1 \\ 3x & + & 7y & + & z & - & 6t & = & 6 \end{array}\right.$

3) $(S_3) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & - & 4y & + & 7z & = & 3 \end{array}\right.$

4) $(S_4) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 5y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$

5) $(S_5) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 3y & - & 2z & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 4z & = & 3 \\ x & + & 4y & - & 2z & = & 4 \\ 5x & + & 6y & - & 10z & = & 10 \end{array}\right.$

Solution.

1) $(S_1) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ -L_3 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$$\curvearrowright \begin{array}{r} \\ \\ L_3 - 4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{5}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{7}{5} \end{array}\right).$$

On peut remarquer que toutes les inconnues sont principales, on aura donc une solution unique.

Le système devient :

$$(S_1) \curvearrowright \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & -1 \\ & & & & z & = & \frac{7}{5} \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{cases} x = z - y = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} = 1 \\ y = -1 + z = -1 + \frac{7}{5} = \frac{2}{5} \\ z = \frac{7}{5}. \end{cases}$$

Donc $S = \left\{ \left(1, \frac{2}{5}, \frac{7}{5}\right) \right\}$.

2) $$(S_2) \curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & -12 & 12 \end{array}\right).$$

On peut remarquer que $L_3 = 4L_2$, on peut donc supprimer L_2 ou L_3 (puisqu'il s'agit de la même équation), sinon, L_3 va s'annuler par calcul ($L_3 \Leftrightarrow 0 = 0$).
On obtient dans ce cas :

$$(S_2) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - 4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(S_2) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 3z & + & 2t & = & -2 \\ & & y & - & 2z & - & 3t & = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{cases} x = -5 - 5z - 5t \\ y = 3 + 2z + 3t. \end{cases}$$

On obtient alors $S = \{(-5 - 5z - 5t, 3 + 2z + 3t, z, t) \ / \ z \ et \ t \in \mathbb{R}\}$.

3) $$(S_3) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 7 & 3 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{3}L_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -6 & 8 & 2 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + 6L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{array}\right).$$

On a un pivot 2 au second membre. Donc $S = \emptyset$. En effet, le système (S_3) devient

$$(S_3) : \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad y - \frac{4}{3}z = 0 \\ \qquad 0 = 2. \end{cases}$$

4) $(S_4) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\curvearrowright \ \tfrac{1}{4}L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + 4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \end{array}\right).$$

On a un pivot 4 au second membre. Donc $S = \emptyset$.

5) $(S_5) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -10 & 10 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - 5L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 21 & 0 & 15 \end{array}\right).$

On peut remarquer que $L_2 = L_3 = \frac{1}{3}L_4$, alors on peut supprimer deux lignes d'entre elles (puisque les trois lignes signifient la même équation).

$$(S_5) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \frac{1}{7}L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{7} \end{array}\right).$$

Et le système (S_5) devient alors :

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ \qquad\quad y \quad = \frac{5}{7} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3y + 2z = 2z + \frac{8}{7} \\ y = \frac{5}{7}. \end{cases}$$

Par suite $S = \left\{ \left(2z + \frac{8}{7}, \frac{5}{7}, z\right) \ / \ z \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 2

Résoudre, par la méthode de Cramer, les systèmes linéaires suivants :

1) $(S_1) : \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -3 \\ x - 2y + z = 5 \\ x - 4y + 6z = 10. \end{cases}$

2) $(S_2) : \begin{cases} 2x - 5y + 4z + t = -3 \\ x - 2y + z - t = 5 \\ x - 4y + 6z + 2t = 10. \end{cases}$

Solution.

1) Résolvons le système (S_1) par la méthode de Cramer,

$$(S_1):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 5y & + & 4z & = & -3 \\ x & - & 2y & + & z & = & 5 \\ x & - & 4y & + & 6z & = & 10 \end{array}\right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ B}}.$$

$$\rightarrow\ \Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

(A est une matrice carrée inversible, donc (S_1) est un système de Cramer, par suite (S_1) admet une solution unique).

$$\rightarrow\ \Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 10 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 124.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 75.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -4 & 10 \end{vmatrix} = 31.$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{124}{1} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{75}{1} \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{31}{1} \end{cases} \Longrightarrow S = \{(124, 75, 31)\}.$$

2) Résolvons le système (S_2) par la méthode de Cramer

$$(S_2):\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 5y & + & 4z & + & t & = & -3 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & 5 \\ x & - & 4y & + & 6z & + & 2t & = & 10 \end{array}\right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

→ A est non carrée $\Rightarrow (S_2)$ non de Cramer.

