Chapitre II: Fonctions réelles de plusieurs variables

On définit une fonction d’une seule variable comme suit :

$$\begin{aligned} f : IR &\longrightarrow IR \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Dans de nombreux problèmes, nous devons décrire le comportement d’une variable en fonction de plusieurs variables.

Par exemple, l’aire d’un rectangle dépend de sa longueur et de sa largeur.

En économie, nous décrivons souvent la relation entre la quantité produite par une firme comme une fonction de plusieurs facteurs de production (travail, capital).

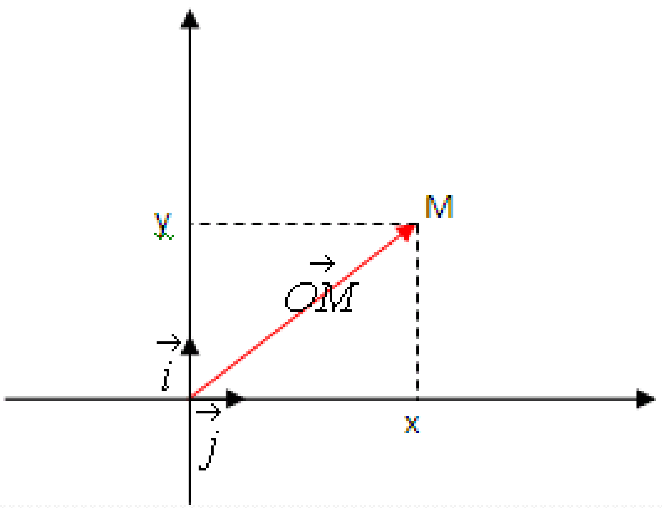
La terminologie et les notations pour les fonctions de deux ou plusieurs variables est similaire à celle introduite pour les fonctions d'une seule variable.

On définit une fonction à deux variables réelles comme suit :

$$\begin{aligned} f : IR \times IR &\longrightarrow IR \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) \end{aligned}$$

$IR \times IR$ s'écrit IR^2. f est donc une fonction à deux variables qui associée le couple $(x,y) \in IR^2$ une image f(x,y) dans IR.

IR^2 est identifié à un plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. le couple (x,y) représente les coordonnées d'un point M du plan IR^2 :



Pour une fonction à 3 variables, on définit une fonction à deux variables réelles comme suit :

$$f : IR \times IR \times IR \longrightarrow IR$$
$$(x,y,y) \longmapsto f(x,y,z)$$

$IR \times IR \times IR$ s'écrit IR^3 . f est donc une fonction à trois variables qui associée le triplet $(x,y,z) \in IR^3$ une image f(x,y,z) dans IR.

D’une manière générale, on définit une fonction à n variables comme suit :

$$f : IR^n \longrightarrow IR$$
$$(x_1,x_2,\dots,x_n) \longmapsto f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

Fonctions à deux variables :

Domaine de définition :

Soit $f : IR^2 \longrightarrow IR$ une fonction à deux variables. On appelle le domaine de définition de f (qui est noté D_f) l’ensemble :

$D_f = \{ (x,y) \in IR^2 / f(x,y) \text{ existe}\}$

Limite et continuité

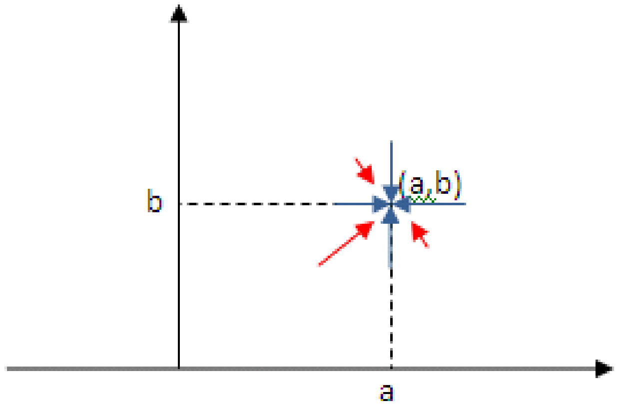
On dit que f tend vers la limite $\ell \in IR$ quand (x,y) tend vers (a,b) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall (x,y) \in D_f, \| (x,y) - (a,b) \|_2 < \sigma \Rightarrow | f(x,y) - \ell| < \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell$

