Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Filière : Tronc commun MIP

Module : M135

==

ANALYSE 3 :
Fonctions de plusieurs variables
et calcul des intégrales multiples

==

Professeur : Sidi Mohamed DOUIRI

Année universitaire : 2021/2022

Table des matières

1 Notions Topologiques dans $\mathbb{R}^n$ **1**
1.1 L'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$ 1
1.1.1 Distances 1
1.1.2 Normes 2
1.2 Notions topologiques dans $\mathbb{R}^n$ 3
1.2.1 Boules ouvertes, boules fermées et parties bornées 3
1.2.2 Les ouverts et les fermés de $\mathbb{R}^n$ 5
1.2.3 Voisinages 6
1.2.4 Suites de $\mathbb{R}^n$ 6
1.2.5 Adhérence, Intérieur et Frontière d'une partie de $\mathbb{R}^n$ 7
1.2.6 Parties compacts de $\mathbb{R}^n$ 8
1.2.7 Parties convexes de $\mathbb{R}^n$ 8

2 Fonctions de plusieurs variables réelles **9**
2.1 Préliminaires 9
2.1.1 Fonctions numériques de plusieurs variables 9
2.1.2 Fonctions vectorielles de plusieurs variables 10
2.2 Limite et continuité 11
2.3 Calcul différentiel 15
2.3.1 Les dérivées partielles premières (ou d'ordre 1) 15
2.3.2 La différentiabilité 16
2.3.3 La relation entre la différentiabilité et les dérivées partielles premières 18
2.3.4 La différentiabilité d'une fonction composée 21
2.3.5 Théorème des accroissements finis (T.A.F) 23
2.3.6 Dérivées partielles d'ordre supérieur 24
2.3.7 La matrice Hessienne 26
2.3.8 Formule de Taylor 27
2.4 Extrema 29
2.4.1 Condition nécessaire d'existence d'un extremum 29
2.4.2 Condition suffisante d'existence d'un extremum 30

2.5 Difféomorphismes et Théorème des fonctions implicites 31
2.5.1 Difféomorphismes 31
2.5.2 Théorème des fonctions implicites 32

3 Calculs des intégrales doubles et triples 34
3.1 Intégrales doubles 35
3.1.1 Intégration sur un rectangle de $\mathbb{R}^2$ 35
3.1.2 Calcul des intégrales doubles sur un rectangle 36
3.1.3 Intégration sur une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ 37
3.1.4 Intégrale double et changement de variables 38
3.2 Intégrales triples 39
3.2.1 Théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^3$ 39
3.2.2 Changement de variables dans $\mathbb{R}^3$ 40

Chapitre 1

Notions Topologiques dans $\mathbb{R}^n$

1.1 L'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ est l'espace produit de n ensembles identiques à $\mathbb{R}$, i.e

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}, \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Un élément x de $\mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où les x_i sont des réels. L'espace $\mathbb{R}^n$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il suffit de poser pour tout couple $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \alpha\, x = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \ldots, \alpha\, x_n).$$

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie ($\dim \mathbb{R}^n = n$) dont $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique où $e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ et $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

1.1.1 Distances

Définition 1.1.1. *Soit E un ensemble quelconque. On appelle distance (ou métrique) sur E toute application d définie de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $\forall (x, y) \in E \times E, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(Séparation) ;*

ii) $\forall (x, y) \in E \times E, \quad d(x, y) = d(y, x)$ *(Symétrie) ;*

iii) $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Inégalité triangulaire).*

L'ensemble E muni de cette distance est appelé espace métrique noté (E, d).

Exemples 1.1.2.

1. L'application définie par $d(x, y) = |x - y|$ est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. L'application définie par $d(x, y = |x - y| + |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ est une distance sur $\mathbb{R}^*$.
3. L'application définie sur $E \times E$ par $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y\,; \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$ est une distance sur E appelée la distance discrète et (E, d) est un espace métrique discret.

1.1.2 Normes

Définition 1.1.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \iff x = 0$ *(Séparation) ;*

ii) $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda\, x) = |\lambda|\, N(x)$ *(Condition d'homogéneité) ;*

iii) $\forall (x, y) \in E \times E, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ *(Inégalité triangulaire).*

$N(x)$ la norme de x est souvent notée $\|x\|_E$ ou $\|x\|$. L'espace E muni de cette norme est appelé espace vectoriel normé (e.v.n). On le note $(E, \|\ \|)$.

Exemples 1.1.4.

1. La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.
2. On peut munir l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ par les normes usuelles $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ en posant pour chaque élément $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \\ \|x\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} && \text{(Norme euclidienne);} \\ \|x\|_\infty &= \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i| && \text{(Norme sup ou infini).} \end{aligned}$$

3. Généralement pour $1 \leq p < +\infty$, on définit les normes de Minkowski sur $\mathbb{R}^n$ par

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice. Vérifier que les applications précédentes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.1.5.

1. Tout espace vectoriel normé $(E, || \ ||)$ est un espace métrique dont la distance est définie par $d(x,y) = ||x-y||$. Cette distance est appelée distance associée à la norme $|| \ ||$ et on a $||x|| = d(x,0)$ pour tout $x \in E$.
2. On peut trouver des espaces métriques dont la distance n'est associée à aucune norme.

Proposition 1.1.6. Soit $(E, || \ ||)$ un espace vectoriel normé.

- $\forall x \in E, \quad ||x|| \geq 0$ et $||-x|| = ||x||$.
- $\forall x_1, \ldots, x_p \in E, \quad \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad ||\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, x_i|| \leq \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \, ||x_i||$.
- $\forall x, y \in E, \qquad | \, ||x|| - ||y|| \, | \leq ||x-y||$.

Preuve. "Exercice".

Définition 1.1.7. *Deux normes N_1 et N_2, définies sur un même espace vectoriel normé E, sont dites équivalentes s'ils existent deux réels strictement positifs α et β tels que*

$$\alpha \, N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta \, N_1(x), \qquad \forall x \in E.$$

On écrit alors $N_1 \sim N_2$.

Exercice. Montrer que les trois normes usuelles $|| \ ||_1$, $|| \ ||_2$ et $|| \ ||_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Remarque 1.1.8. Généralement, dans un espace vectoriel normé de dimension finie (en particulier dans $\mathbb{R}^n$) toutes les normes sont équivalentes.

1.2 Notions topologiques dans $\mathbb{R}^n$

1.2.1 Boules ouvertes, boules fermées et parties bornées

Définitions 1.2.1. *Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.*

1. *La partie $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||x-a|| = r\}$ est appelée* ***sphère de centre*** *a* ***et de rayon*** *r.*
2. *On appelle* ***boule ouverte de centre*** *a* ***et de rayon*** *r la partie de $\mathbb{R}^n$ notée $B(a,r)$ (ou $B_{|| \ ||}(a,r)$ pour montrer la norme utilisée) et définie par*
$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||x-a|| < r\}.$$
3. *On appelle* ***boule fermée de centre*** *a* ***et de rayon*** *r la partie de $\mathbb{R}^n$ notée $B'(a,r)$ (ou $B_f(a,r)$ ou $B'_{|| \ ||}(a,r)$) et définie par*
$$B'(a,r) = B_f(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||x-a|| \leq r\}.$$

Remarques 1.2.2.

1. Dans le cas où $a = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $r = 1$, on parle des boules et sphères **unitées**.
2. Les boules (resp. sphères) ont des formes géométriques différentes selon les normes utilisées.

Exemples 1.2.3.

⋆ Dans $(\mathbb{R}^2, || \ ||_1)$:

$$S_{|| \ ||_1}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ ||(x,y)||_1 = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x|+|y| = 1\}$$

$$\text{et } B_{|| \ ||_1}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ ||(x,y)||_1 < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x|+|y| < 1\}.$$

⋆ Dans $(\mathbb{R}^2, || \ ||_2)$:

$$S_{|| \ ||_2}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ ||(x,y)||_2 = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{x^2+y^2} = 1\}$$

$$\text{et } B_{|| \ ||_2}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ ||(x,y)||_2 < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{x^2+y^2} < 1\}.$$

⋆ Dans $(\mathbb{R}^2, || \ ||_\infty)$:

$$S_{|| \ ||_\infty}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ ||(x,y)||_\infty = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \max(|x|,|y|) = 1\}$$

$$\text{et } B_{|| \ ||_\infty}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ ||(x,y)||_\infty < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \max(|x|,|y|) < 1\}.$$

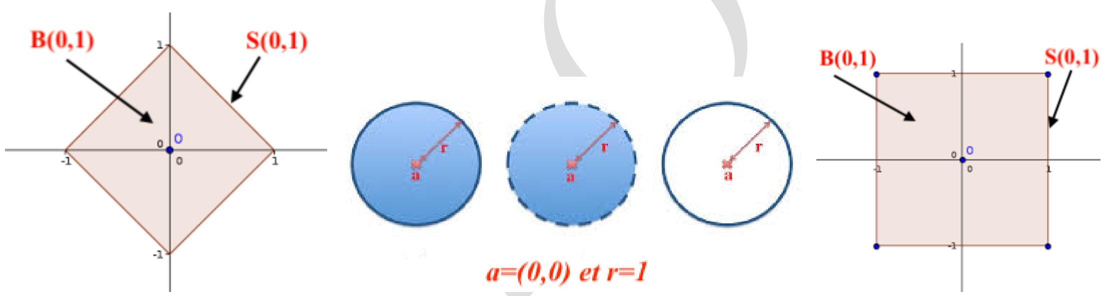
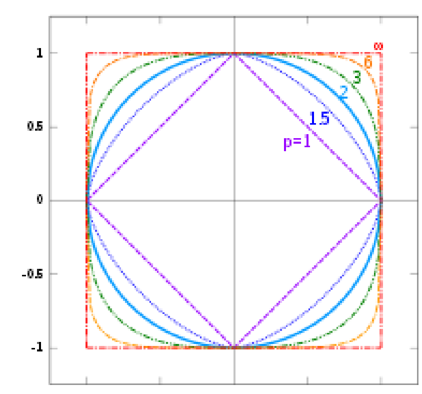


FIGURE 1.1 – Sphères et Boules unités pour les normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ respectivement

⋆ Dans $(\mathbb{R}^2, || \ ||_p)$ avec $1 \leq p < +\infty$:

$$S_{|| \ ||_p}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ ||(x,y)||_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} = 1\}$$

$$\text{et } B_{|| \ ||_p}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y)||_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} < 1\}.$$



Définition et propriété 1.2.4. *Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite **bornée** si elle est inclue dans une boule (ouverte ou fermée). Dans ce cas, le diamètre de A est fini, où le diamètre est défini par*

$$diam A = \sup\{d(a,b) : (a,b) \in A \times A\} < \infty.$$

Autrement dit, A et bornée dans $\mathbb{R}^n$ si, et seulement s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$ on a $\|x\| \leq M$.

