

Table des matières

1	Introduction à la logique mathématique, ensembles et applications	3
1.1	Eléments de logique	3
1.1.1	Assertion	3
1.1.2	Les connecteurs logiques	3
1.1.3	Les quantificateurs	5
1.1.4	Quelques règles logiques	5
1.1.5	Les Raisonnements Mathématiques	6
1.1.6	Formule du binôme	8
1.2	Les ensembles	9
1.2.1	Quelques notions de base	9
1.2.2	Opérations sur les ensembles	9
1.3	Les applications	13
1.3.1	Généralités	13
1.3.2	Composition des applications	15
1.3.3	Injection, surjection et bijection	15
1.3.4	Image directe image réciproque	19
1.3.5	Exercices	20
2	Factorisation des polynômes	21
2.1	Rappel sur les nombres complexes	21
2.1.1	L'ensemble \mathbb{C}	21
2.1.2	Plan complexe	22
2.1.3	Opérations sur les nombres complexes	22
2.1.4	Conjugué d'un nombre complexe	23
2.1.5	Module et argument d'un nombre complexe	23
2.1.6	Racines n -ièmes d'un nombre complexe	24
2.1.7	Équations du second degré dans \mathbb{C}	26
2.2	Les polynômes	27
2.2.1	Définitions et notations	27
2.2.2	Opérations sur les polynômes	28
2.2.3	Division suivant les puissances croissantes	29
2.2.4	La division euclidienne des polynômes (division suivant les puissances décroissantes)	30

2.3	Racine d'un polynôme, factorisation	31
2.3.1	Racines d'un polynôme	31
2.3.2	Formule de Taylor	32
2.3.3	Polynômes irréductibles	34
2.3.4	Exercices	35
3	Fractions rationnelles	37
3.1	Définitions et propriétés générales	37
3.2	Le degré d'une fraction rationnelle	38
3.3	Les pôles d'une fraction rationnelle	39
3.4	Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples	40
3.4.1	Etape 1 : Partie entière et partie principale	40
3.4.2	Etape 2 : Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles	41
3.4.3	Etape 3 : Décomposition de la partie principale en éléments simples	42
3.5	Techniques de DES : calcul des coefficients	44
3.5.1	Méthode de décomposition par identification des coefficients	44
3.5.2	Technique de base : multiplication/substitution	45
3.5.3	Evaluation	46
3.5.4	Parité	47
3.5.5	Limite de $xF(x)$ à l'infini	48
3.5.6	Division suivant les puissances croissantes	49
3.5.7	Exercices	51
4	Calcul matriciel, déterminants et résolution des systèmes linéaires	52
4.1	Calcul matriciel	52
4.1.1	Définitions et notations	52
4.1.2	Matrices particulières	53
4.1.3	Opérations sur les matrices	55
4.1.4	Matrices carrées inversibles	58
4.1.5	Matrices échelonnées	59
4.1.6	Le rang d'une matrice	59
4.1.7	Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice	60
4.1.8	Applications	61
4.2	Déterminant d'une matrice carrée	62
4.2.1	Définitions et propriétés	62
4.2.2	Déterminants des matrices particulières	64
4.2.3	Déterminant et inverse d'une matrice	65
4.3	Résolution des systèmes linéaires	66
4.3.1	Définitions et notations	66
4.3.2	Existence des solutions d'un système linéaire	68
4.3.3	Résolutions des systèmes linéaires	68
4.3.4	Exercices	72

Chapitre 1

Introduction à la logique mathématique, ensembles et applications

1.1 Eléments de logique

1.1.1 Assertion

Définition 1.1.1. *Une **assertion** ou **proposition** est un énoncé auquel on peut attribuer la valeur de vérité vrai (V) ou faux (F), mais jamais les deux à la fois. C'est le principe du tiers-exclu.*

Nous représentons une assertion par une lettre P, Q, R, \dots

◇ Quand l'assertion est vraie, on lui affecte la valeur V .

◇ Quand l'assertion est fautive, on lui affecte la valeur F .

Ces valeurs sont appelées "Valeurs de vérité de l'assertion". Ainsi, pour définir une assertion, il suffit de donner ses valeurs de vérités. En général, on met ces valeurs dans un tableau qu'on nommera "Table de vérité" ou "Tableau de vérité".

Exemples 1.1.1.

1. «Tous les nombres entiers relatifs sont positifs.»
2. «Je suis plus grand que toi.»
3. «Il existe un nombre premier qui n'est pas impaire.»
4. « $2-3=1$.»
5. «Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 > 0$.»
6. « Il existe $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| = 1$.»

1.1.2 Les connecteurs logiques

Si P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q à l'aide des connecteurs logique.

a. La négation, "non"

A chaque assertion P , on associe son contraire appelée négation de P , noté ($non P$) ou $\neg P$ ou \bar{P} . ($non P$) est vraie si P est fausse. ($non P$) est fausse si P est vraie.

b. La conjonction, "et"

Soit P et Q deux assertions alors (P et Q) qui est noté aussi ($P \wedge Q$) est une assertion appelée conjonction de P et de Q . (P et Q) est vraie seulement dans le cas P est vraie et Q est vraie.

c. La disjonction "ou"

Soit P et Q deux assertions alors (P ou Q) qui est noté aussi ($P \vee Q$) est une assertion appelée disjonction de P et de Q . (P ou Q) est vraie dans l'une au moins des assertion P , Q est vraie.

d. L'implication " \Rightarrow "

Soit P et Q deux assertions alors ($non P$ ou Q) est une assertion appelée l'implication de Q par P notée ($P \Rightarrow Q$). On lit P implique Q .

