Analyse mathématique

Chapitre I : Fonction numérique d'une variable réelle

Pr. AMALI SAID
Pr. Serhani Mustapha

Année Universitaire : 2020-2021

I. Généralité sur les fonctions

I.1 Notion d'intervalle

On appelle intervalle réel, un sous ensemble de $\mathbb{R}$ contenant tous les nombres réels compris entre deux nombres réels a et b, $(a < b)$, comme suit:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \;/\; a \leq x \leq b\}$, (Intervalle fermé),

Exemples:

$$[2,5] = \{x \in \mathbb{R} \;/\; 2 \leq x \leq 5\}$$

$$[-3,9] = \{x \in \mathbb{R} \;/ -3 \leq x \leq 9\}$$

- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R}\ /\ a < x < b\}$, (Intervalle ouvert),

Exemple:

$$]-1,6[= \{x \in \mathbb{R}\ /\ -1 < x < 6\}$$

- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R}\ /\ a \leq x < b\}$, (Intervalle semi-ouvert à droite),

Exemple:

$$[1,8[= \{x \in \mathbb{R}\ /\ 1 \leq x < 8\}$$

- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R}\ /\ a < x \leq b\}$, (Intervalle semi-ouvert à gauche),

Exemple:

$$]-2,7] = \{x \in \mathbb{R}\ /\ -2 < x \leq 7\}$$

- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}\ /\ x \geq a\}$,

Exemple:

$$[3,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}\ /\ x \geq 3\}$$

- $]a,+\infty[=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\}$,

Exemple:

$$]3,+\infty[=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 3\}$$

- $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq a\}$,

Exemple:

$$]-\infty,-2] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -2\}$$

- $]-\infty,a[=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\}$,

Exemple:

$$]-\infty,-3[=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < -3\}$$

- $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

Les sous ensembles de $\mathbb{R}$ sont ou bien des intervalles des types précédents ou des réunions des intervalles de types précédents.

Exemples: $A = [2,4[\cup]6,10]$; $B =]-5,0[\cup]1,3[$

I.2 Fonction et application

Soient E et F deux sous ensembles de $\mathbb{R}$,

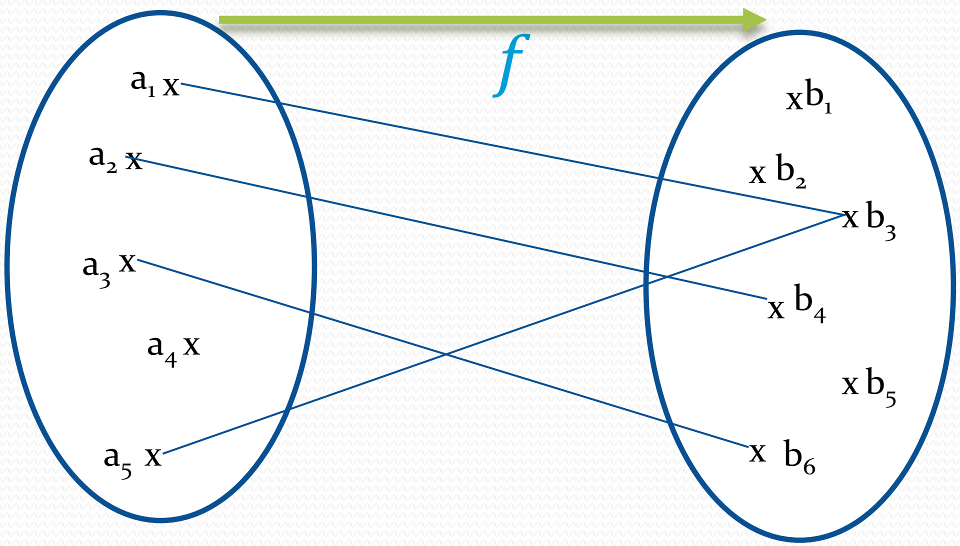
- On appelle fonction numérique d'une variable réelle de E vers F toute "correspondance" entre E et F, telle que chaque élément de E admette au plus une image dans F. On note

$$f : E \to F$$
$$x \to f(x)$$

f est dite application si chaque élément de E admet une image et une seule dans F.

Soient $a \in E$, b $\in F$ tels que $f(a) = b$, alors

- a est dit antécédent de b par f
- b est dit image de a par f.
- Et les nombres réels de F qui possèdent au moins un antécédent par f constituent l'ensemble image de f, que l'on note $Im(f)$.



$$f(a_1) = b_3$$
$$f(a_2) = b_4$$
$$f(a_3) = b_6$$
$$f(a_5) = b_3$$
$$Im(f) = \{b_3, b_4, b_6\}$$

Par exemple : b_3 est l'image de a_1 ; a_1 et a_5 sont les antécédents de b_3

I.3 Domaine de définition

Soit $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, on appelle domaine de définition de f, et on note D_f , l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ possédant une image par f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; \exists y \in \mathbb{R} \; vérifiant \; f(x) = y\}$$

Propriétés:

- Une fonction devient une application sur son domaine de définition D_f.
- $Im(f) = f(D_f)$
- L'ensemble des points (du plan cartésien) de coordonnées $(x, f(x))$, où $x \in D_f$, est la courbe représentative de f , dite graphe de f ,

$$G_f = \{(x, f(x))/ \; x \in D_f\},$$

Exemples:

1. Soit $f(x) = Id_{\mathbb{R}}(x) = x$
$Id_{\mathbb{R}}$ est dite fonction identité, on a $D_{Id_{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}$.

