UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
FACULTÉ DES SCIENCES

Département de Mathématiques
Filière : SMPC -S_2-
Année universitaire : 20/21
Session ordinaire

Examen d'analyse II (1h)

Exercice 1. (4 Points)

1. Rappeler la technique d'intégration par parties pour une intégrale définie.
2. Calculer l'intégrale définie $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$.

Exercice 2. (8 Points)
Soit (E) l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(E) : \qquad 2x(1+x)y' + (1+x)y = 1$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Par un changement de variable, vérifier que sur $]0, +\infty[$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \, dx = \arctan \sqrt{x} + C, \qquad (C \in \mathbb{R})$$

3. Chercher une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante.
4. Résoudre l'équation complète (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3. (8 Points)

1. Vérifier que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x^2(1+x)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{1+x}$$

2. Calculer sur $]0, +\infty[$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x)^2}$
3. En déduire que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)^2} \, dx$ converge et donner sa valeur.
4. Déterminer la nature de $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x^2(1+x)^2} \, dx$.

Fin.