1.2.2 Les ouverts et les fermés de $\mathbb{R}^n$

Définitions 1.2.5.

1. *On dit qu'une partie θ de $\mathbb{R}^n$ est ouverte si elle est vide ou si pour tout $a \in \theta$, il existe une boule ouverte de centre a contenue dans θ.*
   C'est-à-dire, θ est un ouvert si, et seulement si, $\theta = \emptyset$ ou $\forall a \in \theta, \exists r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \theta$.
2. *On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}^n$ est fermée si son complémentaire $\complement_{\mathbb{R}^n}^F$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.*

Remarques 1.2.6.

1. Généralement, les définitions précédentes restent les mêmes dans n'importe quel espace vectoriel normé E.
2. Les notions d'ouvert et de fermé dans $\mathbb{R}^n$ sont indépendantes de la norme choisi car toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Exemples 1.2.7.

1. Les boules ouvertes (resp. fermées) de $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts (resp. fermés) dans $\mathbb{R}^n$.
2. Toute partie finie (contient un nombre fini d'éléments) de $\mathbb{R}^n$ est fermée.
3. $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont à la fois ouverts et fermés.

Proposition 1.2.8.

i) Toute union (finie ou infinie) d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert.

ii) Toute intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert.

iii) Toute union finie de fermés de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.

iv) Toute intersection (finie ou infinie) de fermés de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.

Preuve. "Faite au cours"

Exercice. Donner des contre-exemples pour expliquer pourquoi on ne peut pas généraliser les résultats *ii)* et *iii)* à des ensembles d'indices quelconques.

1.2.3 Voisinages

Définition 1.2.9. *On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}^n$ est un voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ si V contient une boule de centre a. On note par $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.*
Autrement dit, $V \in \mathcal{V}(a)$ si, et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$.

Exemple 1.2.10. Pour $r > 0$, la boule fermée $B'(a, r)$ est un voisinage de a.

Proposition 1.2.11. Soit $a \in \mathbb{R}^n$.

i) Si $V \in \mathcal{V}(a)$ alors $a \in V$.

ii) Toute intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.

iii) Si $V \in \mathcal{V}(a)$ et $V \subset W$ alors $W \in \mathcal{V}(a)$.

Preuve. "Exercice".

Remarque 1.2.12. Dans un espace vectoriel normé E, deux normes équivalentes N_1 et N_2 définissent la même topologie, c'est-à-dire, les ouverts de (E, N_1) sont des ouverts de (E, N_2) et réciproquement. Il en est donc de même pour les fermés et les voisinages.

1.2.4 Suites de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.2.13. ***"La convergence dans** $\mathbb{R}^n$**"***
Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, $x_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On dit que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}^n$ si $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - l\| = 0$, ce qui signifie que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N \text{ on a } \|x_k - l\| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, la limite l est unique et on note $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = l$ ou $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} l$.

Remarque 1.2.14. Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{R}^n$, alors pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, la suite $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est appelée une sous-suite (ou suite extraite ou suite partielle) de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.2.15. ***"Suites de Cauchy dans** $\mathbb{R}^n$**"***
On dit qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que } \forall p \geq N,\ \forall q \geq N \quad \text{on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.2.16. *Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$, avec $x_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ si, et seulement si, les n suites réelles $(x_1^k)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots$ et $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers $l_1, \ldots$ et l_n respectivement. On dit que la convergence dans $\mathbb{R}^n$ est équivalente à la convergence composante par composante.*

Preuve. "Faite au cours".

Remarques 1.2.17. Par le même principe, on peut généraliser des résultats connues pour les suites réelles au cas des suites dans $\mathbb{R}^n$, à savoir :

1. Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$, où $x_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, est de Cauchy si, et seulement si, les n suites réelles $(x_1^k)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots$ et $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont toutes de Cauchy.
2. Toute suite convergente de $\mathbb{R}^n$ est une suite de Cauchy. La réciproque n'est pas vérifiée sauf dans un espace complet, ce qui est le cas pour $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$.
3. Toute suite convergente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\|x_k\| \leq M, \ \forall k \in \mathbb{N}$. De plus $\| \lim\limits_{k\to\infty} x_k\| \leq M$.
4. **"Théorème de Bolzano-Weierstrass" :** De toute suite bornée de $\mathbb{R}^n$, on peut extraire une sous-suite qui converge.

1.2.5 Adhérence, Intérieur et Frontière d'une partie de $\mathbb{R}^n$

Définitions 1.2.18. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.*

1. *L'adhérence de A, notée $\overline{A}$ (ou $adh(A)$), est le plus petit ensemble fermé contenant A. D'après la Proposition 1.2.8, l'adhérence de A n'est autre que l'intersection de tous les fermés contenant A.*
2. *L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$ (ou $Int(A)$), est le plus grand ouvert contenu dans A. C'est la réunion de tous les ouverts contenus dans A.*
3. *La frontière de A, notée ∂A (ou $Fr(A)$), est l'ensemble des points adhérents à A qui ne sont pas des points intérieurs à A. C'est-à-dire,*

$$\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A} = \overline{A} \cap (\mathring{A})^c.$$

Remarques 1.2.19. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.

- $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$;
- A est fermé si, et seulement si, $\overline{A} = A$;
- A est ouvert si, et seulement si, $\mathring{A} = A$;
- $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

Proposition 1.2.20. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.

i) $x \in \mathring{A}$ si, et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$.

ii) $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

iii) $x \in \overline{A}$ si, et seulement s'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

iv) A est fermé si, et seulement si, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x on a $x \in A$.

Preuve. "Faite au cours".

1.2.6 Parties compacts de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.2.21. *Une partie K de $\mathbb{R}^n$ est dite **compacte** si elle est fermée et bornée.*

Exemples 1.2.22.
1. Les boules fermées, les sphères et les parties finies sont des compactes de $\mathbb{R}^n$.
2. La boule $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \backslash \|x-a\| < r\}$ n'est pas compacte car c'est une partie non fermée et l'ensemble $U = \{x \in \mathbb{R}^n \backslash \|x-a\| \geq r\}$ n'est pas compacte car c'est une partie non bornée.

Théorème 1.2.23. ***"Bolzano-Weierstrass"***
Soit K une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) *K est compact ;*

ii) *De toute suite de K, on peut extraire une sous-suite convergente dans K.*

Preuve. Il suffit d'appliquer à la fois les $4^{\text{ème}}$ assertions de la Remarque 1.2.17 et la Proposition 1.2.20.

1.2.7 Parties convexes de $\mathbb{R}^n$

Définitions 1.2.24.

1. *Soient a et b deux points de $\mathbb{R}^n$. On appelle **segment** de $\mathbb{R}^n$ d'extrémités a et b, l'ensemble noté $[a,b]$ et défini par*

$$[a,b] = \{(1-t)\,a + t\,b \;/\; t \in [0,1]\} = \{a + t\,(b-a) \;/\; t \in [0,1]\}.$$

2. *Une partie C de $\mathbb{R}^n$ est dite convexe si pour tous points a et b de C on a le segment $[a,b]$ est inclue dans C. Autrement dit,*

$$\forall a,b \in C,\ \forall t \in [0,1],\ \text{on a} \quad a + t\,(b-a) \in C.$$

Exemple 1.2.25. Toute boule (ouverte ou fermée) de $\mathbb{R}^n$ est convexe.

Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables réelles

2.1 Préliminaires

2.1.1 Fonctions numériques de plusieurs variables

Définitions 2.1.1.

1. *Une fonction numérique de n variables réelles est une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On écrit*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

2. *L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé domaine de définition de la fonction f.*
3. *L'ensemble $f(\mathcal{D}) = \{f(x)/\ x \in \mathcal{D}\} \subset \mathbb{R}$ est appelé l'image de $\mathcal{D}$ par f.*
4. *Si $A \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(A) = \{x \in \mathcal{D}\ /\ f(x) \in A\} \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est appelé l'image réciproque de A par f.*
5. *Pour tout réel α, on appelle courbe de niveau α de la fonction f, l'ensemble C_α des points de $\mathcal{D}$ dont l'image par f vaut α, c'est-à-dire,*

$$C_\alpha = \{x \in \mathcal{D}\ /\ f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\}) \subset \mathbb{R}^n.$$

6. *L'ensemble $G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\ /\ x \in \mathcal{D}\}$ est appelé le graphe de la fonction f sur $\mathcal{D}$. C'est une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Exemples 2.1.2.

1.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\ ; \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}. \end{array} \qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}.$$

2. Le graphe G_g de la fonction g, définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = x^2 + y^2, \end{array}$$
est représenté dans l'espace à 3 dimensions à la figure 2.1

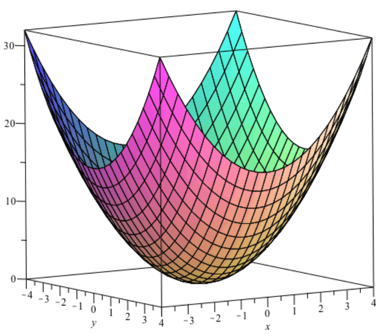


FIGURE 2.1 – Graphe de la fonction $g(x,y) = x^2 + y^2$

3. Le graphe G_h de la fonction h, définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & h(x,y) = x^2 - y^2, \end{array}$$
est représenté dans l'espace à 3 dimensions à la figure 2.2

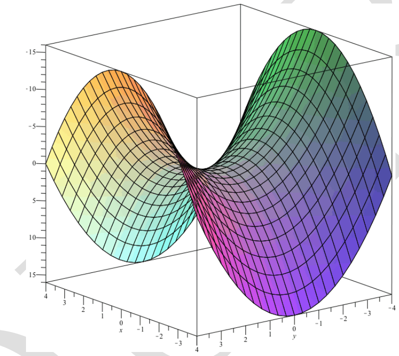


FIGURE 2.2 – Graphe de la fonction $h(x,y) = x^2 - y^2$

2.1.2 Fonctions vectorielles de plusieurs variables

Définition 2.1.3. *Une fonction vectorielle de n variables réelles est une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ par p fonctions numériques $f_1, \dots, f_p$ définies sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est-à-dire,*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)), \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rccl} f_j: & \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f_j(x), \end{array} \qquad \forall j \in \{1, \dots, p\}.$$

Exemple 2.1.4. On pose $\Delta = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z \in \mathbb{R}\}$, c'est exactement l'axe (Oz). Soit la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 \backslash \Delta & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & X = (x,y,z) & \longmapsto & f(X) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \end{array}$$