2. Soit $f(x) = \sqrt{x}$, on a $D_f = \mathbb{R}^+$

3. Soit $f(x) = 4x^2 - 9$,

on doit avoir $4x^2 - 9 \geq 0$,

ou d'une façon équivalente

$$x^2 \geq \frac{9}{4} \ ,$$

D'où

$$x \geq \frac{3}{2} \quad ou \quad x \leq -\frac{3}{2}$$

et par suite

$$x \in]-\infty, \frac{-3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[$$

Ainsi

$$D_f =]-\infty, \frac{-3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[$$

4. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{2x+2}$ il faut avoir $x + 5 \geq 0$ et $2x + 2 \neq 0$

Ainsi

$$x \geq -5 \quad \text{et} \quad x \neq -1$$

D'où

$$x \in [-5, -1[\cup]-1, +\infty[$$

Et par suite

$$D_f = [-5, -1[\cup]-1, +\infty[$$

I.4 Composée de deux fonctions

Soient E, F et G trois sous ensembles de $\mathbb{R}$, et soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux fonctions. Par définition, la fonction composée $g \circ f$ est définie de $E \to G$ par

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) \quad \forall x \in E$$

Propriétés:

1. Soient $f: E \to F$; $g: F \to G$ et $h: G \to H$ alors:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

2. Soit $f: E \to F$ alors

$$\begin{cases} f \circ Id_E(x) = f(x) \\ Id_F \circ f(x) = f(x) \end{cases}$$

3. La composée n'est pas commutative en général

$$g \circ f \neq f \circ g$$

II. Propriétés d'une fonction

II.1 Majorant, Minorant

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition:

- On dit que la fonction f est majorée sur I s'il existe un réel M tel que

$$\forall\, x \in I, f(x) \leq M\ .$$

On dit alors que M est un majorant de f sur I.

- On dit que la fonction f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que

$$\forall\, x \in I, f(x) \geq m\ .$$

- On dit que la fonction f est bornée sur I s'il existe deux réels M, $m \in \mathbb{R}$ tels que:

$$\forall\, x \in I,\ \mathrm{m} \leq f(x) \leq M\ .$$

On dit alors que m est un minorant de f sur I.

Remarques:

- ✓ Un majorant n'existe pas toujours.
- ✓ Un majorant, quand il existe, n'est pas unique : en effet, si M majore f, alors tout réel supérieur à M majore aussi f.
- ✓ Mêmes remarques pour les minorants.

Exemples: Soit $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$

La fonction f est majorée par $\frac{1}{6}$ et minorée par $\frac{-1}{2}$,

donc f est bornée. **En effet**:

Nous avons $$f(x) \leq \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x^2+3} \leq \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow 6(x-1) \leq x^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 6x + 9$$

Ce qui est vrai car

x	$-\infty$		3		$+\infty$
x^2-6x+9		$+$	0	$+$	

et nous avons $$f(x) \geq \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x^2+3} \geq \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) \geq -(x^2+3)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 + 2x + 1$$

Ce qui est toujours vrai.

II.2 Maximum, Minimum

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition: Soit x_0 un élément de I.

- On dit que f atteint un maximum global en x_0 sur I si:

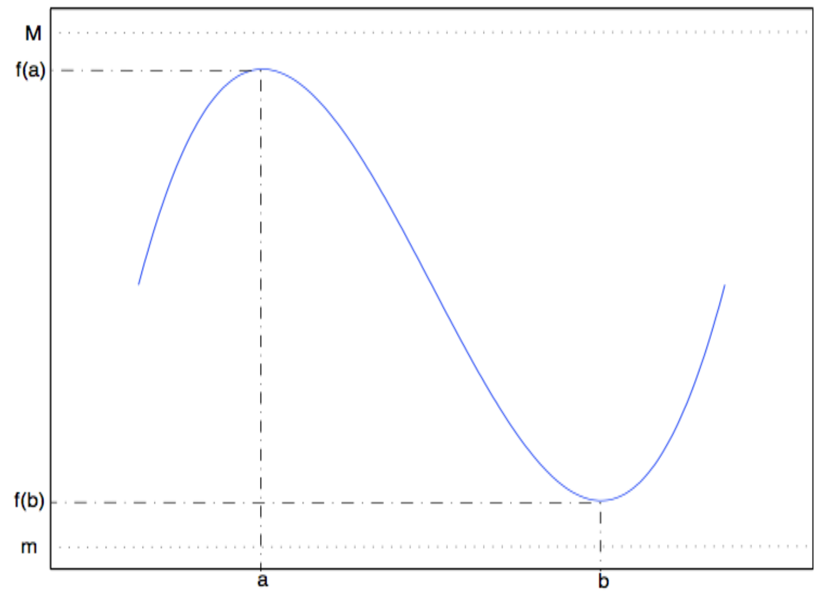
$$\forall\, x \in I, f(x) \leq f(x_0).$$

On note $$\max_{x \in I} f(x) = f(x_0)$$

- On dit que f atteint un minimum global en x_0 sur I si:

$$\forall\, x \in I, f(x) \geq f(x_0).$$

- On dit que f admet un extremum si elle admet un maximum ou un minimum.



- M est un majorant de f et m est un minorant de f;
- $f(a)$ est un maximum global de f atteint en a;
- $f(b)$ est un minimum global de f atteint en b.

Définition: Soit x_0 un élément de I.

- On dit que f atteint un maximum local en x_0 sur I, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

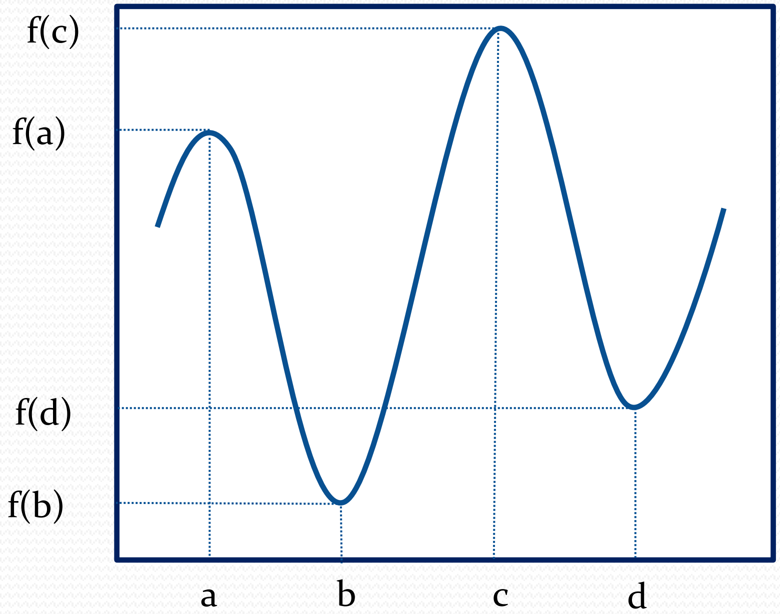
$$\forall\, x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap I, \qquad f(x) \leq f(x_0).$$