→ Cherchons donc le plus grand système de Cramer $(S) \subset (S_2)$; ce qui revient à chercher le plus grand déterminant non nul inclus dans A. (On peut avoir plus d'un choix).

$\rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Donc le système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & - & 5y & + & 4z & = & -3 & - & t \\ x & - & 2y & + & z & = & 5 & + & t \\ x & - & 4y & + & 6z & = & 10 & - & 2t \end{array}\right.$ est de Cramer.

(Attention ! le dernier système obtenu a pour inconnues, x, y et z. Le t n'est pas une inconnue. Par contre, (S_2) a pour inconnues x, y, z et t).

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\Delta_x}{1} = \begin{vmatrix} -3-t & -5 & 4 \\ 5+t & -2 & 1 \\ 10-2t & -4 & 6 \end{vmatrix} = 16t + 124 \\[2em] y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{\Delta_y}{1} = \begin{vmatrix} 2 & -3-t & 4 \\ 1 & 5+t & 1 \\ 1 & 10-2t & 6 \end{vmatrix} = 9t + 75 \\[2em] z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{\Delta_z}{1} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3-t \\ 1 & -2 & 5+t \\ 1 & -4 & 10-2t \end{vmatrix} = 3t + 31. \end{array}\right.$$

Donc $S = \{(16t + 124, 9t + 75, 3t + 31, t) \ / \ t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3

Résoudre, par la méthode de Gauss, puis par celle de Cramer, le système linéaire suivant :

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & -2 \\ 2x & + & 3y & - & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 3z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Solution.

<u>**Méthode de Gauss :**</u>

$$(S) \curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ L_3 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{r} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ \\ -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

(S) devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & -2 \\ & & y & - & 5z & - & t & = & 2 \\ & & & & & & t & = & -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -7z + \frac{1}{2} \\ y = 5z + \frac{1}{2} \\ t = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

$S = \left\{\left(-7z + \frac{1}{2}, 5z + \frac{1}{2}, z, -\frac{3}{2}\right) \ / \ z \in \mathbb{R}\right\}$, il y a une infinité de solutions.

<u>Méthode de Cramer :</u> (s'applique aux systèmes dont la matrice associée est carrée et inversible). On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$. Considérons donc le système de Cramer à trois variables x, y et t.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2t & = & -2 & - & 2z \\ 2x & + & 3y & + & t & = & 1 & + & z \\ x & + & 2y & + & t & = & 3z. & & \end{array}\right.$$

$\rightarrow \Delta_x = \begin{vmatrix} -2-2z & 1 & 2 \\ 1+z & 3 & 1 \\ 3z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 14z + 1.$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2-2z & 2 \\ 2 & 1+z & 1 \\ 1 & 3z & 1 \end{vmatrix} = 10z + 1.$

$\Delta_t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2-2z \\ 2 & 3 & 1+z \\ 1 & 2 & 3z \end{vmatrix} = -3.$

Donc $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{-14z+1}{2} = -7z + \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{10z+1}{2} = 5z + \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{\Delta_t}{\Delta} = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

On obtient alors $S = \left\{\left(-7z + \frac{1}{2}, 5z + \frac{1}{2}, z, -\frac{3}{2}\right) \ / \ z \in \mathbb{R}\right\}$.

Remarque : On peut choisir un autre det : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -10$. Et la solution sera en fonction de y.