L'image par f de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ privée de ses deux pôles qui appartiennent à Δ est le cylindre d'axe Δ et de base le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

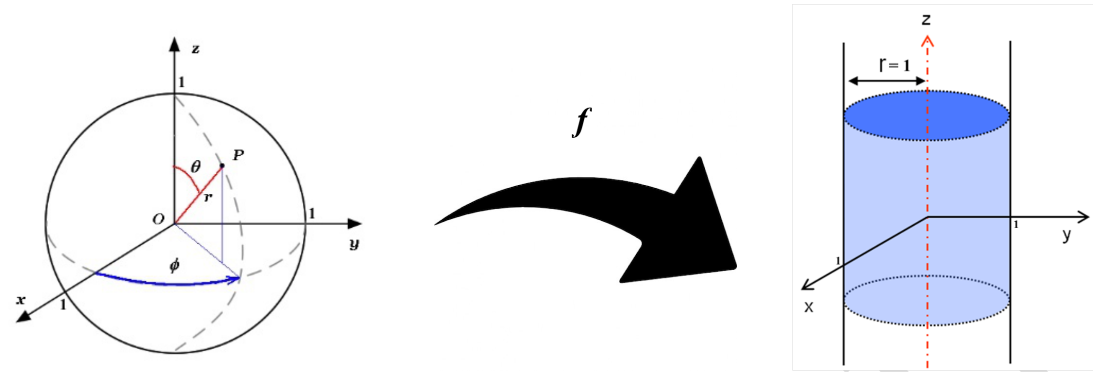


FIGURE 2.3 – La fonction vectorielle f transforme une sphère bornée à un cylindre non borné

2.2 Limite et continuité

Définitions 2.2.1. *Soit f une fonction numérique de n variables réelles définie au voisinage d'un point $a = (a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, sauf peut-être en a.*

1. *On dit que la fonction f admet $l \in \mathbb{R}$ pour* ***limite au point*** *a et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \|x - a\| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

2. *On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) au point a si*

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \|x - a\| < \eta \Longrightarrow f(x) > A \quad (\text{resp. } f(x) < -A).$$

Exemples 2.2.2.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$. On a $\lim\limits_{(x,y) \to (-1,1)} f(x, y) = 0$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y) = -x^2 + \tan y$. On a $\lim\limits_{(x,y) \to (0, \frac{\pi}{2})} g(x, y) = +\infty$.

Proposition 2.2.3. Si une fonction numérique de n variables réelles admet une limite en un point a, alors cette limite est unique.

Preuve. "Faite au cours".

Remarque 2.2.4. La dernière proposition est souvent utile pour montrer que la limite n'existe pas.

Exemple 2.2.5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. On remarque que $\lim\limits_{t \to 0} f(t, t) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t \to 0} f(t, 2t) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{2t^2}{t^2+4t^2} = \frac{2}{5}$, alors f n'admet pas de limite au point $(0, 0)$.

Proposition 2.2.6. Soient $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de plusieurs variables et $l \in \mathbb{R}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$;

ii) Pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, d'éléments de $\mathcal{D}$, convergente vers a, la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$, converge vers l, c'est-à-dire, $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a \Longrightarrow f(x_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} l$.

Preuve. "Faite au cours".

Définition 2.2.7. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \end{array}$$

une fonction vectorielle de n variables réelles définie au voisinage d'un point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, sauf peut-être en a. Soit $l = (l_1, \ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$.
On dit que la fonction f admet $l \in \mathbb{R}^p$ pour ***limite au point*** *a et on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ \ \textit{tel que} \ \ \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \eta \Longrightarrow \|f(x) - l\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon.$$

Proposition 2.2.8. Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \end{array}$$

une fonction vectorielle de n variables réelles définie au voisinage d'un point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, sauf peut-être en a. Soit $l = (l_1, \ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$. Alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \ \text{ si, et seulement si, } \ \lim_{x\to a} f_j(x) = l_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, p\}.$$

Preuve. "Faite au cours".

Remarques 2.2.9.

1. L'étude de la limite d'une fonction vectorielle est équivalente à étudier les limites de ses fonctions composantes.
2. Les opérations algébriques sur limites des fonctions de plusieurs variables concernant la somme, la différence, le produit, le quotient et la composition sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions d'une seule variable réelle.

Définitions 2.2.10. *"Continuité ponctuelle"*

1. *Une fonction f définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{R}^p$) est dite* ***continue*** *au point a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. C'est-à-dire,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ \ \textit{tel que} \ \ \|x-a\|_{\mathbb{R}^n} < \eta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon \ \ (\textit{resp.}\ \|f(x)-f(a)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon).$$

2. *On dit que la fonction f est continue sur un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ si elle est continue en tout point de A.*

Exemples 2.2.11. "Exercice"

1. La fonction de projection $p_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(i = 1, \ldots, n)$, définie par $p_i(x) = p_i((x_1, \ldots, x_n)) = x_i$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.
2. La fonction norme $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(x) = \|x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.
3. Toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Remarques 2.2.12.

1. Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle définie par $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$. f est continue en $a \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, toutes les fonctions composantes f_j $(j = 1, \ldots, p)$ sont continues en a.
2. Les opérations algébriques sur les fonctions continues de plusieurs variables concernant somme, différence,produit, quotient et composition sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions d'une seule variable réelle.

Exemples 2.2.13.

★ Une fonction polynôme à plusieurs variables est continue sur $\mathbb{R}^n$. Par exemple, la fonction $f(x, y, z) = x^2y + xyz^3 + xz^2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

★ Une fonction rationnelle de plusieurs variables est continue en tout point où le dénominateur ne s'annule pas. Par exemple, la fonction $f(x, y, z, t) = \frac{x^2yz+y^2zt+xz^2t+xyt^2}{x^2+t^2}$ est continue sur $\mathcal{D}_f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x \neq 0 \ \text{ ou } \ t \neq 0\}$.

★ Les fonctions fabriquées à l'aide des fonctions usuelles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par composition et d'autres opérations algébriques sont continues sur leurs ensembles de définition. Par exemple, la fonction $f(x, y) = \frac{e^x \cos y + \sqrt{x^2+y^2}}{\ln(1+\frac{y}{x})}$ est continue sur $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \neq 0, \ y \neq 0 \ \text{ et } 1 + \frac{y}{x} > 0\}$.

Proposition 2.2.14. Une fonction $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ qui converge vers a, la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Preuve. C'est une conséquence de la Proposition 2.2.6.

Définition 2.2.15. *"Prolongement par continuité"*
Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}\backslash\{a\} \subset \mathbb{R}^n$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, on dit que f admet un prolongement par continuité définie par la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \ x \in \mathcal{D}\backslash\{a\} \ ; \\ l & si \ x = a. \end{cases}$$

Définition 2.2.16. *"Fonctions partielles"*
Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique et $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{D}$. pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on pose $\mathcal{D}_i = \{t \in \mathbb{R} \ / \ (a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \mathcal{D}\} \subset \mathbb{R}$. Les fonctions réelles $f_1, \ldots, f_n$ d'une seule variable définies par

$$\begin{array}{rccl} f_i : & \mathcal{D}_i & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f_i(t) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) \end{array}$$

*sont appelées **les fonctions partielles** de f en a.*

Proposition 2.2.17. Si $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{D}$ alors chaque fonction partielle f_i en a est continue en a_i.

Preuve. "Exercice".

Remarque 2.2.18. En général, la réciproque de la Proposition 2.2.17 est fausse. En effet, soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } \ (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } \ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Les fonctions partielles en $(0, 0)$ sont définies par $f_1(x) = f(x, 0)$ et $f_2(y) = f(0, y)$ et elles sont toutes les deux continues en $x = 0$ et $y = 0$ respectivement. Par contre, la fonction f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Définition 2.2.19. *"La continuité uniforme"*
*Une fonction $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite **uniformément continue** sur $\mathcal{D}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ \text{ tel que } \ \forall x, y \in \mathcal{D}, \ \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon.$$

Exemple 2.2.20. Toute fonction Lipschitzienne est uniformément continue. Notons que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite **Lipschitzienne de rapport** k s'il existe $k > 0$ telle que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 2.2.21. Toute fonction uniformément continue sur $\mathcal{D}$ est continue sur $\mathcal{D}$, mais la réciproque est généralement fausse.

Proposition 2.2.22. Soient E une partie **compacte** de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur E. Alors

- ***i)*** f est uniformément continue sur E. **"Théorème de Heine"**
- ***ii)*** f est bornée sur E, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in E$.
- ***iii)*** $f(E)$, l'image de f, est une partie compacte de $\mathbb{R}$.
- ***iv)*** La fonction f atteint ses bornes inférieure et supérieure, c'est-à-dire, il existe $a, \ b \in E$ tels que $\inf\limits_{x \in E} f(x) = f(a)$ et $\sup\limits_{x \in E} f(x) = f(b)$.

Preuve. "Faite au cours".

2.3 Calcul différentiel

Dans toute la suite de ce chapitre, U désignera un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Rappelons que pour une fonction réelle $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, on dit que f est dérivable en $a \in I$ et on note $f'(a)$ sa dérivée en a si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$.
On écrit

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t}.$$

2.3.1 Les dérivées partielles premières (ou d'ordre 1)

Soit f une fonction numérique définie sur U ($f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$). Soient $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ et X un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. On peut vérifier facilement que la fonction réelle de la variable réelle t définie par $\varphi(t) = f(a + t\,X)$ est bien définie sur un voisinage de 0.

Définitions 2.3.1.

★ *On dit que f admet une dérivée au point a suivant le vecteur X si la fonction φ est dérivable en 0. Lorsque $\varphi'(0)$ existe, on la note $\mathcal{D}_X f(a)$ et on a*

$$\mathcal{D}_X f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\,X)-f(a)}{t}.$$

★ *Si $\|X\| = 1$, c'est-à-dire, $X \in S(0_{\mathbb{R}^n}, 1)$, alors $\mathcal{D}_X f(a)$ est appelée* ***la dérivée directionnelle*** *de f en a suivant la direction X.*

★ *En particulier, si X est un vecteur unité dans la base canonique, c'est-à-dire, $X = e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} composante}, 0, \ldots, 0)$ alors $\mathcal{D}_{e_i} f(a)$ n'est autre que la dérivée en a_i de f_i la $i^{\text{ème}}$ fonction partielle de f en a. En effet,*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_{e_i} f(a) & = & \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+t\,e_i)-f(a)}{t} \\ & = & \lim\limits_{t\to 0} \frac{f((a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\ldots,a_n))-f((a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n))}{t} \\ & = & \lim\limits_{t\to 0} \frac{f_i(a_i+t)-f_i(a_i)}{t} \\ \mathcal{D}_{e_i} f(a) & = & f_i'(a_i). \end{array}$$

$\mathcal{D}_{e_i} f(a)$ est appelé ***la dérivée partielle première*** *(ou d'ordre 1) de f au point a par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable x_i. On la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\mathcal{D}_i f(a)$.*

Remarque 2.3.2. Pratiquement, le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ consiste à ne dériver l'expression de f que par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable x_i et considérer les autres variables comme des constantes.