On note $$\max_{x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap I} f(x) = f(x_0)$$

- On dit que f atteint un minimum local en x_0 sur I, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall\, x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap I, \qquad f(x) \geq f(x_0).$$

On note $$\min_{x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap I} f(x) = f(x_0)$$



La fonction f admet:

- Un maximum global $f(c)$ atteint en c;
- Un maximum local $f(\text{a})$ atteint en a;
- Un minimum global $f(b)$ atteint en b;
- Un minimum local $f(d)$ atteint en d.

Exemple: Déterminer le maximum de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \qquad \text{sur} \qquad I = [0, +\infty[$$

On a pour tout $x \in I$,

$$x + 1 \geq 1$$

D'où

$$\frac{1}{x+1} \leq 1$$

Donc 1 est un majorant de f, et puisque $f(0) = 1$ on a donc

$$f(x) \leq f(0), \qquad \forall\, x \in I$$

Ainsi f atteint un maximum global en 0 qui vaut 1:

$$\boldsymbol{\max_{x\in I} f(x) = f(0) = 1}$$

II.2 Parité et monotonie

- **Parité et Périodicité**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que

- f est paire si $\forall\ x \in D_f, -x \in D_f\ et\ f(-x) = f(x)$
- f est impaire si $\forall\ x \in D_f, -x \in D_f\ et\ f(-x) = -f(x)$
- f est périodique si $\exists\ T \in \mathbb{R}, \forall\ x \in D_f, x + T \in D_f\ et\ f(x + T) = f(x)$

On dit alors que T est une période de f, la période de f est le plus petit réel positif réalisant l'égalité ci-dessus.

Si T est une période de f, alors $\forall\ k \in \mathbb{Z},\ kT$ est aussi une période de f.

Remarque: Ces remarques concernent le graphe G_f de f:

- Si f est paire, alors son graphe G_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées Y.

- Si f est impaire, alors son graphe G_f est symétrique par rapport à l'origine $O(0,0)$ du repère.

- Si f est périodique et de période T, alors son graphe G_f se reproduit l'identique tous les intervalles d'amplitude T.

Exemple:

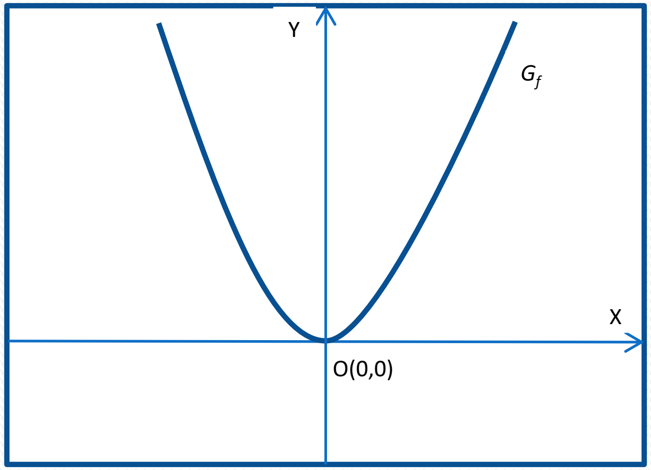
Considérons les deux fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ définies sur $\mathbb{R}$

Nous avons $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ et. $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$

Ainsi

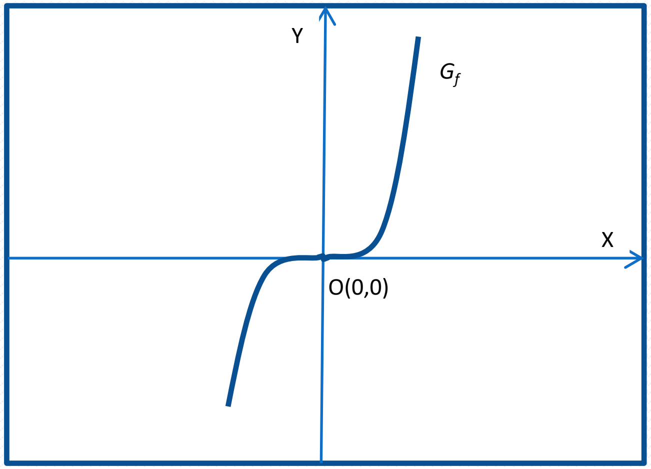
La fonction f est paire.

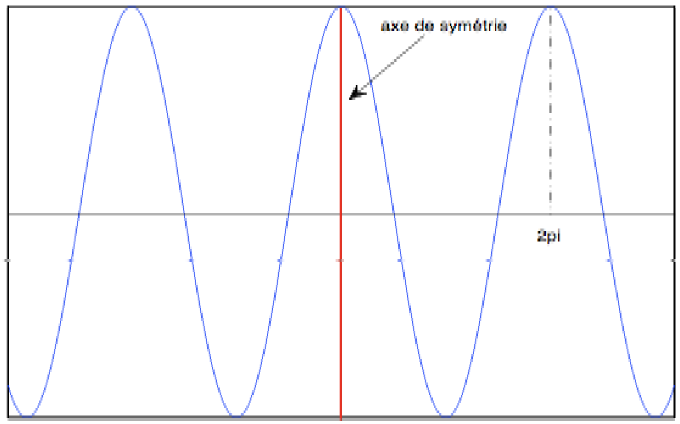
D'où, le graphe de f, G_f est Symétrique par rapport à l 'axe (OY)