On a le tableau de verité suivant :

P	non P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V

e. L'équivalence, " \iff "

Soit P et Q deux assertions alors l'assertion($P \Rightarrow Q$) et ($Q \Rightarrow P$) se note $P \iff Q$. On a le tableau de verité suivant :

P	non P	Q	non Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \iff Q$
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V	V

Remarque 1.1.2. Deux assertions équivalentes ont la même valeur logique. Elles sont bien simultanément vraies, ou bien simultanément fausses.

Exemples 1.1.2.

1. $P \iff (non(non P))$ dite la règle de Morgan.

2. $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$.
3. $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P \text{ ou non } Q)$.
4. $P \Rightarrow Q \iff (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$. (La contraposé).

1.1.3 Les quantificateurs

i) Le quantificateur \forall «pour tout»

Une assertion P peut dépendre d'un paramètre x , par exemple « $x^2 > 4$ », l'assertion $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x . L'assertion

$$\forall x \in E, P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E . On lit « Pour tout x appartenant à E , $P(x)$ », sous-entendu « Pour tout x appartenant à E , $P(x)$ est vraie ».

Exemples 1.1.3.

1. « $\forall x \in [2, +\infty[, x^2 \geq 4$ » est vraie.
2. « $\forall n \in \mathbb{Z}, n(n+1)$ est pair » est vraie.
3. « $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \leq 0$ » est fausse.

ii) Le quantificateur \exists «il existe»

Soit $P(x)$ une assertion dont la valeur de vérité dépend de l'objet x . Si $P(x)$ est vraie pour au moins un objet x , on écrit : $\exists x, P(x)$. On lit : il existe au moins un x tel que $P(x)$ est vraie.

iii) La négation des quantificateurs

La négation de l'assertion « $\forall x \in E, P(x)$ » est « $\exists x \in E, \text{non}(P(x))$ ».

Par exemple la négation de « $\forall x \in [2, +\infty[, x^2 \geq 4$ » est « $\exists x \in [2, +\infty[, x^2 < 4$ ».

La négation de l'assertion « $\exists x \in E, P(x)$ » est « $\forall x \in E, \text{non}(P(x))$ ».

Exemple : La négation de « $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 1 = 0$ » est « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 1 \neq 0$ ».

1.1.4 Quelques règles logiques

Proposition 1.1.3. Soient P, Q , et R trois assertions, on a :

1. $(P \text{ et } (Q \text{ et } R)) \iff ((P \text{ et } Q) \text{ et } R)$, (l'assertion P et Q et R a un sens);
2. $(P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)) \iff ((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R)$, (l'assertion P ou Q ou R a un sens);
3. $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \iff ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R))$;
4. $(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \iff ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R))$;

5. $(P \iff (Q \iff R)) \iff ((P \iff Q) \iff R)$;
6. $(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies R) \iff (P \implies R)$ (l'implication est transitive).

Exercice 1.1.4.

1. Écrire la négation de « $P \implies Q$ ».
2. Écrire la négation de « P et $(Q$ ou $R)$ ».
3. Écrire à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes puis écrire ses négations :
 - a) « Pour tout nombre réel, son carré est positif ».
 - b) « Pour chaque réel, je peux trouver un entier relatif tel que leur produit soit strictement plus grand que 1 ».
 - c) « Pour tout entier naturel n , il existe un unique réel x tel que $\exp(x) = n$ ».

Exercice 1.1.5. Écrire la négation des assertions suivantes :

1. Il existe un triangle isocèle qui a au moins un angle rectangle ;
2. pour tous $x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq y$;
3. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists q \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $0 < q < \varepsilon$;
4. $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall z \in \mathbb{Z}$, la relation $z < y$ implique la relation $z < x + 1$;
5. $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$.

1.1.5 Les Raisonnements Mathématiques

1) Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $P \implies Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.

Exemple 1.1.1. Pour tout rationnel strictement positif, il existe un entier strictement plus grand que lui.

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Il existe des entiers p et q avec $q > 0$ tels que $x = \frac{p}{q}$ (propriété de \mathbb{Q}). Comme q est entier strictement positif, $q \geq 1$. Alors $p = xq \geq x$. En particulier, $p > 0$. D'où $2p > p$. Il vient $2p > x$. Comme $2p \geq 0$, on remarque que $2p \in \mathbb{N}$. On conclut que le double du numérateur $n = 2p$ convient.

2) Disjonction de cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E , on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E , puis pour les x n'appartenant pas à A . C'est la méthode de disjonction de cas.

Exemple 1.1.2. Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k(k+1)$ est un entier paire.

On distingue deux cas.

Ou bien k paire. Dans ce cas, l'entier $k(k+1)$ est paire comme produit d'un nombre paire et un entier. Ou bien k impaire. Dans ce cas, l'entier $(k+1)$ est paire, alors $k(k+1)$ est paire.

3) Raisonnement par contraposée

Pour démontrer une assertion du type $P \Rightarrow Q$, il suffit de démontrer sa contraposée $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$.

Exemple 1.1.3. Montrons que si x et y sont des réels distincts de 1, et si $x \neq y$, alors $\frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$.