(S) devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2z & + & 2t & = & -2 & - & y \\ 2x & - & z & + & t & = & 1 & - & 3y \\ x & - & 3z & + & t & = & -2y. & & \end{array}\right.$$

$\begin{cases} \Delta_x = 14y - 12 \\ \Delta_z = -2y + 1 \\ \Delta_t = 15. \end{cases}$ On obtient alors $S = \left\{\left(-\frac{7}{5}y + \frac{6}{5}, y, \frac{1}{5}y - \frac{1}{10}, -\frac{3}{2}\right) \ / \ z \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 4
Discuter les valeurs du paramètre réel m pour résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$1)\ (S_1) : \begin{cases} x - 2y - z + t = 1 \\ 2x - y - 2z - t = 0 \\ x - 3y + 2t = -1 \\ x - 4y - 2z + 3t = m \end{cases}$$

$$2)\ (S_2) : \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x - 4y + 7z = m \end{cases}$$

$$3)\ (S_3) : \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$

$$4)\ (S_4) : \begin{cases} x + 2y + 3mz = 1 \\ x + (m+1)y + (3m+1)z = 2 \\ x + 2y + 2mz = 0 \end{cases}$$

Solution.

$$1)\ (S_1) \curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & m \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & m-1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ -L_3 \\ L_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & m-1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - 3L_2 \\ L_4 + 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & m+3 \end{array}\right).$$

On peut faire $L_3 + L_4$, sinon on poursuit la méthode de Gauss :

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{3}L_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -3 & 0 & m+3 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ \\ L_4 + 3L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-5 \end{array}\right).$$

<u>Si $m \neq 5$</u> $(m - 5 \neq 0)$, alors $S = \emptyset$.

Si $m=5$ $(m-5=0)$, alors le système devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & - & z & + & t & = & 1 \\ & & y & - & z & - & t & = & 2 \\ & & & & z & & & = & -\frac{8}{3} \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{cases} x = 1+2y+z-t = t-3 \\ y = 2+z+t = 2-\frac{8}{3}+t = t-\frac{2}{3} \\ z = -\frac{8}{3}. \end{cases}$$

Par suite $S=\left\{\left(t-3, t-\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}, t\right) \ / \ t\in\mathbb{R}\right\}$, il y a une infinité de solutions pour le système (S_1) si $m=5$.

Remarque : On pourrait remarquer que x, y et z sont des inconnues principales pendant que t est une variable secondaire. Par suite x, y et z seront exprimées en fonction de t.

2) (S_2) peut être représenté matriciellement comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 7 & m \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2-2L_1 \\ L_3-L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 8 & m-1 \end{array}\right) \curvearrowright -\frac{1}{3}L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -6 & 8 & m-1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3+6L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array}\right).$$

Le système devient :

$$(S_2) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & \frac{4}{3}z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & m-1. \end{array}\right.$$

Si $m\neq 1$ $(m-1\neq 0)$, alors $S=\emptyset$.

Si $m=1$ $(m-1=0)$, alors le système (S_2) devient :

$$(S_2) \curvearrowright \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & \frac{4}{3}z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & \frac{4}{3}z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1-2y+z = 1-\frac{5}{3}z \\ y = \frac{4}{3}z. \end{cases}$$

Donc $S=\left\{\left(1-\frac{5}{3}z, \frac{4}{3}z, z\right) \ / \ z\in\mathbb{R}\right\}$.

3) $(S_3) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - mL_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 1 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1 \end{array}\right)$

$\underset{(*)}{\uparrow}$

<u>Si $m - 1 \neq 0$</u> $(m \neq 1)$

$$(S_3) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \frac{1}{m-1}L_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - (1-m)L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & (1-m)(2+m) & 2 \end{array}\right)$$

$\underset{(**)}{\uparrow}$

<u>Si $2 + m \neq 0$</u> $(m \neq -2)$

$$(S) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{(1-m)(2+m)}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2}{(1-m)(2+m)} \end{array}\right)$$

Donc $(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcc} x & + & y & + & mz & = & 0 \\ & & y & - & z & = & \frac{1}{m-1} \\ & & & & z & = & \frac{2}{(1-m)(2+m)} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{m}{(1-m)(2+m)} \\ y = -\frac{m}{(1-m)(2+m)} \\ z = \frac{2}{(1-m)(2+m)} \end{array} \right. .$

Et $S = \left\{ \left(-\frac{m}{(1-m)(2+m)} \, , \, -\frac{m}{(1-m)(2+m)} \, , \, \frac{2}{(1-m)(2+m)} \right) \right\}$.