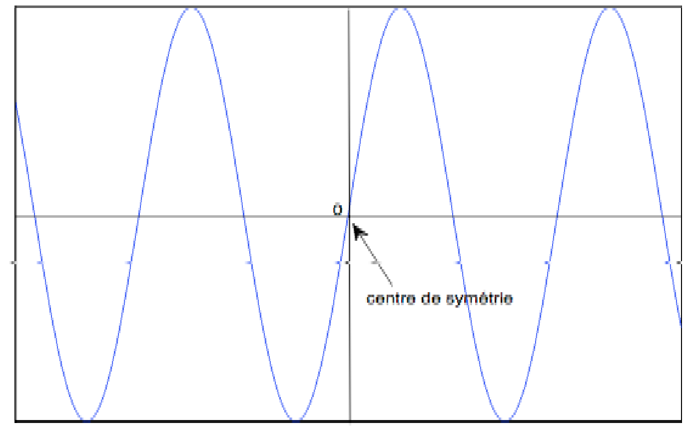


La fonction g est impaire.

D'où le G_f est symétrique par rapport au centre $O(0,0)$







La fonction $f(x) = \cos(x)$ est paire et périodique de

Période 2π.

$cos(x \pm 2\pi) = \cos(x)$

La fonction $f(x) = sin(x)$ est impaire et périodique de période 2π.

$sin(x \pm 2\pi) = sin(x)$

Monotonie

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f: I \to \mathbb{R}$ une application.

- On dit que f est croissante sur I si

$$\forall\, x, y \in I, x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

- On dit que f est décroissante sur I si

$$\forall\, x, y \in I, x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

- On dit que f est strictement croissante sur I si

$$\forall\, x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

- On dit que f est strictement décroissante sur I si

$$\forall\, x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$

- On dit que f est monotone (strictement) sur I si f est croissante ou Décroissante (strictement) sur I.

III. Limites

III.1 Définitions

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0, l \in \mathbb{R}$. On définit la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0, **lorsqu'elle existe**, comme étant la valeur que prendrait, $f(x)$ quand x s'approche infiniment de x_0.

On note $$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$$

Mathématiquement parlant:

Définition: On dit que f admet l pour limite, quand x tend vers x_0, si

$$\forall\, \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists\, \boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}\ \boldsymbol{tel\ que}, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v\acute{e}rifiant}\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\delta} \Longrightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{l}| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$$

Remarque: Cette définition peut être adaptée aux cas où $l = \pm\infty$ et/ou $x_0 = \pm\infty$.

Théorème: Si la limite de f, lorsque l tend vers x_0, existe, alors elle est unique.

III.2 Règles de calculs

Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Théorème: Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = l_2$, alors

- $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (f + g)(x) = l_1 + l_2$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (fg)(x) = l_1 l_2$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{l_1}{l_2}$

Ces règles peuvent s'étendre aux cas $\pm\infty$ comme suit:

$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = l_1$	$l_1 \in \mathbb{R}^*$				$l_1 = 0$				$l_1 = +\infty$				$l_1 = -\infty$			
$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x) = l_2$	$l_2 \in \mathbb{R}^*$	$l_2 = 0$	$l_2 = +\infty$	$l_2 = -\infty$	$l_2 \in \mathbb{R}^*$	$l_2 = 0$	$l_2 = +\infty$	$l_2 = -\infty$	$l_2 \in \mathbb{R}^*$	$l_2 = 0$	$l_2 = +\infty$	$l_2 = -\infty$	$l_2 \in \mathbb{R}^*$	$l_2 = 0$	$l_2 = +\infty$	$l_2 = -\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} (f+g)(x)$	$l_1 + l_2$	l_1	$+\infty$	$-\infty$	l_2	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	indéterminée	$-\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} (fg)(x)$	$l_1 l_2$	0	$+\infty$	$-\infty$	0	0	indéterminée	indéterminée	$+\infty$	indéterminée	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} \frac{f}{g}(x)$	$\frac{l_1}{l_2}$	∞	0	0	0	indéterminée	0	0	∞	∞	indéterminée	indéterminée	∞	∞	indéterminée	indéterminée

III.2 Limite et ordre

Théorème: Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

1. (critère des Gendarmes) si, au voisinage de x_0, on a

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} h(x) = l$

alors $$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$$

2. Au voisinage de x_0, on a $g(x) \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = +\infty$,

   alors $$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

3. Au voisinage de x_0, on a $g(x) \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$,

   alors $$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

4. Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l_1$; $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = l_2$ et $f(x) \leq g(x)$

Alors $$l_1 \leq l_2$$

5. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I, si $\forall x \in I,\ m \leq f(x) \leq M$, et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$

Alors

$$m \leq l \leq M$$

Théorème: Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = a$ et $\lim\limits_{y \longrightarrow a} g(y) = l$ alors

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} g \circ f(x) = l$$

Exercices: Calculer les limites suivantes:

$(i)\ \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4 \qquad (ii)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0 \qquad (iii)\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$

$(iv)\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \qquad (v)\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{x^2} = -\infty.$

III.3 Limite à droite et à gauche

On dit que f admet pour limite à droite en x_0 et on note : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0\ /\ 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

On dit que f admet pour limite à gauche en x_0 et on note : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0\ /\ -\alpha < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