La contraposée de l'énoncé est : si x et y sont des réels distincts de 1, et si $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1}$, alors $x = y$. Et c'est vrai, car

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1} \Rightarrow x-1 = y-1 \Rightarrow x = y.$$

4) Raisonnement par un contre exemple

Pour démontrer une assertion du type $(\exists x \in E), P(x)$, il suffit de donner un exemple d'un x qui convient. En passant à la négation, pour démontrer qu'une assertion du type $(\forall x \in E) P(x)$ est fausse, il suffit de donner un exemple d'un x qui ne convient pas. On appelle cela un *contre-exemple* à la propriété P .

Exemple 1.1.4. L'assertion tout entier positif est somme de trois carrés

est-elle vraie ? fausse ?

Sachant qu'il n'y a que deux carrés non nuls inférieurs ou égaux à 7, à savoir 1 et 4, le nombre 7 n'est pas somme de trois carrés. Cela prouve que l'assertion est fausse.

5) Le raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une assertion P est vraie, on peut supposer que P est fausse et en déduire une contradiction.

Exemple 1.1.5. Soient $x, y > 0$. Montrer que si $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$ alors $x = y$.

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$ et $x \neq y$. Comme $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$ alors $x(x+1) = y(y+1)$ donc $x^2 - y^2 = y - x$. Cela conduit à $(x-y)(x+y) = -(x-y)$. Or $x \neq y$ on obtient $x+y+1 = 0$ et $x, y > 0$ ce qui donne une contradiction. On déduit que pour $x, y > 0$, si $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$ alors $x = y$.

6) Le raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n , est vraie pour tout $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. Le raisonnement par récurrence se déroule en trois étapes : lors de la première étape on prouve $P(n_0)$. Pour l'étape deux, on suppose $n > n_0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ au rang suivant est vraie. Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 1.1.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

*pour $n = 0$ on a $0 = \frac{0(0+1)}{2}$. Donc $P(0)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$: $(1+2+3+\dots+n+(n+1)) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ est vraie .

$$\text{On a : } 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = [1 + 2 + 3 + \dots + n] + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

on déduit que $P(n+1)$ est vraie.

* Par le principe de récurrence, on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 1.1.6.

1. Démontrez par l'absurde que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle.
2. Montrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.
4. Fixons un réel $x > 0$. Montrer que pour tout entier $n > 1$, $(1+x)^n > 1+nx$.

1.1.6 Formule du binôme

Par multiplication nous trouvons :

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

etc... On peut tirer pour $n \in \mathbb{N}$ la formule :

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{(n-2)}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{(n-3)}b^3 + \dots nab^{n-1} + b^n$$

On peut écrire cette formule comme suit :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^k b^{(n-k)},$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ avec } n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 \text{ et } 0! = 1.$$

Application : Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $(1 + a)^6$ en fonction de a .

1.2 Les ensembles

1.2.1 Quelques notions de base

Définition 1.2.1. *Un ensemble est une collection clairement définie ou décrite d'objets que l'on appelle élément de l'ensemble.*

Exemples 1.2.1.

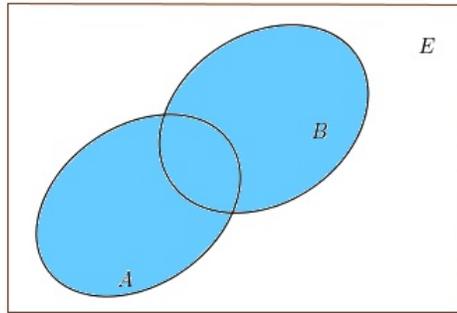
- $\{a, b, c\}$, $\{1, 2, 3\}$ et \mathbb{R} sont des ensembles.
- L'ensemble vide, noté \emptyset est l'ensemble ne contenant aucun élément.
- Soit E un ensemble et soit A un ensemble dont les éléments sont également éléments de E . On dit dans ce cas que A est inclus dans E et on note $A \subset E$. On dit de façon équivalente que A est une partie de E .
- L'ensemble constitué de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.
- Deux ensembles A et B sont égaux s'ils ont les mêmes éléments, c'est à dire si tout élément de A est un élément de B et si tout élément de B est un élément de A , ($A \subset B$ et $B \subset A$).

1.2.2 Opérations sur les ensembles

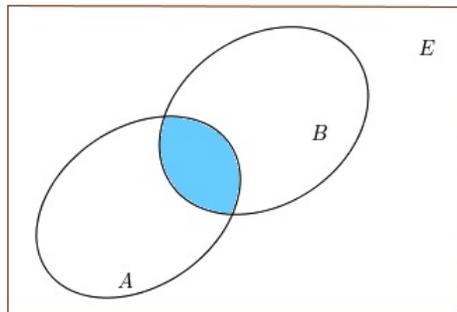
Soient A et B deux ensembles.

a . On appelle **union** de A et de B et on écrit $A \cup B$, l'ensemble défini par

$$A \cup B = \{x, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

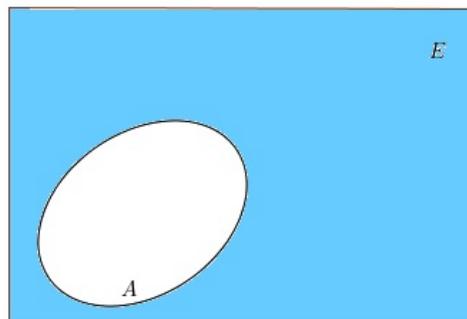


b . On appelle **intersection** de A et de B et on écrit $A \cap B$ l'ensemble défini par $A \cap B = \{x, x \in A \text{ et } x \in B\}$.