Exemples 2.3.3. 1. Pour $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \ln(x^2+2y^2+3z^2) \end{array}$

on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{x^2+2y^2+3z^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{4y}{x^2+2y^2+3z^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{6z}{x^2+2y^2+3z^2}$, et en particulier $\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{2},3,0) = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{2},3,0) = \frac{3}{5}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(\sqrt{2},3,0) = 0$.

2.
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$;

— Pour $(x,y) = (0,0)$ on a $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$, donc f admet une dérivée partielle première en $(0,0)$ par rapport à la $1^{ère}$ variable et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$, donc f admet une dérivée partielle d'ordre 1 en $(0,0)$ par rapport à la $2^{ème}$ variable et on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Remarque 2.3.4. L'existence des dérivées partielles n'implique pas la continuité de la fonction. On peut prendre la dernière fonction comme un contre-exemple. Nous avons déjà vérifier que f n'est pas continue en $(0,0)$ mais elle admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

Définition 2.3.5. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variables. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U et on écrit $f \in \mathcal{C}^1(U)$ si f admet des dérivées partielles premières par rapport à toutes les variables en tout point de U et les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sont continues sur U.*

Exemples 2.3.6. 1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = \|x\|_2^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. En effet, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2\,x_i$ et donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

2. La fonction
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, mais elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

2.3.2 La différentiabilité

Définition 2.3.7. *"La différentiabilité d'une fonction numérique"*
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variables. On dit que f est

différentiable *en un point a de U s'il existe une forme linéaire v sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $a+h \in U$ on a*

$$f(a+h) = f(a) + v(h) + \|h\|\, \varepsilon(h) \qquad \textit{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Autrement dit : $\displaystyle \lim_{\substack{h \to 0 \\ a+h \in U}} \frac{f(a+h) - f(a) - v(h)}{\|h\|} = 0.$

Remarques 2.3.8.

1. On utilise aussi l'écriture $f(a+h) = f(a) + v(h) + \theta(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \frac{\theta(h)}{\|h\|} = 0$.
2. La forme linéaire v s'appelle **la différentielle** de f en a et se note $df(a)$ (ou $d_a f$ ou $f'(a)$) et on écrit $df(a)(h) = v(h)$.
3. Cette forme linéaire $df(a)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.
4. Si f est différentiable en tout point de U, on dit que f est différentiable sur U. Dans ce cas, la fonction notée df définie sur U par

$$\begin{aligned} df : \ U &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)' \\ x &\longmapsto df(x) \end{aligned}$$

   est appelée la fonction différentielle de f. Notons que $(\mathbb{R}^n)'$ désigne le dual de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, l'espace vectoriel $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.3.9. Si f est différentiable au point a de U alors $df(a)$ la différentielle de f en a est unique.

Preuve. "Faite au cours".

Exemples 2.3.10.

1. Toute fonction constante d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, $f(x) = \alpha \ \forall x \in U$, est différentiable sur U et on $df(x) = 0_{\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$ pour tout $x \in U$, ie, $df(x)(h) = 0 \ \ \forall h \in \mathbb{R}^n$.
2. Toute forme linéaire f sur $\mathbb{R}^n$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et on a $df(x) = f$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 2.3.11. La notion de la différentiabilité généralise celle de la dérivabilité, c'est-à-dire, pour toute fonction réelle d'une seule variable les deux notions sont équivalentes.

Définition 2.3.12. *"La différentiabilité d'une fonction vectorielle"*
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle de n variables à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. On dit que f est ***différentiable*** *en un point a de U s'il existe une application linéaire continue v de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $a+h \in U$ on a*

$$f(a+h) = f(a) + v(h) + \|h\|\, \varepsilon(h) \qquad \textit{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0_{\mathbb{R}^p}.$$

L'application linéaire continue $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ s'appelle ***la différentielle*** *de f en a et se note $df(a)$ (ou $d_a f$ ou $f'(a)$) et on écrit $df(a)(h) = v(h) \in \mathbb{R}^p$.*

Proposition 2.3.13. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle définie par $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$. f est différentiable en $a \in U$ si, et seulement si, chaque fonction composante f_j ($j \in \{1, \ldots, p\}$) est différentiable en a et on a

$$\begin{aligned} df(a) : \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ & h \longmapsto df(a)(h) = (df_1(a)(h), \ldots, df_p(a)(h)). \end{aligned}$$

Preuve. "Exercice".

Proposition 2.3.14. Soit f une fonction de plusieurs variables définie sur U. Si f est différentiable au point $a \in U$, alors f est continue en a.

Preuve. "Faite au cours".

Remarque 2.3.15. La réciproque de la Proposition 2.3.14 est fausse.

Proposition 2.3.16. L'ensemble des fonctions différentiables en $a \in U$ est un espace vectoriel. c'est-à-dire, si f et g sont deux fonctions différentiables en a, alors pour tout $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha\, f + \beta\, g$ est différentiable en a et on a

$$d(\alpha\, f + \beta\, g)(a) = \alpha\, df(a) + \beta\, dg(a).$$

Preuve. "Exercice".

2.3.3 La relation entre la différentiabilité et les dérivées partielles prem

Proposition 2.3.17. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variables. Si f est différentiable au point $a \in U$, alors f admet en a une dérivée suivant n'importe quel vecteur X non nul de $\mathbb{R}^n$ et on a

$$\mathcal{D}_X f(a) = df(a)(X)$$

Preuve. "Faite au cours".

Remarque 2.3.18. La réciproque de la Proposition 2.3.17 est fausse. On peut vérifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$

est un contre-exemple.

Théorème 2.3.19. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variables. Si f est différentiable en $a \in U$, alors elle admet au point a des dérivées partielles premières par rapport à toutes les variables et on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a)(e_i) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. De plus, on a

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i \qquad \forall h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve. "Faite au cours".

Remarques 2.3.20.

1. La réciproque du Théorème 2.3.19 n'est pas toujours vraie, c'est-à-dire, l'existence de toutes les dérivées partielles premières n'est pas suffisante pour démontrer la différentiabilité de la fonction en a. On peut donner comme un contre-exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
2. Si toutes les dérivées partielles premières existent et vue la linéarité de la fonction $h \longmapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i$, alors pour déduire la différentiabilité de f en a, il suffit de vérifier que l'application $\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par
$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i}{\|h\|},$$
tend vers 0 quand h tend vers 0.
3. En utilisant $\langle\ ,\ \rangle$ le symbole du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i$, on peut représenter la différentielle d'une fonction numérique $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en $a \in U$ sous la forme
$$df(a)(h) = \langle \text{grad} f(a), h\rangle = \langle \nabla f(a), h\rangle,$$
où $\text{grad} f(a) = \nabla f(a)$ appelé **le vecteur gradient** de f en a est défini par
$$\text{grad} f(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)_{1\leq i\leq n}.$$
4. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle définie par $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$. Si f est différentiable en $a \in U$, alors $df(a)(h) = (df_1(a)(h), \ldots, df_p(a)(h)) \in \mathbb{R}^p$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$. D'après le Théorème précédent 2.3.19, on a $df_i(a)(h) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).h_j$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. Donc on peut écrire $df(a)(h)$ comme le produit de la matrice, notée $\mathcal{J}_f(a) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et le vecteur h, c'est-à-dire, $df(a)(h) = \mathcal{J}_f(a).h$ où
$$\mathcal{J}_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \text{ et } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

La matrice $\mathcal{J}_f(a)$ est la matrice associée à l'application linéaire $df(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. On l'appelle **la matrice Jacobienne de f en** a. Dans le cas où $n = p$, le déterminant de la matrice Jacobienne est appelé **le Jacobien de f en** a.

Exemple 2.3.21. La fonction vectorielle $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, 2yz)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ car ses fonctions composantes sont différentiables sur $\mathbb{R}^3$ et sa matrice Jacobienne est donnée par

$$\mathcal{J}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x & -2\,y & 0 \\ 0 & 2\,z & 2\,y \end{pmatrix}.$$

Alors la différentielle de f en un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est l'application linéaire $df(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$df(x,y,z)(h,k,l) = \mathcal{J}_f(x,y,z) \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x & -2\,y & 0 \\ 0 & 2\,z & 2\,y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = (2xh - 2yk, 2zh + 2yl)^T.$$

En particulier, $df(0, 1, -1)(1, 1, 1) = (0, 0)$ et $df(0, 1, -1)(1, -2, 0) = (4, 4)$.

Proposition 2.3.22. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variables. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors f est différentiable sur U.

Preuve. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un point de l'ouvert U, alors il existe $r > 0$ tel que $a + B(0, r) \subset U$. Soit $h = (h_1, \ldots, h_n) \in B(0, r)$, pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$ et en utilisant la norme $\| \ \|_1$, le point $b_i = a + (h_1, \ldots, h_i, 0, \ldots, 0) \in B(a, r)$. On a

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(b_n) - f(b_0) \qquad \text{avec } b_0 = a \\ &= f(b_n) - f(b_{n-1}) + f(b_{n-1}) - f(b_{n-2}) + \cdots - f(b_1) + f(b_1) - f(b_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(b_i) - f(b_{i-1})). \end{aligned}$$

En utilisant la fonction partielle de f au point b_i définie par

$$f_i : t \longmapsto f(a_1 + h_1, \ldots, a_{i-1} + h_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

et en appliquant le théorème des accroissements finis à cette fonction, on aura

$$\begin{aligned} f(b_i) - f(b_{i-1}) &= f_i(a_i + h_i) - f_i(a_i) \\ &= h_i\, f_i'(c_i) \\ &= h_i\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i), \end{aligned}$$

où $c_i = (a_1 + h_1, \ldots, a_{i-1} + h_{i-1}, a_i + \theta_i\, h_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ avec $\theta_i \in]0, 1[$. Alors

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i).$$

Par conséquence,

$$\begin{aligned}\left|f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^{n}h_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}h_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)\right| \\ &\leq \|h\|\max_{1\leq i\leq n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right|.\end{aligned}$$

Or, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue sur U, ce qui implique que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\xrightarrow[c_i\to a]{}0,\quad \forall i\in\{1,\dots,n\}$, ce qui est vérifié lorsque h tend vers 0. D'où

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i}{\|h\|}=0,$$

ce qui signifie la différentiabilité de f en a. □

Remarques 2.3.23.

