Chapitre III : Optimisation des fonctions à deux variables

Rappel sur l'optimisation des fonctions à une seule variable:

Maximum et minimum

Définition:

- On dit que f admet un **maximum local** (resp : minimum local) en a si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que :

  pour tout $x \in J$ on a : $f(x) \leq f(a)$ (resp : $f(x) \geq f(a)$)

- On dit que f admet un **maximum global** (resp : minimum global) en a si et seulement si pour tout $x \in D_f$ on a : $f(x) \leq f(a)$ (resp : $f(x) \geq f(a)$)
- On dit que f admet un extremum en a si et seulement si f admet un maximum ou un minimum en a.

Conditions du premier ordre:

Théorème :

Si f est une fonction dérivable sur un ouvert I

et si f admet en un point x_0 de I un extremum, alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques :

Si $f'(x_0) = 0$ pour un point x_0 de I ouvert, on dit que x_0 est un point critique (ou stationnaire) de f

Exemple:

Conditions du second ordre :

Théorème :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert ´ I et x0 un point critique de f . Alors :

- Si $f''(x_0) > 0$, f présente en x0 un minimum local.
- Si $f''(x_0) < 0$, f présente en x0 un maximum local.

Exemple:

Optimisation des fonctions à deux variables

Optimisation sans contrainte (libre)

Soit $f : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ une fonction à deux variables. D un ouvert de IR^2, $f \in C^1(D)$

On s'intéresse aux problèmes :

$$f(x_0, y_0) = \min_{(x,y)\in IR^2} f(x, y)$$ (x_0,y_0) est dit le minimum global de f

Ou $$f(x_0, y_0) = \max_{(x,y)\in IR^2} f(x, y)$$ (x_0,y_0) est dit le maximum global de f

Condition nécessaire de 1^er^ ordre

Théorème :

Si $(x_0,y_0) \in D$ est un extremum de f sur D

Alors :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

(x_0,y_0) est appelé un point critique, un point stationnaire ou candidat à l'optimalité.

Condition suffisante d'optimalité local

Soit $f : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ une fonction à deux variables. $f \in C^2(D)$

Soit (x_0, y_0) un point critique de f

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

- (x_0, y_0) est un minimum local de f si :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2 > 0$$

$$\text{Et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$$

- (x_0, y_0) est un maximum local de f si :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2 > 0$$

$$\text{Et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$$

Remarque :

Soit $f : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ une fonction à deux variables. $f \in C^2(D)$

Soit (x_0,y_0) un point critique de f.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

On pose : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = r$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = t$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = s$

- (x_0,y_0) est **un minimum local** de *f* si :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 > 0$$

$$\text{Et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$$

C'est-à-dire : si $(r\,t - s^2 > 0$ et $r > 0)$

- (x_0, y_0) est un maximum local de f si :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2 > 0$$

$$\text{Et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$$

C'est-à-dire : si $(r\,t - s^2 > 0$ et $r < 0)$

Soit (x_0,y_0) un point critique de f

- (x_0,y_0) est un **col** de *f* si :

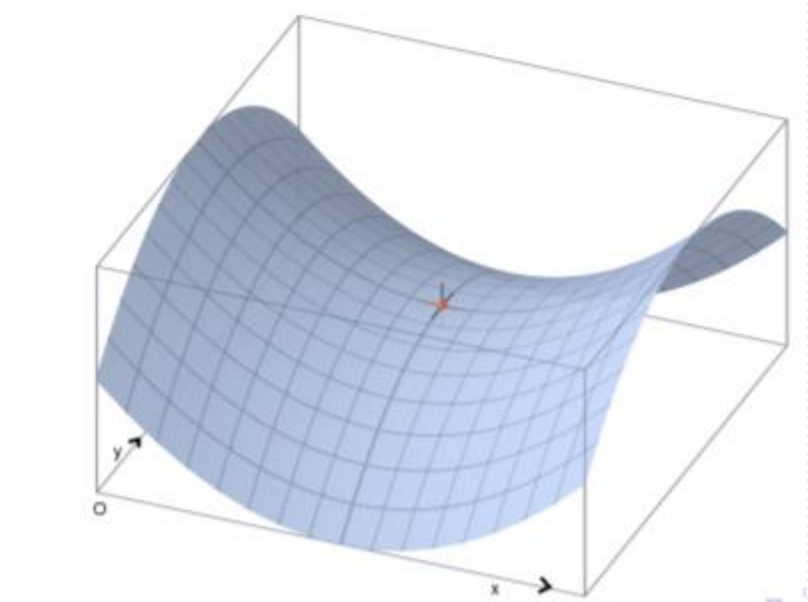
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 < 0$$

C'est-à-dire : si $(r\,t - s^2 < 0)$

Remarque:

Il existe des points (dit "selle" ou "col"), tels que :

- à y fixé, dans la direction (Ox)on a un minimum,
- à x fixé, dans la direction (Oy) on a un maximum.