Remarque :

- ✓ Soit $X = (x,y) \in IR$ $\| X \|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$
- ✓ $\| (x,y) - (a,b) \|_2 = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$
- ✓ $(x,y) \to (a,b)$ veut dire que $x \to a$ et $y \to b$, cela veut dire que la limite doit avoir pour lieu pour tous les chemins se tendent en (a,b) :



Règles de calcul :

Soient f et g deux fonctions à 2 variables.

Proposition :

- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \lambda\, f(x,y) = \lambda \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) + g(x,y)) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) \times g(x,y)) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \times \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{\lim f(x,y)}{\lim g(x,y)}$ si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \neq 0$

Continuité

Soit $f : IR^2 \longrightarrow IR$ une fonction à deux variables. On dit que f est continue en (a,b) si :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

f est dite continue su D_f si elle est continue en tout point de D_f.

Exemple :

$f(x,y) = xy$

f est continue sur $D_f = IR^2$

Prolongement par continuité

Soit $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$

f n'est pas définie au point (0,0) mais $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Donc on peut prolonger f au point (0,0) en considérant $\bar{f}$ définie par

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{au point } (0,0) \end{cases}$$

On a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \bar{f}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = \bar{f}(0,0)$.

D'où $\bar{f}$ est continue.

On dit qu'on a prolongé f par continuité

Règles de calcul :

Soient f et g deux fonctions à 2 variables continues sur D_f et D_g respectivement alors :

- λf est continue sur D_f
- $f+g$ est continue sur $D_f \cap D_g$
- $f \times g$ est continue sur $D_f \cap D_g$
- $\frac{f}{g}$ est continue sur $D = \{ D_f \cap D_g \,/\, (g(x,y) \neq 0\}$

Dérivées partielles

Soit f : $D_f \subset IR^2 \longrightarrow IR$ une fonction à deux variables, on définit la dérivée partielle de f par rapport à x au point (a,b) la fonction :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ veut dire la dérivée partielle de f par rapport à x, on la note f'_x

De même on définit la dérivée partielle de f par rapport à y au point (a,b) la fonction :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ veut dire la dérivée partielle de f par rapport à y, on la note f'_y

Exemple :

Soit la fonction f définit par : $f(x,y) = x^2y - 2y$

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\,xy$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 2$$

Remarque :

Une fonction à deux variables peut admettre des dérivées partielles au point (a,b) sans être continue sur ce point.

Définition :

Soit $f : IR^2 \longrightarrow IR$ une fonction à deux variables.

Si f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ et qu'ils sont continue sur IR^2, alors f est dite dérivable de classe C^1.

Exemple : fonction de Cobb-Douglass

$$f(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta} \quad \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha\, x^{\alpha-1} y^{\beta} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \beta\, x^{\alpha} y^{\beta-1}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continue sur IR^2 donc f est dérivable donc f est de classe C^1

Fonction homogène :

Définition :

Soit $f : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ une fonction à deux variables,

On dit f est homogène de degré α sur D si :

$\forall (x,y) \in D$, $\forall t \in IR_+^*$ tel que $(tx,ty) \in D$ on a : $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$

Exemple :

La fonction de Cobb-Douglass est homogène de degré $\alpha + \beta$,

En effet : $f(x,y) = x^\alpha y^\beta \Rightarrow f(tx,ty) = (tx)^\alpha \ (ty)^\beta = t^\alpha x^\alpha \, t^\beta y^\beta = t^{\alpha+\beta} x^\alpha y^\beta = t^{\alpha+\beta} f(x,y)$

Homogénéité des dérivées partielles

Soit $f : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ une fonction homogène de degré α sur D

et admet des dérivées partielles par rapport à x.