1. Si f n'est pas différentiable alors elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ même si elle admet des dérivées partielles. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$ n'est pas différentiable en $(0,0)$ et elle admet les dérivées partielles en $(0,0)$ alors l'une de ces dérivées partielles au moins n'est pas continue en $(0,0)$.
2. La réciproque de la Proposition 2.3.22 est fausse. La différentiabilité entraîne l'existence de toutes les dérivées partielles premières d'après le Théorème 2.3.19, mais elle n'assure pas leur continuité. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\begin{cases}y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y\neq 0,\\ 0 & \text{sinon},\end{cases}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2.3.4 La différentiabilité d'une fonction composée

Lemme 2.3.24. Soit v une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Alors il existe $M>0$ tel que

$$\|v(x)\|\leq M\,\|x\|,\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Preuve. Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ la matrice associée à v par rapport aux bases canoniques. Pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et si on pose $v(x)=(y_1,\dots,y_p)$ alors $y_j=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}x_i,\ \forall j\in\{1,\dots,p\}$. En utilisant la norme euclidienne $\|\ \|_2$, on obtient

$$\begin{aligned}\|v(x)\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{p}y_j^2=\sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i)^2\\ &\leq \sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2)(\sum_{i=1}^{n}x_i^2) \qquad \text{(d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}\\ &\leq (\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2)(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)\\ &\leq M^2\,\|x\|_2^2 \qquad \text{avec}\quad M=(\sum_{i,j}a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Théorème 2.3.25. *Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$. Soit $f : U \longrightarrow V$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^q$ deux fonctions différentiable en $a \in U$ et $b = f(a) \in V$ respectivement. Alors, la fonction composée $g \circ f$ est différentiable en a et on a*

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

qu'on peut traduire en écriture matricielle

$$\mathcal{J}_{g\circ f}(a) = \mathcal{J}_g(f(a)).\mathcal{J}_f(a).$$

Preuve. f et g sont différentiables en a et $b = f(a)$ respectivement, alors

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h) \quad \text{et} \quad g(b+k) = g(b) + dg(b)(k) + \|k\|\varepsilon_2(k)$$

avec $df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $dg(b) : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ sont des applications linéaires continues et $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = \lim\limits_{k\to 0} \varepsilon_2(k) = 0$. Pour la fonction composée $g \circ f$, on a

$$g \circ f(a+h) = g(f(a+h)) = g(f(a) + df(a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)).$$

En remplaçant $f(a)$ par b et $df(a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)$ par k, on obtient

$$\begin{aligned} g \circ f(a+h) = &\ g(b+k) = g(b) + dg(b)(k) + \|k\|\varepsilon_2(k) \\ = &\ g(b) + dg(b)(df(a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)) + \|k\|\varepsilon_2(k) \\ = &\ g(f(a)) + dg(b)(df(a)(h)) + \|h\|dg(b)(\varepsilon_1(h)) + \|k\|\varepsilon_2(k) \\ = &\ g \circ f(a) + dg(f(a)) \circ df(a)(h) + \theta(h,k), \end{aligned}$$

où $\theta(h,k) = \|h\|dg(f(a))(\varepsilon_1(h)) + \|k\|\varepsilon_2(k)$. On remarque d'abord que l'application $dg(f(a)) \circ df(a)$ est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$ comme composée de deux applications linéaires. Reste à montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\theta(h,k)}{\|h\|} = 0$. En effet, $\frac{\theta(h,k)}{\|h\|} = dg(b)(\varepsilon_1(h)) + \frac{\|k\|}{\|h\|}\varepsilon_2(k)$. pour le 1^{er} terme de la somme on a $\lim\limits_{h\to 0} dg(b)(\varepsilon_1(h)) = 0$ d'après la linéarité et la continuité de l'application $dg(b)$ et le fait que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$. Pour le $2^{ème}$ terme de la somme on a

$$\begin{aligned} \frac{\|k\|}{\|h\|} = &\ \frac{\|df(a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\|}{\|h\|} \\ \leq &\ \frac{\|df(a)(h)\|}{\|h\|} + \|\varepsilon_1(h)\|. \end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 2.3.24 à l'application linéaire $df(a)$, il existe $M > 0$ tel que $\|df(a)(h)\| \leq M\,\|h\|$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$. Ce qui implique que $\frac{\|k\|}{\|h\|} \leq M + \|\varepsilon_1(h)\|$, c'est-à-dire,

$$\frac{\|k\|}{\|h\|}\|\varepsilon_2(k)\| \leq (M + \|\varepsilon_1(h)\|)\|\varepsilon_2(k)\|.$$

Comme $\lim_{h\to 0} df(a)(h) = 0$ et $\lim_{h\to 0} \|h\|\varepsilon_1(h) = 0$ alors $k = df(a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\lim_{h\to 0} \varepsilon_2(k) = 0$ et par suite, $\lim_{h\to 0}(M + \|\varepsilon_1(h)\|)\|\varepsilon_2(k)\| = 0$. D'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|k\|}{\|h\|}\varepsilon_2(k) = 0.$$

Finalement, on obtient $\varepsilon(h) = \frac{\theta(h,k)}{\|h\|} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, ce qui donne

$$g \circ f(a+h) = g \circ f(a) + dg(f(a)) \circ df(a)(h) + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Par conséquence, $g\circ f$ est différentiable en a et on a $d(g\circ f)(a) = dg(f(a))\circ df(a)$ qu'on peut transformer à l'écriture matricielle suivante $\mathcal{J}_{g\circ f}(a) = \mathcal{J}_g(f(a)).\mathcal{J}_f(a)$.

Corollaire 2.3.26. Dans le cas particulier où $q = 1$, c'est-à-dire, si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^p$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables en a et $f(a)$ respectivement, alors les dérivées partielles de $g \circ f$ en a sont données par

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a)).\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a), \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

Cette formule est appelée **la règle de dérivation en chaîne.**

Preuve. Il suffit d'utiliser les matrices Jacobiennes.

2.3.5 Théorème des accroissements finis (T.A.F)

Rappel. Soit $f : [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une seule variable. Si f est continue sur $[\alpha,\beta]$ et dérivable sur $]\alpha,\beta[$, alors il existe $\gamma \in]\alpha,\beta[$ tel que

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\gamma)(\beta-\alpha), \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = f'(\gamma).$$

Ce qui signifie l'existence d'un point $(\gamma, f(\gamma))$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ dont la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite passante par les points $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$.

Théorème 2.3.27. ***"Théorème des accroissements finis"***
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur U. Soient $a = (a_1,\dots,a_n)$ et $b = (b_1,\dots,b_n)$ deux points de U tels que $[a,b] \subset U$.
Si f est différentiable sur le segment ouvert $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i) = df(c)(b-a).$$

Preuve. "Faite au cours".

Remarque 2.3.28. Cette version du T.A.F ne s'applique pas pour les fonctions vectorielles $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ où $p > 1$. En effet, soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (\cos x, \sin x)$. f est différentiable sur $\mathbb{R}$ et sa matrice Jacobienne en x est la matrice uni-colonne $\begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$. Sur $[0, 2\pi]$, si cette version était vraie on aurait $f(2\pi) - f(0) = df(c)(2\pi - 0) = 2\pi\, \mathcal{J}_f(c)$. Or $f(2\pi) - f(0) = (0, 0)$, alors $(-\sin c, \cos c) = (0, 0)$ où $c \in]0, 2\pi[$, ce qui n'est pas le cas.

Corollaire 2.3.29. Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U. Si la différentielle df est nulle sur U alors f est constante sur U.

Preuve. "Faite au cours".

Théorème 2.3.30. ***"Théorème des accroissements finis (version générale)"***
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient a et b deux points de U tels que $[a, b] \subset U$. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction vectorielle continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a, b[$ telle qu'il existe $k > 0$ vérifiant $\|df(x)\| \leq k,\ \forall x \in]a, b[$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq k\, \|b - a\|.$$

Remarques 2.3.31.

1. D'après le Lemme 2.3.24, on peut définir la norme d'une application linéaire v par
$$\|v\| = \sup_{x \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|v(x)\|}{\|x\|}.$$
2. On peut avoir en fait une inégalité plus fine
$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in]a,b[} \|df(x)\|.\|b - a\|.$$
ou
$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{t \in]0,1[} \|df(a + t\,(b - a))\|.\|b - a\|.$$

Corollaire 2.3.32. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable sur U.
Si $k = \sup_{x \in U} \|df(x)\| < +\infty$ alors f est k-Lipschitzienne sur U.

2.3.6 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant sur U une dérivée partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable. Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée partielle par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable au point $a \in U$, alors $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ est appelée **une dérivée partielle seconde** ou **d'ordre 2** au point a par rapport à la $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$

variables prises dans cette ordre. La dérivée partielle seconde $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ est généralement notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ ou $\partial^2_{x_j x_i} f(a)$. En particulier, si $i=j$ on la note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$. D'une manière plus générale, en utilisant l'opérateur $\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \circ \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \circ \cdots \circ \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}$ d'une manière récurrente, on peut définir une dérivée partielle d'ordre $k \geq 2$ si toutes les dérivées partielles demandées existent et on écrit

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}\right)(a).$$

Exemples 2.3.33. La fonction $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^3+\sin(x+y^2)$ admet des dérivées partielles d'ordre supérieur sur $\mathbb{R}^2$ et on a
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2+\cos(x+y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cos(x+y^2)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x-\sin(x+y^2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\cos(x+y^2)-4y^2\sin(x+y^2)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = -2y\sin(x+y^2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = -2y\sin(x+y^2)$,
$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = 6-\cos(x+y^2)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y) = -2y\cos(x+y^2)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y) = -2y\cos(x+y^2)$,
$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(x,y) = -2\sin(x+y^2)-4y^2\cos(x+y^2)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) = -2y\cos(x+y^2)$,
$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y) = -2\sin(x+y^2)-4y^2\cos(x+y^2)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}(x,y) = -2\sin(x+y^2) - 4y^2\cos(x+y^2)$ et $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = -10y\sin(x+y^2)-8y^3\cos(x+y^2)$.

Définition 2.3.34. *Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On dit qu'une fonction $f:U\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U et on écrit $f\in\mathcal{C}^k(U)$, si toutes ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égale à k existent et elles sont toutes continues sur U.*
En particulier, si $f\in\mathcal{C}^k(U)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et on écrit $f\in\mathcal{C}^\infty(U)$.