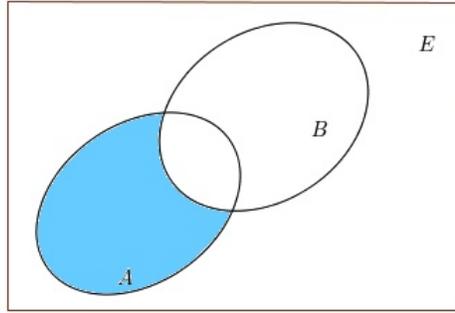


c . Deux ensembles sont dits disjoints si leur intersection est vide.

d . Soit E un ensemble et A une partie de E . On appelle **complémentaire** de A relativement à E et on note C_E^A ou $E \setminus A$ ou \bar{A} l'ensemble donné par $C_E^A = \{x \in E, x \notin A\}$. A noter que $C_E^{C_E^A} = A$.



e . La **différence** $A \setminus B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \notin B\}$.



f . Soient A et B deux ensembles non vides, on note $A \times B$ l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$. Il est appelé produit cartésien de A par B .

Exemple 1.2.1. Soient $E = \{a, b, 1, 2, 3, 5\}$ un ensemble et $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, et $C = \{a, 3, 5, 2\}$ trois parties de E on a :

$$\begin{aligned}
 A \cap C &= \{a\}, \\
 A \cup B &= \{1, 2, 3, a, b\} \text{ et } C \cup B = \{1, 2, 3, a, 5\}, \\
 C_E^A &= \{1, 2, 3, 5\} \\
 A \times B &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}, \\
 B \times A &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.
 \end{aligned}$$

Proposition 1.2.2. Soit A , B et C trois parties d'un ensemble E , on a :

1. $A \cap B = B \cap A$.
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, (on peut donc écrire $A \cap B \cap C$ sans ambiguïté) .
5. $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$.
6. $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$.

Remarque 1.2.3. Les preuves sont pour l'essentiel une reformulation des opérateurs logiques.

Exercice 1.2.4.

- a) Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ un ensemble et soit les parties suivantes de E : $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e\}$, $C = \{a, b, d, e, g\}$ et $D = \{c, d, e, g\}$.
 Déterminer $(A \cap B) \cup C$, $(A \cup D) \cap (B \cup C)$, $C_E^{A \cap B} \cap C_E^{C \cup D}$.

b) On appelle différence symétrique de deux sous ensembles A et B d'un ensemble E le sous ensemble :

$$A\Delta B = (A \cap C_E^B) \cup (B \cap C_E^A).$$

i) Déterminer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, et $A\Delta E$.

ii) Montrer que $A\Delta B = B\Delta A$ et $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Remarque 1.2.5. $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Correction de l'exercice 1.2.4 b)

b)i)-

$$\begin{aligned} A\Delta A &= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{A}) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} A\Delta\emptyset &= (A \cap \bar{\emptyset}) \cup (\emptyset \cap \bar{A}) \\ &= (A \cap E) \cup \emptyset \\ &= A \cup \emptyset \\ &= A \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} A\Delta E &= (A \cap \bar{E}) \cup (E \cap \bar{A}) \\ &= (A \cap \emptyset) \cup (E \cap \bar{A}) \\ &= \emptyset \cup \bar{A} \\ &= \bar{A} \end{aligned}$$

ii) Montrons que $A\Delta B = B\Delta A$ et $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B), (\forall E, F \in \mathcal{P}(E), E \cup F = F \cup E) \\ &= (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) \\ &= A\Delta B \end{aligned}$$

Posons $A\Delta B = D$. On a

$$\begin{aligned} (A\Delta B)\Delta C &= D\Delta C \\ &= (D \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{D}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D \cap \bar{C} &= [(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] \cap \bar{C} \\ &= (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \cap \bar{D} &= C \cap \overline{(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})} \\ &= C \cap \overline{(A \cap \bar{B} \cap B \cap \bar{A})} \\ &= C \cap [(\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A)] \\ &= C \cap [((\bar{A} \cup B) \cap \bar{B}) \cup ((\bar{A} \cup B) \cap A)] \\ &= C \cap [(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap A) \cup (B \cap A)] \\ &= (C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cup (C \cap B \cap A). \end{aligned}$$

Alors

$$(A \Delta B) \Delta C = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cup (C \cap B \cap A).$$

$x \in (A \Delta B) \Delta C$ alors soit il est dans les trois ensembles a la fois ou il est dans l'une des trois et n'est pas dans les deux autres. De la même façon on trouve

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) \cup (C \cap B \cap A).$$

1.3 Les applications

1.3.1 Généralités

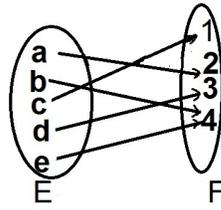
Définition 1.3.1.

Une application f est définie par son ensemble de départ E , son ensemble d'arrivée F , et une relation qui permet d'associer à tout $x \in E$ un élément unique y dans F . On le note $f(x)$. On note

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) = y \end{aligned}$$

y est dit l'image par f de x et x est dit un antécédent de y .

Remarque 1.3.2. Soit f une application de E dans F . Tout élément de E a une unique image, en revanche un élément de F peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents par f .

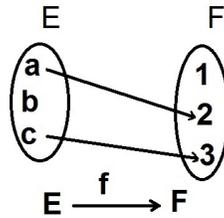


$$f : E \longrightarrow F$$

$$x \longrightarrow f(x)$$

Exemples 1.3.1.

