Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Filière : SMPC -S_2-
Année universitaire : 20/21
Session ordinaire

Corrigé de l'examen d'analyse II

Exercice 1. (4=2+2)

1. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

2. Par une intégration par parties, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\; dx = \big[-x\cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x\; dx = 0 + \big[\sin x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Exercice 2. $(8 = 4\times 2)$
Soit (E) l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(E): \qquad 2x(1+x)y' + (1+x)y = 1$$

1. L'équation homogène associée à (E) s'écrit sur $]0,+\infty[$, $2x(1+x)y' + (1+x)y = 0$, sa solution est de la forme

$$y_0(x) = Ce^{\frac{-1}{2}\ln x} = C\frac{1}{e^{\ln\sqrt{x}}} = \frac{C}{\sqrt{x}}, \qquad C\in\mathbb{R}.$$

2. Effectuons le changement de variable $t=\sqrt{x}$ qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. on a $dx = 2t\,dt$, donc

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \int \frac{1}{2t(1+t^2)}\,2t\;dt = \arctan t + C = \arctan\sqrt{x} + C, \quad (C\in\mathbb{R})$$

3. Par la méthode de variation de la constante, on obtient

$$C'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x(1+x)}$$

d'après la question précédente, $C(x) = \arctan\sqrt{x}$ convient et une solution particulière de (E) est donnée sur $]0,+\infty[$ par

$$y_p(x) = \frac{C(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

4. L'ensemble des solutions de l'équation complète (E) sur $]0,+\infty[$ est

$$S = \{x \mapsto \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{C}{\sqrt{x}}, \quad C \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 3. $(8 = 4 \times 2)$

1. Par une décomposition en éléments simples de la fraction (ou bien par un calcul direct en partant de l'expression du membre à droite...) on vérifie aisement que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x^2(1+x)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{1+x}$$

2. Sur $]0,+\infty[$, on a par linéarité de la primitivation

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x)^2} = \frac{-1}{x} - 2\ln x + \frac{-1}{1+x} + 2\ln(1+x) = 2\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$$

3. En déduit que pour $u \in]0,+\infty[$, on a

$$\int_1^u \frac{dx}{x^2(1+x)^2} = \left(2\ln\left(\frac{1+u}{u}\right) - \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) - \big(2\ln(2) - 1 - \frac{1}{2}\big)$$

En faisant tendre u vers $+\infty$ on obtient la convergence l'intégrale généralisée I et

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)^2}\,dx \\ &= \lim_{u\to+\infty}\left(2\ln\left(\frac{1+u}{u}\right) - \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) - \big(2\ln(2) - 1 - \frac{1}{2}\big) \\ &= \frac{3}{2} - \ln 4 \end{aligned}$$

4. En remarquant que la fonction est positive sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x > 0$ on a $e^{-2x} \leq 1$ il vient

$$\frac{e^{-2x}}{x^2(1+x)^2} \leq \frac{1}{x^2(1+x)^2}$$

Comme I converge, J converge aussi par le critère de comparaison.
Remarque : On pourra utiliser d'autres comparaisons sur $[1,+\infty[$ comme par exemple :
• $\dfrac{e^{-2x}}{x^2(1+x)^2} \leq e^{-2x}$ et justifier la convergence de $J_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-2x}\,dx$ en utilisant la définition...
• $\dfrac{e^{-2x}}{x^2(1+x)^2} \leq \dfrac{1}{x^2(1+1)^2} \leq \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x^2}$ et utiliser la convergence de l'intégrale de Reimann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$..

Fin.