Exemple 2.3.35. La fonction $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^3+\sin(x+y^2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2.3.36. ***"Théorème de Schwarz"***
Soit f une fonction définie sur un ouvert $U\subset\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ sont continues en $a\in U$. Alors, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a).$$

En particulier, si $f\in\mathcal{C}^2(U)$ alors l'égalité est vérifiée pour tout $a\in U$ et pour tout $i,j\in\{1,\ldots,n\}$.

Preuve. Pour simplifier l'écriture, on démontrera ce résultat pour $n=2$, c'est-à-dire, $f:U\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ sont continues en $(a,b)\in U$. Il existe $r>0$ tel que $B((a,b),r)\subset U$, donc on peut définir sur $B((0,0),r)$ la fonction ϕ par $\phi(x,y) = f(a+x,b+y)-f(a+x,b)-$

$f(a,b+y)+f(a,b)$. En appliquant le T.A.F à la fonction réelle d'une seule variable $x \longmapsto \phi(x,y)$, on trouve c_x entre 0 et x tel que $\phi(x,y)-\phi(0,y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(c_x,y)(x-0)$, c'est-à-dire,

$$\frac{\phi(x,y)}{x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(c_x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+c_x,b+y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+c_x,b).$$

On ré-applique le T.A.F à la fonction $y \longmapsto \frac{\phi(x,y)}{x}$, on obtient

$$\frac{\frac{\phi(x,y)}{x} - \frac{\phi(x,0)}{x}}{y-0} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\phi(x,c_y)}{x}\right) \quad \text{avec } c_y \text{ entre } 0 \text{ et } y,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\phi(x,y)}{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)(c_x,c_y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}(c_x,c_y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+c_x,b+c_y).$$

Or, la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ est continue au point (a,b), alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\phi(x,y)}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+c_x,b+c_y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).$$

On reprend le même raisonnement en intervertissant l'ordre des variables et on montre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\phi(x,y)}{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$. D'où le résultat. $\square$

2.3.7 La matrice Hessienne

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $U \subset \mathbb{R}^n$. Si df la fonction différentielle de f est différentiable en $a \in U$ (en utilisant la même définition de la différentiabilité) alors f est dite deux fois différentiable en a et la différentielle seconde, notée $d^2f(a)$, est une application **bilinéaire continue** de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. De plus, $d^2f(a)$ est symétrique, c'est-à-dire, $d^2f(a)(h,k) = d^2f(a)(k,h), \ \forall h,k \in \mathbb{R}^n$.

La matrice associée à la forme bilinéaire $d^2f(a)$ relativement à la base canonique est appelée **la Hessienne** de f en a et notée $\mathcal{H}_f(a)$. Si $\{e_1,\ldots,e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ alors $\mathcal{H}_f(a) = (d^2f(a)(e_i,e_j))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ et on peut montrer que $d^2f(a)(e_i,e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$. Alors **la Hessienne** de f en a est la matrice suivante

$$\mathcal{H}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.3.37. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = x^2\, e^y - y\,\sin z$. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xe^y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2e^y - \sin z$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -y\cos z$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2e^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = x^2e^y$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = y\sin z$, et puisque $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ on a $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) = 2xe^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z) = -\cos z$. D'où la Hessienne de f en (x,y,z) s'écrit sous la forme suivante

$$\mathcal{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^y & 2xe^y & 0 \\ 2xe^y & x^2e^y & -\cos z \\ 0 & -\cos z & y\sin z \end{pmatrix}.$$

En particulier, si $(x,y,z) = (-1,0,\pi)$ alors $\mathcal{H}_f(-1,0,\pi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.8 Formule de Taylor

Notations. Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on utilise les notations suivantes :

- ★ $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
- ★ $\alpha! = \prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1!\alpha_2! \dots \alpha_n!$.
- ★ Lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, on dit que $\alpha \geq 0$ si $\alpha_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.
- ★ Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tels que $\beta \leq \alpha$, c'est-à-dire $\beta_i \leq \alpha_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, on note $C_\alpha^\beta = \prod\limits_{i=1}^{n} C_{\alpha_i}^{\beta_i}$.
- ★ Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $x^\alpha = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$.
- ★ On définit l'opérateur différentielle $\mathcal{D}^\alpha$ par

$$\mathcal{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \circ \cdots \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Lemme 2.3.38. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'ouvert U. Alors la fonction réelle d'une seule variable φ définie sur $[0,1]$ par $\varphi(t) = f(a+th)$, où $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $[a, a+h] \subset U$, est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $]0,1[$ et pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ on a

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(t) &= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}} \tfrac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_n!} \tfrac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}(a+th).h_1^{\alpha_1}.h_2^{\alpha_2}.\dots.h_n^{\alpha_n} \\ \varphi^{(k)}(t) &= \sum_{|\alpha|=k} \tfrac{k!}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha f(a+th).h^\alpha. \end{aligned}$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la récurrence.

Applications.

1. Pour $k = 1$: $|\alpha| = 1 \iff \alpha = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} c^{te}}, 0, \dots, 0)$ et dans ce cas on a $\varphi'(t) = \sum\limits_{|\alpha|=1} \frac{1!}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha f(a+th).h^\alpha = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\, h_i$. C'est exactement le cas de la règle de dérivation en chaîne.

2. Pour $k = 2$: $|\alpha| = 2 \iff \begin{cases} \alpha = (0, \dots, 0, \underbrace{2}_{i^{\text{ème}} c^{te}}, 0, \dots, 0) \ \textbf{ou} \\ \alpha = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} c^{te}}, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j^{\text{ème}} c^{te}}, 0, \dots, 0) \end{cases}$

   Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \sum_{|\alpha|=2} \tfrac{2!}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha f(a+th).h^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^n \tfrac{2!}{2!} \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a+th)\, h_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \tfrac{2!}{1!1!} \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)\, h_i.h_j. \end{aligned}$$

Théorème 2.3.39. ***"Formule de Taylor Young à l'ordre p"***
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'ouvert U. Si $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $[a, a+h] \subset U$, alors

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha f(a)\, h^\alpha + \|h\|^p \, \varepsilon(h) \quad \textit{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

ou encore $f(a+h) = \sum\limits_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha f(a)\, h^\alpha + o(\|h\|^p)$.

Preuve. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor classique à la fonction réelle d'une seule variable définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(t) = f(a+th)$.

Application. "très importante pour l'étude des extremums"
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Le développement de Taylor d'ordre 2 de f au voisinage de $a \in U$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{|\alpha| \leq 2} \tfrac{1}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha f(a)\, h^\alpha + \|h\|^2 \, \varepsilon(h) \\ &= \sum_{|\alpha|=0} \tfrac{1}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha f(a)\, h^\alpha + \sum_{|\alpha|=1} \tfrac{1}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha f(a)\, h^\alpha + \sum_{|\alpha|=2} \tfrac{1}{\alpha!} \mathcal{D}^\alpha f(a)\, h^\alpha + \|h\|^2 \, \varepsilon(h) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i + \sum_{i=1}^n \tfrac{1}{2} \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)\, h_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i.h_j + \|h\|^2 \, \varepsilon(h) \\ f(a+h) &= f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \tfrac{1}{2} h^T \, \mathcal{H}_f(a)\, h + \|h\|^2 \, \varepsilon(h) \ \text{ avec } \ \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0, \end{aligned}$$

où $\nabla f(a)$ est le vecteur gradient de f en a, $\mathcal{H}_f(a)$ est la Hessienne de f en a et h^T est la transposée du vecteur "colonne" h.

2.4 Extrema

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On cherche à savoir si f admet un minimum ou un maximum sur une partie V de U. On sait déjà que si V est compact et d'après la continuité de f alors f est bornée sur V et atteint ses bornes (Proposition 2.2.22). Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas où V est un ouvert et on commence par rappeler le vocabulaire utilisé en optimisation.

Définitions 2.4.1.

1. *On dit que f admet un minimum local en $a \in U$ s'il existe un voisinage V de a tel que*
$$f(a) \leq f(x) \qquad \forall x \in V.$$
2. *On dit que f admet un minimum global (ou absolu) en $a \in U$ si*
$$f(a) \leq f(x) \qquad \forall x \in U.$$
3. *On dit que f admet un maximum local (resp. global) en $a \in U$ s'il existe un voisinage V de a tel que*
$$f(a) \geq f(x) \qquad \forall x \in V \quad (resp. f(a) \geq f(x) \qquad \forall x \in U).$$
4. *Ces extrema locaux (resp. globaux) deviennent stricts si les inégalités précédentes sont strictes sur $V \backslash \{a\}$ (resp. $U \backslash \{a\}$).*

Remarque 2.4.2. On utilise le mot extremum pour désigner sans distinction un maximum ou minimum.

2.4.1 Condition nécessaire d'existence d'un extremum

Théorème 2.4.3. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in U$. Si f possède en a un extremum (local ou global) alors $df(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}$, ce qui signifie que toutes les dérivées partielles de f en a sont nulles, c'est-à-dire,*
$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Preuve. "Faite au cours".

Remarques 2.4.4.

1. Si $x_0 \in U$ tel que $df(x_0) = 0$ alors x_0 est appelé **un point critique** (ou singulier ou stationnaire) de f.
2. Être un point critique de f est une condition nécessaire d'un extremum mais pas suffisante, c'est-à-dire, qu'on peut trouver un point critique pour lequel f ne possède pas d'extremum.
3. Les extrema d'une fonction différentiable, quand ils existent, sont à chercher parmi ses points critiques.