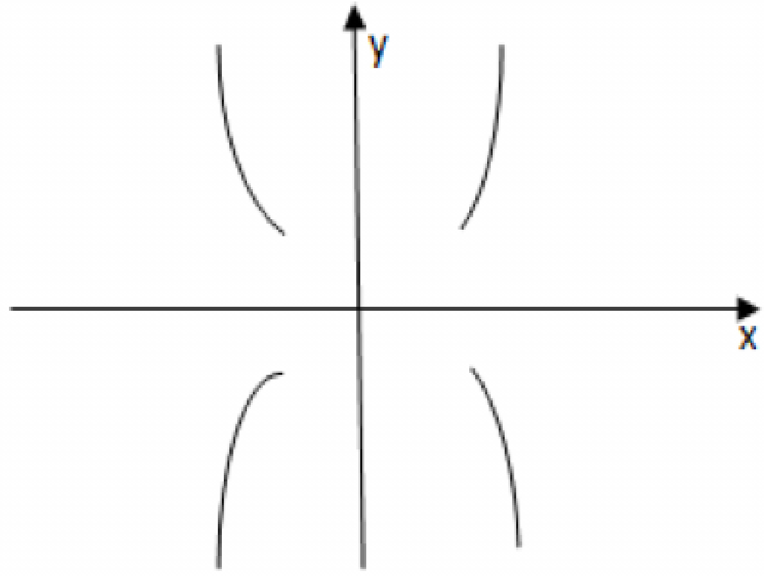
Théorème :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

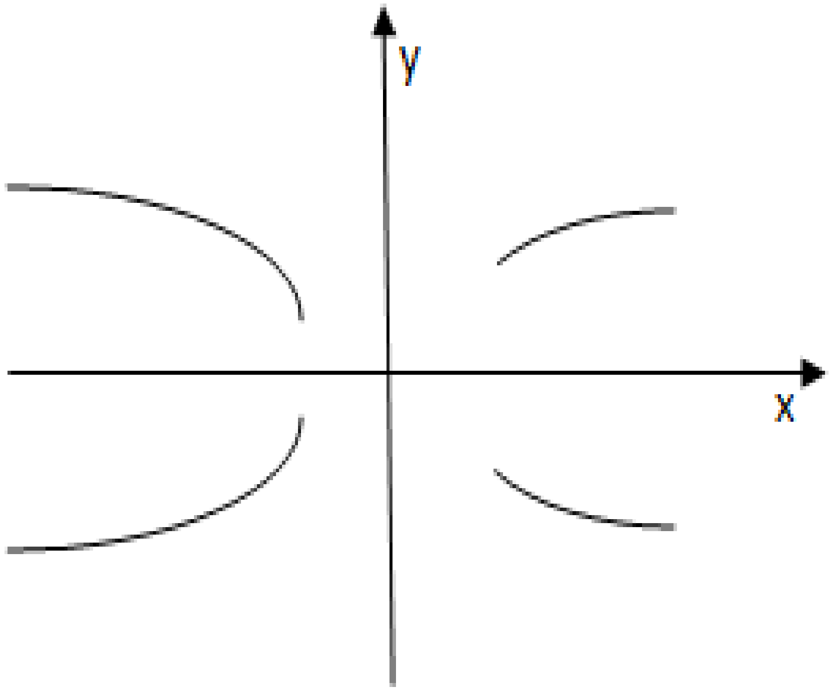
III.4 Asymptotes et branches infinies

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ alors on cherche $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ .Plusieurs cas se présentent :

1er cas : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$; on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique dans la direction l'axe des ordonnées. La courbe (C_f) prend l'une des 4 formes suivantes :

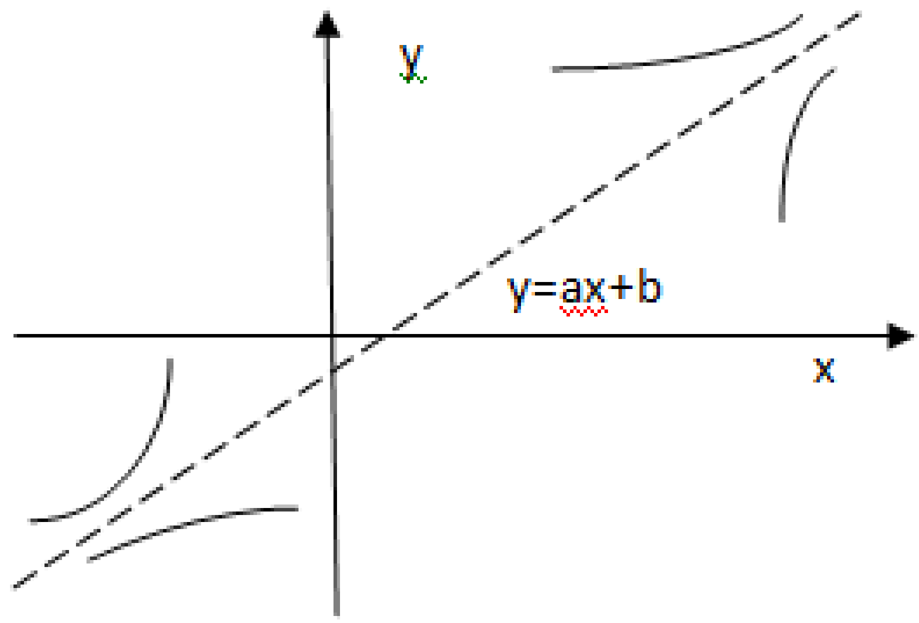


2ième cas : $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique dans la direction l'axe des abscisses. La courbe (C_f) prend l'une des 4 formes suivantes :