Soit $g : D \longrightarrow IR$ une fonction à deux variables vérifiant :

$$g(x,y) = f(tx,ty) = t^{\alpha} f(x,y)$$

alors $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(t^{\alpha} f(x,y)) = t^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f(tx,ty)) = \frac{\partial}{\partial x}(tx)\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)$

Puisque $t \neq 0$ (car $t \in IR_+^*$), on obtient :

$$t^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \forall\, t > 0$$

d'où :

$\frac{\partial f}{\partial x}$ **est une fonction homogène de degré α-1 sur D**

De même :

$$g(x,y) = f(tx,ty) = t^{\alpha} f(x,y)$$

alors $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\,(t^{\alpha} f(x,y)\,) = t^{\alpha}\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\,(f(tx,ty)) = \frac{\partial}{\partial y}\,(tx)\,\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = t\,\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)$

Puisque $t \neq 0$ (car $t \in IR_+^*$), on obtient :

$$t^{\alpha}\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = t\,\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) \;=\; t^{\alpha\text{-}1}\;\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad \forall\ t > 0$$

d'où :

$\frac{\partial f}{\partial y}$ **est une fonction homogène de degré α-1 sur D**

Exemple :

La fonction de Cobb-Douglass est homogène de **degré $\alpha + \beta$,**

$$f(x,y) = f(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta} \quad \text{avec } \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(x^{\alpha} y^{\beta}) = \alpha\ x^{\alpha-1} y^{\beta}$$

Donc : $\frac{\partial}{\partial x}(f(tx,ty)) = \quad \alpha\ (tx)^{\alpha-1}(ty)^{\beta}) = \alpha\ t^{\alpha-1}\, x^{\alpha-1}\ t^{\beta}\, y^{\beta}$

$$= t^{\alpha+\beta-1}\ \alpha\, x^{\alpha-1}\, y^{\beta} = t^{\alpha+\beta-1}\ \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y))$$

Donc : $\frac{\partial f}{\partial x}$ **est une fonction homogène de degré $\alpha+\beta-1$**

Elasticité

Soit $f : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ une fonction à deux variables qui accepte des dérivées partielles sur $(IR_+^*)^2$. Et soit x,y,z tel que : $z = f(x,y)$

On définit les élasticités partielles de f par rapport à x et y par :

$$e(f,x) = \frac{x}{f(x,y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$e(f,y) = \frac{y}{f(x,y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

En général :

$$e(z,x) = \frac{x}{z} \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{et} \quad e(z,y) = \frac{y}{z} \frac{\partial z}{\partial y}$$

Dérivées partielles secondes

Soit $f : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ une fonction à deux variables qui accepte des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ dérivable par rapport à x, on dit que f admet une dérivée partielle seconde par rapport à x qu'on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$)

De même si la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ dérivable par rapport à y, on dit que f admet une dérivée partielle seconde par rapport à y qu'on note $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ($\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$)

Et si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ dérivable par rapport à y, on dit que f admet une dérivée partielle seconde par rapport à x et y qu'on note $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ($\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$)

De même si la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ dérivable par rapport à x, on dit que f admet une dérivée partielle seconde par rapport à y et x qu'on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ($\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$)

Remarque :

En général : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas toujours identiques

Exemple :

Soit la fonction $f(x,y) = x^3 y^4 + y^3$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 y^4 + y^3) = 3x^2y^4 + 0 = 3x^2y^4$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 y^4 + y^3) = 4x^3y^3 + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^3 + 3y^2) = 12x^2 y^3 + 0 = 12x^2 y^3$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^4) = 12x^2 y^3$$

Théorème de Schwarz

Si les fonctions dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont définies et continues alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$