2.4.2 Condition suffisante d'existence d'un extremum

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soit $a \in U$ un point critique de f, c'est-à-dire, $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Le développement de Taylor d'ordre 2 de f au voisinage de a est alors

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} h^T \,\mathcal{H}_f(a)\, h + \|h\|^2 \,\varepsilon(h),$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $\mathcal{H}_f(a)$ est la Hessienne de f en a qui est symétrique d'après le Théorème de Schwarz 2.3.36. Au voisinage de a, c'est-à-dire, lorsque $\|h\|$ est suffisamment petit, on peut déduire que $f(a+h) - f(a)$ et $\frac{1}{2} h^T \,\mathcal{H}_f(a)\, h$ ont le même signe. Le terme $\frac{1}{2} h^T \,\mathcal{H}_f(a)\, h$ représente la forme quadratique $\mathcal{Q}(\mathcal{H}_f(a))$ associée à la matrice Hessienne $\mathcal{H}_f(a)$ qui se diagonalise dans une base orthonormée et qui a les valeurs propres sont toutes réelles (d'après la symétrie de $\mathcal{H}_f(a)$). Si $h = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \, e'_i$ dans cette base orthonormée $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ et les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de $\mathcal{H}_f(a)$, alors $h^T \,\mathcal{H}_f(a)\, h = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \, \lambda_i$.
D'après le raisonnement précédent, on peut énoncer une condition suffisante d'existence d'un extremum au Théorème suivant :

Théorème 2.4.5. *Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et $a \in U$ un point critique de f.*

- ★ *Si toutes les valeurs propres λ_i de la Hessienne de f en a sont strictement positives, alors f admet un minimum local strict au point a.*
- ★ *Si toutes les valeurs propres λ_i de la Hessienne de f en a sont strictement négatives, alors f admet un maximum local strict au point a.*

Application. Dans le cas où $n = 2$, c'est-à-dire $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, avec les notations de Monge suivantes : $p = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $q = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ et $r = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$, et en utilisant le fait que $\det(\mathcal{H}_f(a)) = pr - q^2 = \lambda_1 \, \lambda_2$ et $\mathrm{tr}(\mathcal{H}_f(a)) = p + r = \lambda_1 + \lambda_2$, on obtient les cas suivants :

- ★ Si $pr - q^2 > 0$ et $p > 0$ alors f admet en a un minimum local strict ;
- ★ Si $pr - q^2 > 0$ et $p < 0$ alors f admet en a un maximum local strict ;
- ★ Si $pr - q^2 < 0$ alors f n'admet aucun extremum en a, mais elle possède **un point selle** en a;
- ★ Si $pr - q^2 = 0$, alors dans ce cas on ne peut conclure a priori.

2.5 Difféomorphismes et Théorème des fonctions implicites

2.5.1 Difféomorphismes

Définition 2.5.1. *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une fonction $f : U \longrightarrow V$ est un* ***difféomorphisme*** *de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^k$-**difféomorphisme** si elle satisfaite les conditions suivantes :*

- ***i)*** *f est bijective de U dans V;*
- ***ii)*** *f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U;*
- ***iii)*** *f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur V.*

Remarques 2.5.2.

1. Si $k = 0$, c'est-à-dire, f et f^{-1} sont seulement continues, on dit que f est un **homéomorphisme**.
2. Si $f : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme ($k \geq 1$), alors sa différentielle en tout point $a \in U$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui même, c'est-à-dire, $\det \mathcal{J}_f(a) \neq 0$. La fonction réciproque de cette différentielle n'est autre que la différentielle de f^{-1} en $f(a)$, c'est-à-dire,
$$df^{-1}(f(a)) = (df(a))^{-1}.$$
En utilisant les matrices Jacobiennes, on peut traduire cette relation en écriture matricielle sous la forme $\mathcal{J}_{f^{-1}}(b) = (\mathcal{J}_f(f^{-1}(b)))^{-1}, \ \forall b \in V$.

Théorème 2.5.3. ***"Théorème d'inversion locale"***
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : U \longrightarrow V$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. S'il existe $a \in U$ tel que $df(a)$ est un isomorphisme (c'est-à-dire $\det \mathcal{J}_f(a) \neq 0$) alors il existe un voisinage ouvert U_a de a dans U et un voisinage ouvert V_b de $b = f(a)$ dans V tel que la restriction de f à U_a soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U_a dans V_b.

Corollaire 2.5.4. "Théorème d'inversion globale"
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U dans $f(U)$ si, et seulement si, f est injective et sa différentielle en tout point de U est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

2.5.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 2.5.5. ***"Cas de*** $\mathbb{R}^2$***"***
soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(a, b) \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. Si $f(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$, alors il existe un voisinage I de a, un voisinage J de b (I et J sont des intervalles ouverts contenant a et b respectivement) et une fonction $\varphi : I \longrightarrow J$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I vérifiant

i) $I \times J \subset U$ et $\varphi(a) = b$;

ii) $f(x, \varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in I$;

iii) $\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$.

Preuve. La démonstration de ce théorème peut s'effectuer en considérant la fonction $h(x, y) = (x, f(x, y))$ et en lui appliquant le Théorème d'inversion locale 2.5.3, qui permet de définir $(x, \varphi(x))$ comme l'antécédent de $(x, 0)$.

Remarque 2.5.6. On peut exprimer la condition ***ii)*** de la façon suivante :

ii') Pour tout $x \in I$ on a, $f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x)$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{y-1} + y - x$. Montrer que la relation $f(x,y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage du point $(2,1)$.

Théorème 2.5.7. ***"Cas de $\mathbb{R}^n$"***

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ et $\begin{array}{rcl} f : U \subset \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ *une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. Soit $(a,b) \in U$ tel que $a = (a_1,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $b \in \mathbb{R}$.*
Si $f(a,b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$, alors il existe un voisinage V de a, un voisinage W de b (W est un intervalle ouvert contenant b) et une fonction $\varphi : V \longrightarrow W$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur V vérifiant

- ***i)*** $V \times W \subset U$ *et* $\varphi(a) = b$;
- ***ii)*** $f(x,\varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in V$;
- ***iii)*** $\nabla\varphi(x) = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,\varphi(x)),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x,\varphi(x))\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$, *c'est-à-dire,*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}, \qquad \forall i \in \{1,\dots,n-1\}.$$

Chapitre 3

Calculs des intégrales doubles et triples

Rappel : Intégrale d'une fonction à une seule variable

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

1^{er} cas : Si f est en escalier, c'est-à-dire, il existe une subdivision $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ telle que f est constante ($f(x) = c_i$) sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, alors

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n-1} c_i.(t_{i+1} - t_i).$$

$2^{ème}$ cas : Si f est bornée, on l'approche par des fonctions en escalier.

Définition 3.0.1. *Une fonction bornée $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est **intégrable** sur $[a, b]$, s'il existe un réel unique $\mathcal{I}$ tel que pour toute fonction en escalier u et v sur $[a, b]$ vérifiant*
$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, on a $\displaystyle\int_a^b u(x)\, dx \leq \mathcal{I} \leq \int_a^b v(x)\, dx$, et de plus, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier u_ε et v_ε vérifiant $u_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq v_\varepsilon(x)$ et $0 \leq \displaystyle\int_a^b v_\varepsilon(x)\, dx - \int_a^b u_\varepsilon(x)\, dx < \varepsilon$.
*Le réel $\mathcal{I}$ est appelé **l'intégrale** de f sur $[a, b]$ et noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.*

Remarques 3.0.2.

i) Si la fonction f est positive sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ représente l'aire sous la courbe de f au-dessus à $[a, b]$.

ii) Si la fonction f est continue sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$.

iii) Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ alors pour tous réels α et β on a $\displaystyle\int_a^b (\alpha\, f + \beta\, g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$.

3.1 Intégrales doubles

3.1.1 Intégration sur un rectangle de $\mathbb{R}^2$

Soit $\mathcal{R} = [a,b]\times[c,d]$ un rectangle dans $\mathbb{R}^2$. Soit f une fonction définie sur $\mathcal{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, $f : [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$.

<u>1^{er} **cas**</u> **:** Si f est en escalier, c'est-à-dire, il existe une partition de $[a,b]\times[c,d]$ par des subdivisions $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ et $s_0 = c < s_1 < s_2 < \cdots < s_{m-1} < s_m = d$ telle que f est constante ($f(x) = c_{ij}$) à l'intérieur de chaque rectangle $]t_i, t_{i+1}[\times]s_j, s_{j+1}[$.

Définition 3.1.1. ***L'intégrale double*** *de la fonction en escalier f sur le rectangle $\mathcal{R} = [a,b]\times[c,d]$ est définie par*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} c_{ij}\,(t_{i+1}-t_i).(s_{j+1}-s_j).$$

Remarque 3.1.2. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy$ ne dépend pas des valeurs de f sur les bords des petits rectangles $[t_i, t_{i+1}]\times[s_j, s_{j+1}]$.

<u>$2^{ème}$ **cas**</u> **:** Si f est bornée sur $\mathcal{R} = [a,b]\times[c,d]$, on l'approche par des fonctions en escalier.

Définition 3.1.3. *On dit qu'une fonction bornée $f : \mathcal{R} = [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ est* ***intégrable sur le rectangle*** *$\mathcal{R}$, s'il existe un réel unique $\mathcal{I}$ tel que pour toutes fonctions en escalier u et v définies sur $\mathcal{R}$, telles que $u(x,y) \le f(x,y) \le v(x,y)$, on a*

$$\iint_{\mathcal{R}} u(x,y)\,dxdy \le \mathcal{I} \le \iint_{\mathcal{R}} v(x,y)\,dxdy,$$

et de plus, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions en escalier u_ε et v_ε vérifiant

$$u_\varepsilon(x,y) \le f(x,y) \le v_\varepsilon(x,y) \;\text{ et } 0 \le \iint_{\mathcal{R}} v_\varepsilon(x,y)\,dxdy - \iint_{\mathcal{R}} u_\varepsilon(x,y)\,dxdy < \varepsilon.$$

Le réel $\mathcal{I}$ s'appelle ***l'intégrale double*** *de f sur $\mathcal{R}$ et se note $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy$.*

Théorème 3.1.4.

i) *Si la fonction f est positive sur $\mathcal{R} = [a,b]\times[c,d]$ alors $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy$ représente le volume sous le graphe de f au-dessus à $\mathcal{R}$.*

ii) *Si la fonction f est continue sur le rectangle $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ alors f est intégrable sur $\mathcal{R}$.*

Propriété 3.1.5.

i) Si f et g sont deux fonctions intégrables sur le rectangle $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ alors pour tous réels α et β on a

$$\iint_{\mathcal{R}} (\alpha\, f + \beta\, g)(x,y)\, dxdy = \alpha \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dxdy + \beta \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\, dxdy.$$

ii) Si on disjoint le rectangle $\mathcal{R}$ en une partition de deux rectangles $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, c'est-à-dire, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ avec $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$, alors

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dxdy = \iint_{\mathcal{R}_1} f(x,y)\, dxdy + \iint_{\mathcal{R}_2} f(x,y)\, dxdy.$$

3.1.2 Calcul des intégrales doubles sur un rectangle

Théorème 3.1.6. ***"Théorème de Fubini"***
Soit f une fonction continue sur le rectangle $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ alors

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Remarque 3.1.7. En particulier, si f est un produit de deux fonctions g et h d'une seule variable, c'est-à-dire, $f(x,y) = g(x).h(y)$, alors

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dxdy = \left(\int_a^b g(x)\, dx \right) \left(\int_c^d h(y)\, dy \right).$$

Exemples 3.1.8.