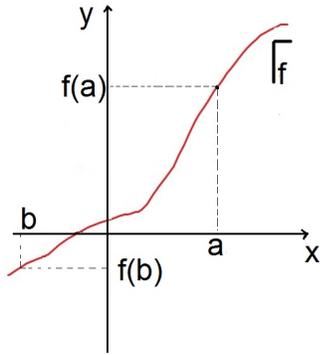
1. $Id_E : E \rightarrow E$ définie par $Id_E(x) = x$ est dite application identité de E .
2. $E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 2, 3\}$ et $f : E \rightarrow F$ définie par $f(a) = 2$, $f(c) = 3$, f n'est pas une application car b n'a pas d'image.



3. $E = \{a, b\}$, $F = \{1, 2, 3\}$ et $g : E \rightarrow F$ définie par $g(a) = 1$, $g(b) = 1$ est une application sur E .

Définition 1.3.3. On appelle **graphe** de l'application f d'une partie E de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , le sous ensemble (partie) de \mathbb{R}^2 noté Γ_f définit par :

$$\Gamma_f = \{(a, f(a)) / a \in E\}.$$



Définition 1.3.4. On dit que deux applications f et g de E dans F sont égales et on écrit $f = g$ sur E si $\forall x \in E$ $f(x) = g(x)$.

Exemple 1.3.1. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x^2}$

$f = g$ sur \mathbb{R}^+ car $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x^2} = x$.

Attention : $f \neq g$ sur \mathbb{R} , car $f(-1) = -1$ et $g(-1) = 1$.

Définition 1.3.5. On appelle **fonction** de E dans F , toute application f d'un sous ensemble $D_f \subset E$ dans F . D_f est appelée ensemble de définition de f .

1.3.2 Composition des applications

Définition 1.3.6. Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux applications. La composée de g et f est l'application $g \circ f: E \rightarrow G$ définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemple 1.3.2. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x + 1$ et $x \mapsto x^3$. Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que $f \circ g(x) = x^3 + 1$ et $g \circ f(x) = (x + 1)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

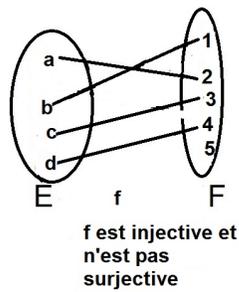
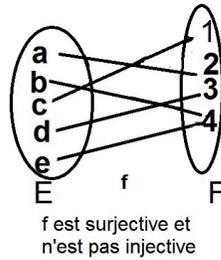
1.3.3 Injection, surjection et bijection

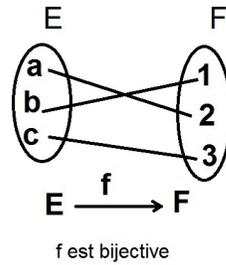
Définitions 1.3.7. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F .

- f est **injective** si $\forall x, x' \in E$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

- f est **surjective** si $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $f(x) = y$.
- f est **bijective** si f est à la fois injective et surjective. Cela équivaut à ; $\forall y \in F, \exists! x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Une autre formulation : f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.





Exemples 1.3.2.

- . $E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 2, 3\}$ et $f : E \rightarrow F$ définie par $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ et $f(c) = 1$ est une application injective et surjective donc elle est bijective.
- . $E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 2\}$ et $g : E \rightarrow F$ définie par $g(a) = 1$, $g(b) = 1$ et $g(c) = 2$ est une application qui n'est pas injective car $g(a) = g(b)$ et $a \neq b$, mais elle est surjective car 1 et 2 ont des antécédents.

Théorème 1.3.8. L'application $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement si il existe une unique application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. On note $g = f^{-1}$. f^{-1} est dite l'application **réciproque** de f sur E .

Exemple 1.3.3. Soit

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[\\ x \longmapsto x^2 + 1$$

On pose $y = f(x)$ avec $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [1, +\infty[$, donc $x^2 = y - 1$, alors $x = \pm\sqrt{y - 1}$ et puisque $x \in [0, +\infty[$ alors $x = \sqrt{y - 1}$, donc l'application réciproque de f est :

$$f^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\\ x \longmapsto \sqrt{x - 1}$$

Remarque 1.3.9. Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont deux applications telles que $g \circ f = Id_E$ alors f et g ne sont pas forcément bijectives.

Par exemple, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$ vérifient $g \circ f = Id_{\mathbb{R}^+}$, mais f n'est pas surjective, et g n'est pas injective.

Proposition 1.3.10. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications on a :

- a) Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
- b) Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- c) Si $g \circ f$ est injective, alors f l'est aussi.
- d) Si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est aussi.
- e) Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve

On va montrer e).

On a

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ Id_F \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= Id_G\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &= f^{-1} \circ Id_F \circ f \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= Id_E\end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est bijective de réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Remarque 1.3.11. Les réciproques de ces implications ne sont pas toujours vraies.

Etant données les applications suivantes :

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln|x|\end{aligned}$$

on a $f \circ g(x) = x \forall x \in \mathbb{R}$ donc $f \circ g$ est injective mais g ne l'est pas et $g \circ f$ est surjective et f ne l'est pas.

1.3.4 Image directe image réciproque

Définition 1.3.12. Soient $f : E \rightarrow F$ une application et A, B deux ensembles tel que $A \subset E$ et $B \subset F$.