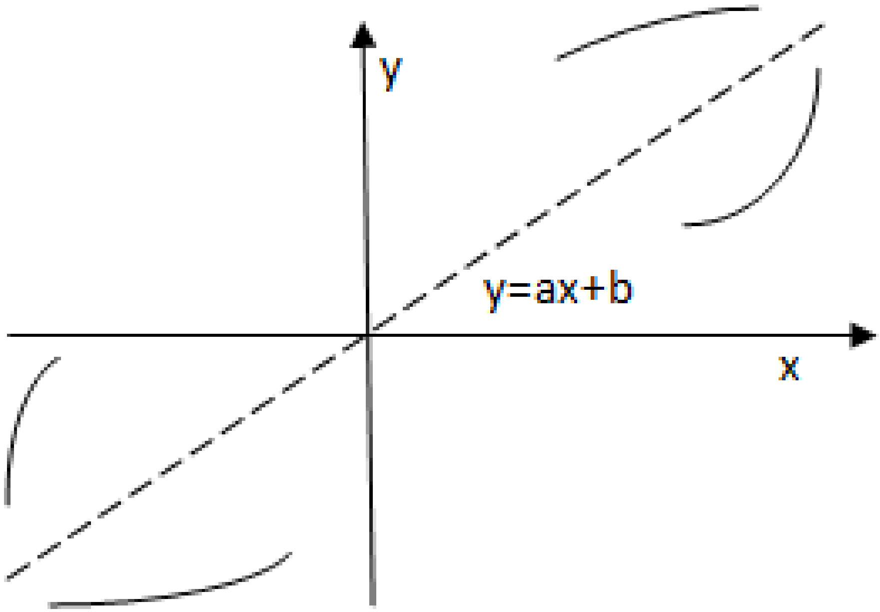


3ième cas : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = a \in IR^*$; Dans ce cas on cherche $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)$

- ✓ Si $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax) = b \in IR$,on dit que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = ax+b$ quand x $\to +\infty$ (ou quand x $\to -\infty$). La courbe (C_f) prend l'une des 4 formes suivantes :



✓ Si $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$,on dit que la courbe (C_f) admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = ax$. La courbe (C_f) prend l'une des 4 formes suivantes :



Continuité

Définition :

- Soit $x_0 \in D_f$. On dit que f est continue en x_0 lorsque : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- On dit que f est continue sur un intervalle $I \subset IR$ si f est définie et continue en tout point $x_0 \in I$.

Théorème :

Soient f et g deux fonctions définies et continues en x_0, alors :

- $f+g$ est continue en x_0
- $f \times g$ est continue en x_0
- $\forall \alpha \in IR$, (αf) est continue en x_0
- Si $g(x_0) \# 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Corollaire :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I, alors :

- $f+g$ est continue sur I
- $f \times g$ est continue sur I
- $\forall \alpha \in IR$, (αf) est continue sur I
- Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I

Théorème :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telle que : $\forall x \in I, f(x) \in J$

Soit $x_0 \in I$, on suppose que :

- f est continue en x_0
- g est continue en $f(x_0)$

Alors $g \circ f$ est continue en x_0

De même , si on suppose que :

- f est continue en I
- g est continue en J

Alors g°f est continue sur J

Continuité à gauche et à droite

Définitions :

Soit $x_0 \in D_f$. on dit que f est continue à droite en x_0 lorsque : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

On dit que f est continue à gauche en x_0 lorsque : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Théorème :

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow$ f est continue à droite et à gauche

Prolongement par continuité

Soit $f : IR \rightarrow IR$ et soit $x_0 \notin D_f$

Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in IR$ et Posons $\dot{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in D_f \\ l \text{ si } x = x_0 \end{cases}$

alors la fonction $\dot{f}$ continue en x_0 , est appelée prolongement par continuité de f au point x_0.

Remarque :

On peut prolonger f par continuité à droite (ou à gauche) en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$)

existe et est finie.

Théorème (valeurs intermédiaires)

Soit f continue sur [a,b], alors pour tout y_0 compris entre f(a) et f(b), il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que :

$f(x_0) = y_0$.

Corollaire :

Si f est continue sur [a,b] et si $f(a)\times f(b)<0$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(c) = 0$.

Dérivation

Soit f une fonction et soit en $x_0 \in D_f$.

- on dit que f est dérivable en x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie, on note alors $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- on dit que f est dérivable à droite en x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie, on note alors $f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- on dit que f est dérivable à gauche en x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie, on note alors $f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Théorème :

f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow$ f est dérivable à droite et à gauche

Théorème :

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Propriétés :

Si f une fonction dérivable en $x_{0,}$ alors $f'(x_0)$ désigne la pente (le coefficient directeur) de la tangente à C_f au point $M(x_0, f(x_0))$.

L'équation de la tangente à à C_f au point $M(x_0, f(x_0))$ peut être déterminée à l'aide de la dérivée par :

$$y = f'(x_0)\,(x-x_0) + f(x0).$$

Cas particuliers

- Si $f'(x_0) = 0$, alors C_f admet une tangente horizontale au point $M(x_0, f(x_0))$.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$, alors C_f admet une tangente verticale au point $M(x_0, f(x_0))$.

Opérations sur les dérivées :

Théorème :

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Alors :

- $(f+g)$ est une fonction dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- fg est une fonction dérivable en x_0 et $\mathbf{(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)}$.
- $\forall \alpha \in IR$, αf est une fonction dérivable en x_0 et $\mathbf{(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)}$.
- **Si** $f'(x_0) \neq 0$ alors $(\frac{1}{f})'$ est dérivable en x_0 et on a : $(\frac{1}{f})'(x_0) = \dfrac{-f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$
- **Si** $g'(x_0) \neq 0$ alors $(\frac{f}{g})'$ est dérivable en x_0 et $(\frac{f}{g})'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

- Si f est une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$, alors $g^\circ f$ est dérivable en x_0 et $\mathbf{(g^\circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(f(x_0))}$

Tableau des dérivées usuelles

Fonction	Fonction dérivée	Domaine de définition
x^n ($n \in IN^*$)	$n\,x^{n-1}$	IR
$k \in IR$	0	IR
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	IR*
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	IR*
Ln(x)	$\frac{1}{x}$	IR*+
e^x	e^x	IR
$x^{\alpha} = e^{\alpha \ln(x)}$ $\alpha \in IR^*$	$\alpha\, x^{\alpha-1}$	IR*+
$e^{u(x)}$	$u'(x)\, e^{u(x)}$	D_u
ln(u(x))	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\{x \in D_u / u(x) > 0\}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\{x \in D_u / u(x) > 0\}$
$u(x)^{\alpha} = e^{\alpha \ln(x)}$ $\alpha \in IR^*$	$\alpha\, u'(x)\, u(x)^{\alpha-1}$	$\{x \in D_u / u(x) > 0\}$

Théorème de Rolle :

Soit f :[a,b]$\rightarrow$IR continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[et vérifie f(a)=f(b),

alors il existe c $\in$]a,b[/ f'(c) = 0.