1. Pour $\mathcal{R} = [-1,0] \times [0,1]$ et $f(x,y) = x^2 + y^2$, on a

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} (x^2+y^2)\, dxdy = & \int_{-1}^0 \left(\int_0^1 (x^2+y^2)\, dy \right) dx = \int_{-1}^0 \left(\left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 \right) dx \\ = & \int_{-1}^0 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} x \right]_{-1}^0 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2. Pour $\mathcal{R} = [0,1] \times [1,2]$ et $f(x,y) = e^{x+y}$, on a

$$\begin{aligned} \iint_{[0,1]\times[1,2]} e^{x+y}\, dxdy = & \iint_{[0,1]\times[1,2]} e^x\ e^y\, dxdy = \int_0^1 e^x\, dx \int_1^2 e^y\, dy \\ = & \ [e^x]_0^1\ [e^y]_1^2 = e(e-1). \end{aligned}$$

3.1.3 Intégration sur une partie bornée de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie bornée non-rectangulaire $\mathcal{D}$. On considère un rectangle $\mathcal{R}$ tel que $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$ et on définit la fonction $\overline{f}$ sur $\mathcal{R}$ par $\overline{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin \mathcal{D}, \end{cases}$

On pose

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dxdy = \iint_{\mathcal{R}} \overline{f}(x,y)\, dxdy.$$

On peut se ramener à deux types de domaine $\mathcal{D}$:

Type 1 :
$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ a \leq x \leq b \text{ et } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, où g_1 et g_2 sont deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ (Figure 3.1).

Type 2 :
$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ c \leq y \leq d \text{ et } h_1(x) \leq x \leq h_2(x)\}$, où h_1 et h_2 sont deux fonctions continues de $[c,d]$ dans $\mathbb{R}$ (Figure 3.2).

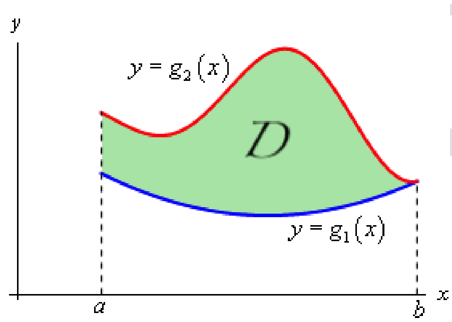


FIGURE 3.1 – Type 1 de domaine d'intégration $\mathcal{D}$

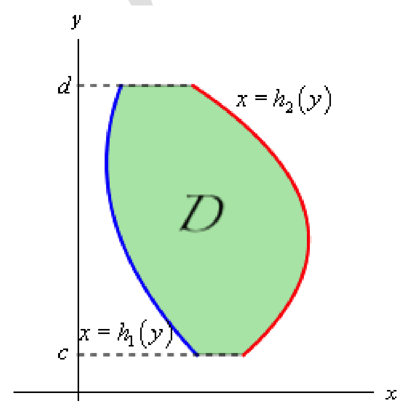


FIGURE 3.2 – Type 2 de domaine d'intégration $\mathcal{D}$

Théorème 3.1.9. ***"Théorème de Fubini"***
Soit f une fonction continue sur une partie bornée $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, alors f est intégrable sur $\mathcal{D}$ et on a deux cas :

i) *Si le domaine d'intégration $\mathcal{D}$ est de type 1 alors*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

ii) *Si le domaine d'intégration $\mathcal{D}$ est de type 2 alors*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Remarques 3.1.10.

1. Le choix d'intégrer d'abord par rapport à x ou par rapport à y peut amener des calculs plus ou moins long.
2. L'aire d'un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ est donnée par

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \text{aire}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} 1\, dxdy.$$

3.1.4 Intégrale double et changement de variables

Rappel. Pour une fonction d'une seule variable intégrable sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)\, dt,$$

où g est une bijection de $[c, d]$ sur $[a, b]$.

Théorème 3.1.11. *Soit* $\begin{array}{rcl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \longmapsto & (x, y) = \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \end{array}$
une fonction injective et de classe $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathcal{D}$ *telle que* $\det(\mathcal{J}_\varphi(u, v)) \neq 0$, *où* $\mathcal{J}_\varphi(u, v)$ *est la matrice Jacobienne de* φ *définie par* $\mathcal{J}_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$.
Si f est une fonction intégrable sur $\varphi(\mathcal{D})$ alors

$$\iint_{\varphi(\mathcal{D})} f(x, y)\, dxdy = \iint_{\mathcal{D}} f \circ \varphi(u, v)\ |\det(\mathcal{J}_\varphi(u, v))|\ dudv.$$

Application. "Changement en coordonnées polaires"

Si la fonction f ou le domaine d'intégration sont exprimés en fonction de x^2+y^2, alors le calcul d'intégrale est souvent plus facile en passant en coordonnées polaires, via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \longmapsto & \varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x, y) \end{array}$$

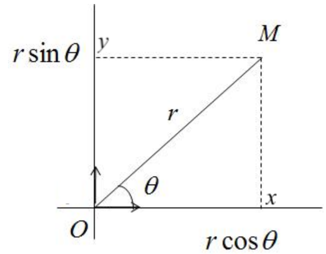


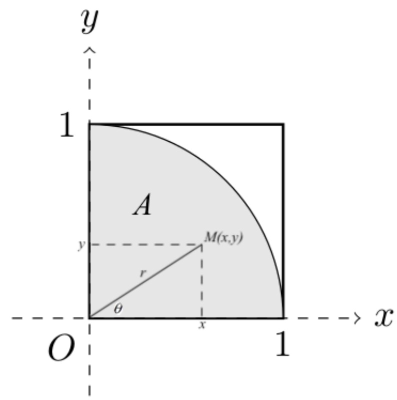
Figure 3.3 – Changement de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires

Dans ce cas, on a $\det(\mathcal{J}_\varphi(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$, alors

$$\iint_{\varphi(\mathcal{D})} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\mathcal{D}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta.$$

Exemple 3.1.12. Calculons l'intégrale $I = \iint_A xy\,dxdy$ où

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0 \ \text{ et } \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



On a $A = \varphi(B)$ où $B = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[: 0 < r \leq 1 \ \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, alors

$$\begin{aligned} I = & \iint_A xy\,dxdy = \iint_{\varphi(B)} xy\,dxdy = \iint_B (r\cos\theta)(r\sin\theta)\,r\,drd\theta \\ = & \frac{1}{2}\iint_{]0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} r^3\sin(2\theta)\,drd\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 r^3\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Exercice.

1. Calculer l'aire d'un disque.
2. Calculer l'aire à l'intérieur d'une ellipse.

3.2 Intégrales triples

On définit et on calcule les intégrales pour les fonctions de trois variables (et plus…) de manière totalement similaire et on note l'intégrale triple d'une fonction f sur une partie bornée A de $\mathbb{R}^3$ par $\iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz$.

3.2.1 Théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^3$

Le théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^3$ permet de ramener le calcul d'une intégrale triple à celui d'intégrale double et ainsi grâce au même théorème énoncé dans $\mathbb{R}^2$, à celui d'intégrales simples.

Théorème 3.2.1. *Soit* $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/(x, y) \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ *et* $g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$, *où* $\mathcal{B}$ *est une partie bornée de* $\mathbb{R}^2$ *et les fonctions* g_1 *et* g_2 *sont continues sur* $\mathcal{B}$.
Si f *est une fonction intégrable sur* $\mathcal{A}$ *alors*

$$\iiint_{\mathcal{A}} f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_{\mathcal{B}} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dxdy.$$

De plus, si $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq x \leq b \ \text{ et } \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, *où* φ_1 *et* φ_2 *sont deux fonctions continues de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$, *alors*

$$\iiint_{\mathcal{A}} f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

Remarques 3.2.2.

1. Il peut avoir différentes formulation suivant la forme du domaine d'intégration $\mathcal{A}$. On peut procéder dans l'ordre des variables que l'on veut, toutes donnant le même résultat.
2. En particulier, si $f(x, y, z) = 1$ sur $\mathcal{A}$, l'intégrale $\iiint_{\mathcal{A}} 1\, dxdydz$ représente alors le volume de $\mathcal{A}$.

Exemple 3.2.3. Soit $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3/ \ x + y + z \leq 1\}$. Calculons l'intégrale $\iiint_{\mathcal{A}} \dfrac{1}{(1 + x + y + z)^2}\, dxdydz$. Le domaine d'intégration peut être exprimé comme

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/ \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 - x \ \text{ et } \ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

D'après le Théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{A}} \frac{1}{(1 + x + y + z)^2}\, dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1 + x + y + z)^2}\, dz \right) dy \right) dx \\ &= \tfrac{3}{4} - \ln 2. \end{aligned}$$

D'autre part, le volume du domaine $\mathcal{A}$ peut être calculé comme suit,

$$\mathcal{V}(\mathcal{A}) = \iiint_{\mathcal{A}} 1\, dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{6}.$$

3.2.2 Changement de variables dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 3.2.4. *Soit* $\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) & \longmapsto & (x, y, z) = \varphi(u, v, w), \end{array}$ *une fonction injective de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathcal{A}$ *telle que* $\det \mathcal{J}_\varphi(u, v, w) \neq 0$, *où* $\mathcal{J}_\varphi$ *est la matrice Jacobienne de* φ.
Si f *est une fonction intégrable sur* $\mathcal{B} = \varphi(\mathcal{A})$, *alors*

$$\iiint_{\varphi(\mathcal{A})} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{\mathcal{A}} f \circ \varphi(u, v, w)\ |\det(\mathcal{J}_\varphi(u, v, w))|\ dudvdw.$$

Applications.

1. **Les coordonnées cylindriques** d'un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont définies par le changement de variables via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) &\longmapsto (x, y, z) = \varphi(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a $\mathcal{J}_\varphi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det \mathcal{J}_\varphi(r, \theta, z) = r$, alors

$$\iiint_{\varphi(\mathcal{A})} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{\mathcal{A}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, drd\theta dz.$$

2. **Les coordonnées sphériques** d'un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont définies par le changement de variables via l'application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times[0, \pi[$ définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times[0, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \phi) &\longmapsto (x, y, z) = \varphi(r, \theta, \phi) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a $\mathcal{J}_\varphi(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{pmatrix}$ et $|\det \mathcal{J}_\varphi(r, \theta, \phi)| = r^2\sin\phi$, et par suite

$$\iiint_{\varphi(\mathcal{A})} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{\mathcal{A}} f(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)\, r^2\sin\phi\, drd\theta d\phi.$$

Exercice.

1. Calculer $\mathcal{I} = \iiint_{\mathcal{A}} z^{x^2+y^2}\, dxdydz$ où $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$.
2. Calculer le volume d'une boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon r.

$\mathcal{FIN}$.