UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL جامعة مولاي إسماعيل
FACULTÉ DES SCIENCES كلية العلوم

Département de Mathématiques
Filière : SMPC -S$_2$-
Année universitaire : 20/21
Session de rattrapage

Corrigé de l'examen d'analyse II

Exercice 1. (4=2+2)

1. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ (1pt) Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx \quad (1pt)$$

2. Par une intégration par parties, on obtient

$$\int_1^e \ln x\ dx = \big[x\ln x\big]_1^e - \int_1^e\ dx = e - \big[x\big]_1^e = 1. \quad (2pt)$$

Exercice 2. $(8 = 4\times 2)$

1. Par une décomposition en éléments simples de la fraction on vérifie que pour tout $x>0$, (0,5 pt pour chaque coefficient)

$$\frac{4}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{1+x^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-2}{1+x^2}$$

(ou bien par un calcul direct bien détaillé (2pts)...)

2. Sur $]1,+\infty[$, on a par linéarité de la primitivation (2pts)

$$\int f(x)\,dx = \ln(x-1) - \ln(1+x) - 2\arctan x = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\arctan x$$

3. En déduit que pour $u\in[2,+\infty[$, on a

$$\int_2^u f(x)\,dx = \ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right) - 2\arctan u - \ln\left(\frac{2-1}{2+1}\right) + 2\arctan 2$$

En faisant tendre u vers $+\infty$ on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_2^{+\infty} f(x)\,dx \\ &= \lim_{u\to+\infty} \ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right) - 2\arctan u - \ln\left(\frac{2-1}{2+1}\right) + 2\arctan 2 \\ &= 0 - \pi + \ln 3 + 2\arctan 2 \end{aligned}$$

d'où la convergence de I (1pt) et sa valeur $I = -\pi + \ln 3 + 2\arctan 2$ (1pt).

Remarque : Pour la convergence, on peut utiliser l'équivalence de f et $\dfrac{4}{x^4}$ au voisinage de $+\infty$ en plus de la convergence de l'intégrale de Reimann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}$ et la linéarité..(1pt)

4. En utilisant la question 2. on obtient pour $v \in]1,2]$,

$$\int_v^2 f(x)\,dx = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - 2\arctan 2 - \ln\left(\frac{v-1}{v+1}\right) + 2\arctan v$$

En faisant tendre v vers 1^+, il vient

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 f(x)\,dx \\ &= \lim_{v\to 1^+} \ln\left(\frac{1}{3}\right) - 2\arctan 2 - \ln\left(\frac{v-1}{v+1}\right) + 2\arctan v \\ &= +\infty \end{aligned}$$

ainsi J diverge. (2pts)
Remarque : On pourra utiliser des critères (de comparaison ou d'équivalence) pour les fonctions positives...

Exercice 3. $(8 = 4 \times 2)$

1. L'équation sans second membre associée à (E) s'écrit $y'' + 2y' + y = 0$, sa solution est de la forme (à écrire l'équation caractéristique...)

$$y_h(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (2pt)$$

2. En calculant les dérivés première et seconde de y_1 (1pt) et en portant dans (E), on obtient

$$y_1'' + 2y_1' + y_1 = 3e^{2x} \quad (1pt)$$

3. Une solution particulière de $y'' + 2y' + y = x^3$ est une fonction polynôme de degré 3 de la forme

$$y_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

En calculant les dérivés première et seconde de y_2, en portant dans (E) et en identifiant les polynômes, on obtient

$$a = 1, b = -6, c = 18, d = -24 \quad (0,5 \times 4)$$

4. Par le principe de la superposition des solutions, $y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E).(1pt)
L'ensemble des solutions de l'équation complète (E) sur $]0, +\infty[$ est

$$S = \{x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} + x^3 - 6x^2 + 18x - 24, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad (1pt)$$

Fin.