Théorème des Accroissements finies :

Soit f :[a,b]$\rightarrow$IR continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[,

Alors il existe c $\in$]a,b[/ $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Applications à l'étude de variations

Théorème :

Soit f : I $\rightarrow$ IR une fonction dérivable sur I de IR, alors :

- f croissante sur I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \ \forall\, x \in I$
- f décroissante sur I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0 \ \forall\, x \in I$
- f constante sur I $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0 \ \forall\, x \in I$

Convexité, concavité, point d'inflexion

Soit f une fonction définie sur I

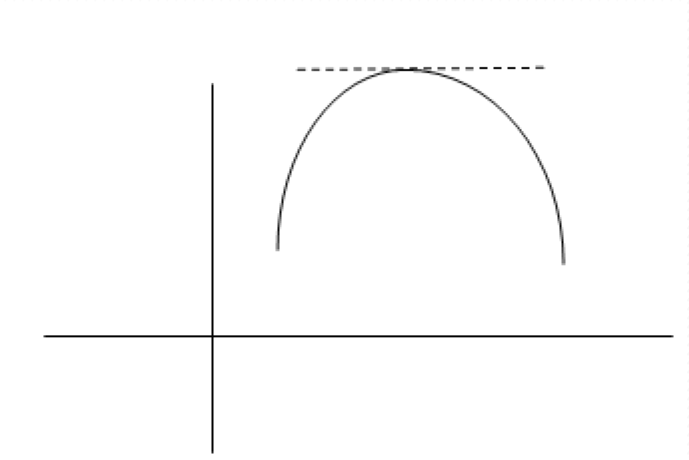
On dit que f est **convexe** sur I lorsque :

$$\forall\ (x,y) \in I^2\ ,\ \forall\ \lambda \in [0,1] : f(\lambda\ x + (1 - \lambda)\ y) \leq \lambda\ f(x) + (1 - \lambda)\ f(y).$$

On dit que f est **concave** sur I lorsque (-f) est convexe sur I

Propriété :

Si f est une fonction convexe sur I, alors la courbe C_f est au-dessous de chacune de ses tangentes en tout point de I.



Proposition :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I

f est convexe sur I $\Leftrightarrow \forall\ x \in I,\ f''(x) \geq 0$

f est concave sur I $\Leftrightarrow \forall\ x \in I,\ f''(x) \leq 0$

Point d'inflexion :

Définition :

On appelle point d'inflexion de f (ou de C_f) un point où la courbe change de concavité.

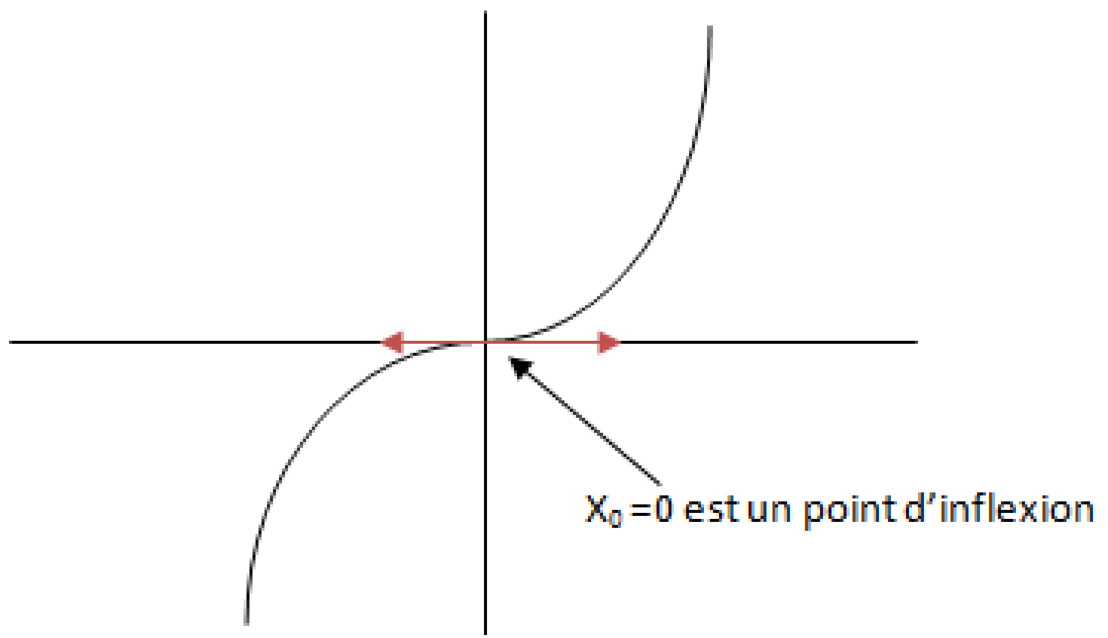
Théorème :

Soit f deux fois dérivable en x_0, alors f admet un point d'inflexion en x_0 si f'' s'annule, en changeant de signe, en x_0.

Exemple :

La fonction $f(x) = x^3$. $f''(x) = 6x$

Au point $x_0=0$ $f''(0) = 0$ en changeant de signe ; donc 0 est un point d'inflexion de C_f.