<u>Si $m + 2 = 0$</u> $(m = -2)$

Vaut mieux remplacer $m = -2$ dans la dernière matrice $(**)$ obtenue juste avant de discuter le cas $m + 2 \neq 0$.
On obtient :

$$(S) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{array}\right) \Longrightarrow S = \emptyset, \ \textit{car} :$$

$$(S):\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & 0 \\ & & y & - & z & = & \frac{1}{m-1} \\ & & & & 0 & = & 2 \end{array}\right. \quad (\,impossible\,).$$

(Ceci puisqu'on a un pivot $\boxed{2}$ au second membre).

Si $m-1=0$ $(m=1)$

On remplace $m=1$ dans la dernière matrice obtenue $(*)$ juste avant de discuter le cas $m-1\neq 0$. On obtient :

$$(S_3) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(S_3):\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right. \quad (\,impossible\,).$$

Donc $S=\emptyset$.

Conclusion

- Si $m\in\{-2,1\}$, alors $S=\emptyset$.
- Si $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$, alors la solution est unique.

4) (S_4) est représenté sous la forme matricielle comme suit :

$$(S_4) \curvearrowright \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 1 & (m+1) & (3m+1) \\ 1 & 2 & 2m \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A_m}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ B}}.$$

$$\rightarrow \det(A_m) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 1 & (m+1) & (3m+1) \\ 1 & 2 & 2m \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 0 & (m-1) & 1 \\ 0 & 0 & -m \end{vmatrix}$$

$$= -m(m-1) = m(1-m).$$

(S_4) est un système de Cramer $\Longleftrightarrow m(m-1)\neq 0 \Longleftrightarrow m\neq 0$ et $m\neq 1$. Dans ce cas :

$$\rightarrow \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 2 & (m+1) & (3m+1) \\ 0 & 2 & 2m \end{vmatrix} = L_2-2L_1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 0 & (m-3) & (1-3m) \\ 0 & 2 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (m-3) & (1-3m) \\ 2 & 2m \end{vmatrix}$$

$$= 2m(m-3)-2(1-3m) = 2m^2-6m-2+6m = 2m^2-2 = 2(m^2-1).$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3m \\ 1 & 2 & (3m+1) \\ 1 & 0 & 2m \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_3 \\ = L_2 - L_3 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ 0 & 2 & (m+1) \\ 1 & 0 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & (m+1) \end{vmatrix} = 1 - m.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & (m+1) & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_3 \\ = \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & (m+1) & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (m+1) \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - m.$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\det(A_m)} = \dfrac{2(m-1)(m+1)}{m(1-m)} = -\dfrac{2(m+1)}{m} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\det(A_m)} = \dfrac{1-m}{m(1-m)} = \dfrac{1}{m} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\det(A_m)} = \dfrac{1-m}{m(1-m)} = \dfrac{1}{m} \end{cases}.$$

Donc $\left\{\left(-\dfrac{2(m+1)}{m}, \dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{m}\right)\right\}$ est la seule solution du système (S_4) lorsque $m \notin \{0, 1\}$.

Si $\underline{m \in \{0,1\} :}$

- Si $\underline{m = 0}$, alors :

$$(S_4) \curvearrowright \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A_0}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ B}}.$$

On a $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Considérons donc le système à deux variables x et y.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y = 2 - z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - 2(z-1) = 3 - 2z \\ y = z - 1. \end{cases}$$

Donc $S = \{3 - 2z, z - 1, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$, il y a une infinité de solutions.

- Si $\underline{m = 1}$, alors :

$$(S_4) \curvearrowright \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A_1}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ B}}.$$

On a $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Considérons donc le système à deux variables x et z.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 3z & = & 1-2y \\ x & + & 4z & = & 2-2y \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2(y+1) \\ z & = & 1. \end{array} \right.$$

Donc $S = \{-2(y+1), y, 1) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$, il y a une infinité de solutions.