Définition :

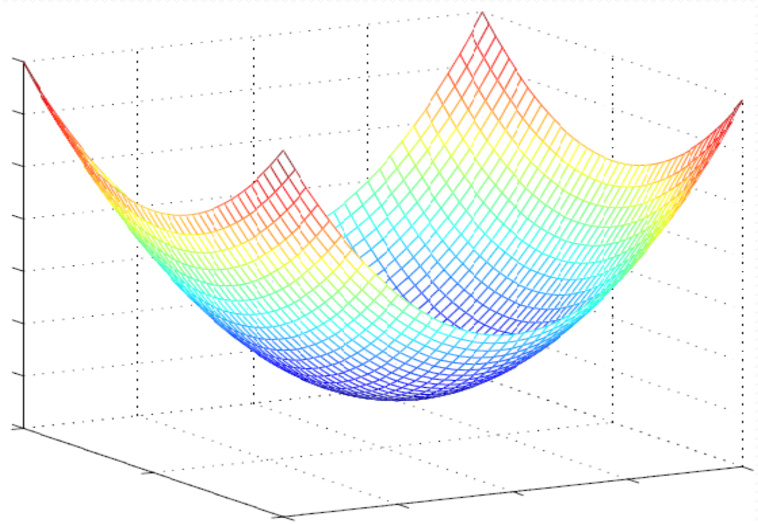
Soit $f : D \subset IR^2 \longrightarrow IR$ une fonction à deux variables. $f \in C^2(D)$

- On dit que f est strictement convexe sur D si :

  $\forall (x,y) \in D$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 > 0$$

Et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0$



- On dit que f est strictement concave sur D si :

$\forall$ (x,y) $\in$ D , on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 > 0$$

Et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) < 0$

Théorème :

Soit f une fonction strictement convexe sur D

- Si f admet un minimum local (x_0, y_0) sur D alors (x_0, y_0) est unique et représente le minimum global sur D

Soit f une fonction strictement concave sur D

- Si f admet un maximum local (x_0, y_0) sur D alors (x_0, y_0) est unique et représente le maximum global sur D

Optimisation sous contraintes d'égalité

Introduction :

- En économie, il est fréquent que l'on cherche à maximiser une fonction sous des contraintes (maximiser un profit ou une utilité compte tenu de contraintes budgétaires, minimiser une dépense compte tenu d'un besoin à satisfaire).
- Mathématiquement, le problème se pose sous la forme d'une optimisation d'une fonction *f* à deux variables, sous la contrainte d'une autre fonction *g* :

$$\min f(x,y) \quad \text{avec} \quad g(x,y) = 0$$

$$\text{Ou} \quad \max f(x,y) \quad \text{avec} \quad g(x,y) = 0$$

On dit que c'est un problème d'optimisation sous contrainte d'égalité

La contrainte est : $g(x,y) = 0$

Cette méthode d’optimisation fait appel à ce que l’on appelle le **Lagrangien L**, qui est une fonction définies à l’aide de *f* et *g*.

Condition nécessaire d'optimisation d'ordre 1

Théorème :

Si f admet un extremum local en $(x_0, y_0) \in D$ sous la contrainte $g(x_0, y_0) = 0$,

Alors il existe un réel $\lambda \in IR$ tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

(x_0, y_0) est un point critique ou point candidat à l'optimalité.

Condition suffisante d'optimalité

Théorème :

Soit (x_0, y_0) un extremum local de f sous la contrainte $g(x_0, y_0) = 0$,

Alors il existe un réel $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{D}$ (où $L(x,y) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$)

$$\text{Tel que : } \frac{\partial L}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial L}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Si $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0) - 2\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \times \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) > 0$

Alors (x_0, y_0) est un minium local de f sous la contrainte $g(x_0, y_0) = 0$,

Si $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2 \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0) - 2\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \times \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) < 0$

Alors (x_0, y_0) est un maximum local de f sous la contrainte $g(x_0, y_0) = 0$,