Logarithme Népérien

Soit $f :]0,+\infty[\to IR$

$x \mapsto \ln(x)$

$f(x) = \ln(x)$ est appelée la fonction logarithme Népérien

- $D_f =]0,+\infty[$
- $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

Propriétés

- $\forall$ a,b$\in$ IR* tel que: $a\times b > 0$ alors : $\ln(ab) = \ln(|a|) + \ln(|b|)$

  $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(|a|) - \ln(|b|)$

- $\forall a > 0$, $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$
- $\forall a > 0$, $\forall n \in IN$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- Sur tout intervalle I où u est dérivable et ne s'annule pas, on a :

  $Ln(|u(x)|) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

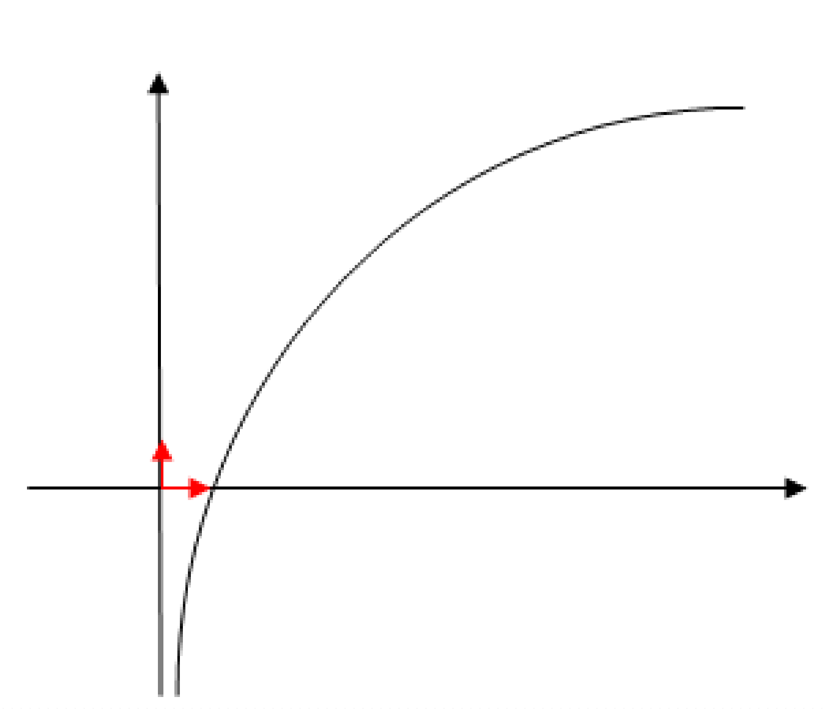
Limites remarquables

- ✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- ✓ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$, $\forall$ n > 0
- ✓ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$
- ✓ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- ✓ $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$

Tableau de variations

x	0	$+\infty$
Ln(x)'	+	
Ln(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

La courbe de C_{ln}



Fonction exponentielle

Soit $f : IR \to]0,+\infty[$

$x \mapsto \exp(x)$

$f(x) = \text{lexp}(x)$ est appelée la fonction exponentielle

- $D_f = IR$
- $\exp'(x) = \exp(x)$
- $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$
- $\ln(\exp(x)) = x \ \forall\, x \in IR$
- $\exp(\ln(x)) = x \ \forall\, x > 0$

Propriétés :

- $\forall\, a,b \in IR$: $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \ \forall\, a \in IR$
- $\forall\, a,b \in IR \ \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $\forall\, a > 0$, $\forall\, n \in IN$, $\exp(n\, a) = (\exp(a))^n$

Limites remarquables

- ✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x) = 0$

- ✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$, $\forall$ n > 0

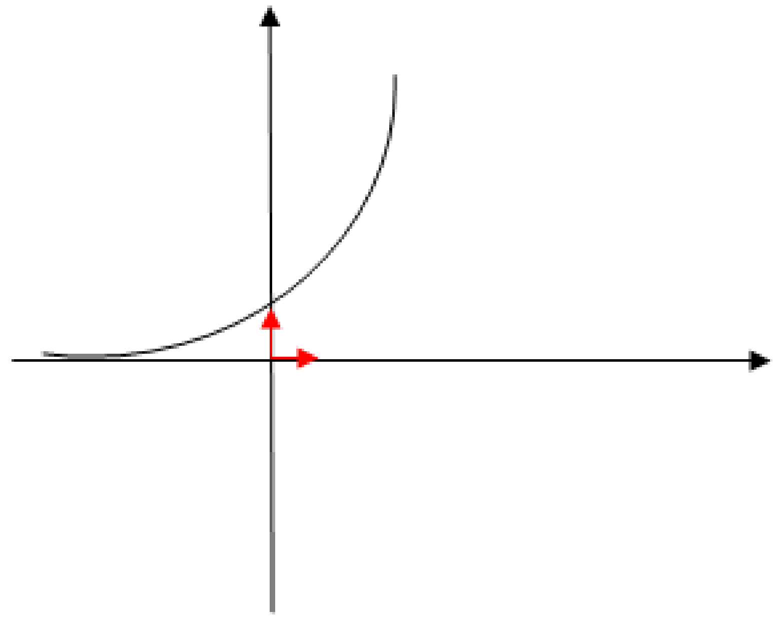
- ✓ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$

- ✓ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \exp(x) = 0$ $\forall$ n $\in$ IN*

Tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
exp(x)' = exp(x)	+	
exp(x)	0 $\nearrow$	$+\infty$

La courbe de C_{exp}



Logarithme de base a ($a>0,\ a\neq 1$)

Pour $a>0$, $a\neq 1$ on appelle logarithme de base a, l'application $\log_a :]0,+\infty[\to IR$ telle que :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \forall\ a>0$$

Cas particuliers :

- Logarithme décimal : $\log_{10}(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$
- Logarithme népérien : $\log_e(x) = \dfrac{\ln x}{\ln e} = \ln x$

Dérivée :

$$\forall\ x>0,\ \log_a'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Exponentielle de base a :

Pour $a>0$, $a\neq 1$ on appelle la fonction exponentielle de base a, comme étant : $f(x) = a^x$

$$f(x) = a^x = e^{x\ln a},\ \forall\ a>0$$

Remarque :

Pour $a>0$, $a \neq 1$, la fonction $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$ est la réciproque de la fonction $f^{-1}(x) = \log_a(x)$