- 1) L'image directe de A par f est $f(A) = \{f(a)/a \in A\}$.
- 2) L'image réciproque de B par f est $f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}$.

Exemple 1.3.4. Considérons l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n + 1$ et $A = \{0, 1, 3\}$ et $B = \{5, 11, 21\}$. On a $f(A) = \{1, 3, 7\}$ et $f^{-1}(B) = \{2, 5, 10\}$.

Remarques 1.3.13. Si f est une application de E dans F alors :

- 1) $f(A)$ est un sous-ensemble de F et $f^{-1}(B)$ est un sous-ensemble de E .
- 2) La notation « $f^{-1}(B)$ » ne signifie pas que f est bijective. L'image réciproque existe quelque soit l'application.

Exercice 1.3.14. Soit A, B deux parties d'un ensemble E et f une fonction définie sur E .
A-t-on nécessairement :
 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Exercice 1.3.15. Déterminer les injections, les surjections et les bijections parmi les applications suivantes :

i)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x + 1 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned} k : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

Exercice 1.3.16. Soient $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} \frac{k+1}{2} & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{k}{2} & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

a) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g .

b) Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ puis étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

1.3.5 Exercices

Exercice 1. Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Donner la négation des énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leq 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$. Démontrer que :

$$\begin{aligned}\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) &\Rightarrow (f(A) \subset f(B)), \\ \forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B), \\ \forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B), \\ \forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),\end{aligned}$$

Exercice 3. Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X, X)$, on définit $f^0 = id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f \circ f^n$.
2. Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.

Exercice 4. Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 5.

1. Soient x et y deux réels de l'intervalle $]1, +\infty[$.
Montrer que si $x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$
2. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0; |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

Exercice 6. Soit A, B deux ensembles, montrer que

$$\mathcal{C}_E^{(A \cup B)} = \mathcal{C}_E^A \cap \mathcal{C}_E^B \text{ et } \mathcal{C}_E^{(A \cap B)} = \mathcal{C}_E^A \cup \mathcal{C}_E^B.$$

Chapitre 2

Factorisation des polynômes

2.1 Rappel sur les nombres complexes

2.1.1 L'ensemble \mathbb{C}

Théorème 2.1.1. (*admis*) Il existe un ensemble noté \mathbb{C} , appelé **ensemble des nombres complexes**, qui possède les propriétés suivantes :

1. \mathbb{C} contient l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$,
2. il existe un nombre complexe, noté i tel que $i^2 = -1$,
3. tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels.

Exemples 2.1.1.

$$z = 3 + 2i \in \mathbb{C}; \quad z_2 = -5 \in \mathbb{R}, \text{ donc } z_2 \in \mathbb{C}; \quad z_3 = \sqrt{7} - 6i \in \mathbb{C}.$$

Remarques 2.1.2.

• L'écriture $z = x + iy$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe z .

• x est la **partie réelle** de z , notée $\Re(z)$, et y est la **partie imaginaire** de z , notée $\Im(z)$.

D'après le premier théorème et l'unicité de l'écriture sous forme algébrique, on a donc :

Théorème 2.1.3. Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a' et b' quatre nombres réels, alors,

$$z = z' \iff (a = a' \text{ et } b = b').$$

2.1.2 Plan complexe

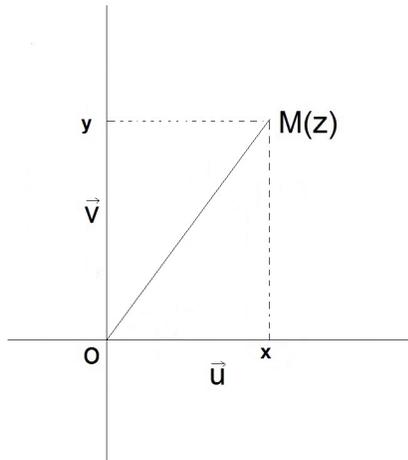
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ directe.

. A tout nombre complexe $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, on associe le point M de coordonnées $M(x; y)$.

On dit que z est l'affixe du point M , ou du vecteur \overrightarrow{OM} ; et que le point M , ou le vecteur \overrightarrow{OM} est l'image de z .

. Soient deux points A et B d'affixe z_A et z_B , alors l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} est $z_B - z_A$.

. Soient \vec{U} et \vec{V} deux vecteurs d'affixe z et z' , alors le vecteur $\vec{U} + \vec{V}$ a pour affixe $z + z'$.
De plus, si $k \in \mathbb{R}$, le vecteur $k\vec{U}$ a pour affixe kz .



Exercice 2.1.4. Les points A , B et C ont pour affixe respective $-2 + i$, $3 + 3i$, $2 + \frac{13}{5}i$.

- Calculer les affixes des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
- En déduire que les points A , B et C sont alignés.
- Représenter graphiquement les points A , B et C .

2.1.3 Opérations sur les nombres complexes

Les règles de calcul sur les nombres réels s'étendent aux nombres complexes avec la prise en considération de $i^2 = -1$.

Exercice 2.1.5. Soient x, y, x', y', a, b des nombres réels. Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

$$1) (2 + 3i) + (-1 + 6i) \quad 2) (5 + i) - (3 - 2i) \quad 3) (1 + i)(3 - 2i)$$

$$4) (4 + i)(-5 + 3i) \quad 5) (2 - i)^2 \quad 6) (x + iy)(x' + iy')$$

$$7) (x + iy)^2 \quad 8) (a + ib)(a - ib).$$

2.1.4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2.1.6. Soit $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ un nombre complexe. On appelle *conjugué* de z , noté \bar{z} , le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$.

Proposition 2.1.7. Dans le plan complexe, si le point M a pour affixe z , alors l'image M' de \bar{z} est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Exemples 2.1.2.

1. $z = 3 + 2i$, alors $\bar{z} = 3 - 2i$,

2. $\overline{3 - \frac{1}{2}i} = 3 + \frac{1}{2}i$,

3. $\overline{-5} = -5$,

4. $\overline{3i} = -3i$.

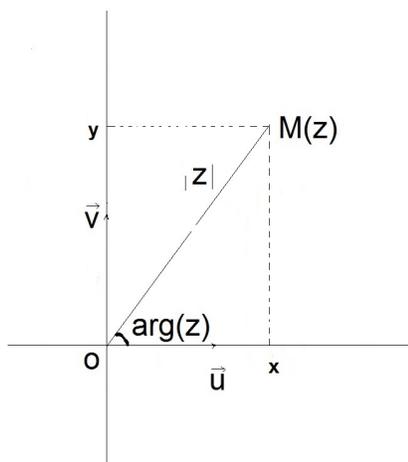
2.1.5 Module et argument d'un nombre complexe

Définitions 2.1.8. Soit dans le plan complexe un point M d'affixe $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Alors,

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Ce nombre **réel et positif** s'appelle le **module** du nombre complexe z , et est noté $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On appelle **argument** du nombre complexe non nul z , noté $\arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Remarques 2.1.9.

1. Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments.
2. Si θ est un arguments d'un nombre $z \in \mathbb{C}$, alors tous les autres sont de la forme $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et on écrit $\arg(z) = \theta$ (modulo 2π), ou $\arg(z) = \theta [2\pi]$, ou encore, pour simplifier, $\arg(z) = \theta$.
3. Si $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$ on écrit $z = [r, \theta]$.
4. Si $|z| = r$, le nombre complexe z s'écrit alors de façon unique : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, cette écriture s'appelle **forme trigonométrique** de z .
5. Si $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$ alors $z = r \exp(i\theta)$ s'appelle **forme exponentielle** du nombre complexe z .

Proposition 2.1.10. Soit z et z' deux complexes et n un entier relatif on a :

1. $|-z| = |z|$ et $|\bar{z}| = |z|$,
2. $|zz'| = |z||z'|$,
3. $|z^n| = |z|^n$,
4. $\frac{|z|}{|z'|} = |\frac{z}{z'}|$,
5. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire),
6. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$,
7. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$,
8. $\arg(z^n) = n\arg(z)$,
9. $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')$.

Exercice 2.1.11. Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants :

- | | | |
|--------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 1) 5 | 2) $4 + 4i$ | 3) $(4 + 4i)^5$ |
| 4) $\frac{5}{1-i}$ | 5) $\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}$ | 6) $(\sqrt{3} - i)^{-3}$. |

2.1.6 Racines n -ièmes d'un nombre complexe

a. Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 2.1.12. Soit $z = a + ib$ un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle racine carrée de Z , un nombre complexe u vérifiant $u^2 = z$.

1. Méthode de résolution algébrique de $u^2 = z$.

Posons $z = a + ib$, on cherche les racines carrées de z sous la forme $u = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$u^2 = z \Leftrightarrow (x + iy)^2 = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne les racines carrées u de z .

2. Méthode de résolution trigonométrique de $u^2 = z$.

Posons $z = [r, \alpha]$ un complexe. Le nombre complexe $u = [\rho, \theta]$ est racine carrée de z si et seulement si $z = u^2$

$$[\rho^2, 2\theta] = [r, \alpha] \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = r, \\ 2\theta \equiv \alpha[2\pi], \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{r}, \\ \theta \equiv \frac{\alpha}{2}[\pi], \end{cases}$$

Exemple 2.1.1. D'après la méthode algébrique, on cherche les racines carrées de $z = 1 + i$ sous la forme $u = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a $z = u^2$ i.e.

$$1 + i = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

On ajoute l'équation $x^2 + y^2 = |u|^2 = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, \\ y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, \\ y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}. \end{cases}$$

Enfin, l'équation $2xy = 1 > 0$ nous dit que x et y doivent être de même signe. Il vient donc :

$$u = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right).$$

b. Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Définition 2.1.13. Soit z un complexe. On appelle racine n -ième de z , tout nombre complexe u vérifiant $u^n = z$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 2.1.14. Pour extraire les racines n -ièmes ($n \geq 3$) d'un nombre complexe z , il faut impérativement passer par la forme trigonométrique de z .

Soit $z = [r, \alpha]$ un complexe. Posons $u = [\rho, \theta]$ une racine n -ième de z i.e. $u^n = z$

$$u^n = z \Leftrightarrow [\rho^n, n\theta] = [r, \alpha] \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r, \\ n\theta \equiv \alpha[2\pi], \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \\ \theta \equiv \frac{\alpha}{n}[\frac{2\pi}{n}]. \end{cases}$$

Conclusion : L'ensemble S des solutions de l'équation $u^n = z$ est :

$$S = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\} \text{ avec } z_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right], 0 \leq k \leq n-1.$$

c. Racines n -ièmes de l'unité

Définition 2.1.15. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle racine n -ième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 2.1.16. L'ensemble des racines n -ièmes de l'unité est : $\{ \exp(\frac{2k\pi i}{n}) | k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\} \}$.

Exemple 2.1.2. L'ensemble des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^4 = 1$ est :
 $\{ \exp(\frac{2k\pi i}{n}) | k \in \{0, 1, 2, 3\} \} = \{ \exp(0), \exp(\frac{\pi i}{2}), \exp(\pi i), \exp(\frac{3\pi i}{2}) \}$
 $= \{1, i, -1, -i\}$.

Exercice 2.1.17. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- 1) $z^6 = 1$,
- 2) $z^6 = 2i$.

2.1.7 Équations du second degré dans \mathbb{C}

Théorème 2.1.18. On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ tel que $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution (dite solution double) $z = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$ l'équation admet deux solutions distincts $z_1 = \frac{-b+d}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-d}{2a}$, avec d une racine carrée de Δ .

Exemple 2.1.3. On résout dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + (1-i)z - \frac{2+3i}{4} = 0$.

Le discriminant $\Delta = (1-i)^2 - 4(-\frac{2+3i}{4}) = -2i + 2 + 3i = 2 + i \neq 0$.

Les racines carrées de $2 + i$ sont $\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \right)$. Les solutions de l'équation sont donc :

$$z_1 = \frac{-1+i + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \right)}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1+i - \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \right)}{2}.$$

Exercice 2.1.19. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- a) $z^2 - z + 1 = 0$.
- b) $z^2 - 3iz + 2 = 0$.
- c) $-2iz^2 + 9z - 4 = 0$.
- d) $-z^2 + (1 + \sqrt{3})z - \sqrt{3} = 0$.

2.2 Les polynômes

2.2.1 Définitions et notations

Dans tout ce qui suit \mathbb{K} désignera l'un des ensembles \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 2.2.1. Un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} est une expression de la forme

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

Notations et Terminologies

- . L'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathbb{K}[X]$.
- . Les a_i sont appelés les coefficients du polynôme.
- . Si tous les coefficients a_i sont nuls, P est appelé le polynôme nul, il est noté 0.
- . On appelle le degré de P le plus grand entier i tel que $a_i \neq 0$, on le note $\deg P$ où $d^\circ P$.
Pour le degré du polynôme nul on pose par convention $\deg(0) = -\infty$.
- . On note $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$.
- . Les polynômes comportant un seul terme non nul (du type $a_k X^k$) sont appelés monômes.
Tout polynôme est donc une somme finie de monômes.
- . Un polynôme de la forme $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{K}$ est appelé un polynôme constant. Si $a_0 \neq 0$, son degré est 0.
- . Si i est le plus petit entier $0 \leq i \leq n$ tel que $a_i \neq 0$, alors a_i est appelé le coefficient dominant de $P(X)$.
- . Un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est égal à 1.
- . Deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont associés s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \alpha P$.

Exemples 2.2.1.

- a. $X^4 - 3X^2 + 2$ est un polynôme de degré 4 à coefficients dans \mathbb{R} .
- b. $X^7 + \sqrt{2} - 2iX^9 + 3X$ est un polynôme de degré 9 à coefficients dans \mathbb{C} .
- c. $X^n + 1$ est un polynôme de degré n à coefficients dans \mathbb{R} .
- d. 2 est un polynôme constant, de degré 0.
- e. $P(X) = (X-1)(X^8 + X^7 + \dots + X + 1)$. On a $P(X) = (X^9 + X^8 + \dots + X^2 + X) - (X^8 + X^7 + \dots + X + 1) = X^9 - 1$. $P(X)$ est donc un polynôme de degré 9, il est unitaire.
- f. Les polynômes $P(X) = 3X^2 - 2X + 1$ et $Q(X) = -X^2 + \frac{2}{3}X - \frac{1}{3}$ sont associées car $P(X) = -3Q(X)$.

2.2.2 Opérations sur les polynômes

* **Égalité.** Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0$ deux polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .

$$P = Q \iff \forall i \text{ tel que } 0 \leq i \leq n \quad a_i = b_i,$$

et on dit que P et Q sont égaux.

Comme conséquence, un polynôme est nul ssi tous ses coefficients sont nuls.

* **Addition.** Soient $P = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \dots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0$ avec $m \geq n$.

On définit :

$$P + Q = a_m X^m + \dots + (a_n + b_n) X^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) X + (a_0 + b_0).$$

* **Multiplication par un scalaire.** Si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda \cdot P$ est le polynôme dont le i -ème coefficient est λa_i .

* **Multiplication.** Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_1 X + b_0$. On définit

$$P \times Q = c_r X^r + c_{r-1} X^{r-1} + \dots + c_1 X + c_0$$

$$\text{avec } r = n + m \text{ et } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \text{ pour } k \in \{0, \dots, r\}.$$

Exemples 2.2.2. Soient $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- $P + Q = aX^3 + (b + \alpha)X^2 + (c + \beta)X + (d + \gamma)$,
- $\lambda P = \lambda aX^3 + \lambda bX^2 + \lambda cX + \lambda d$,
- $P \times Q = (a\alpha)X^5 + (a\beta + b\alpha)X^4 + (a\gamma + b\beta + c\alpha)X^3 + (b\gamma + c\beta + d\alpha)X^2 + (c\gamma + d\beta)X + d\gamma$.
- $P = Q$ si et seulement si $a = 0$, $b = \alpha$, $c = \beta$ et $d = \gamma$.

Proposition 2.2.2. Pour $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ on a :

1. $0 + P = P$, $P + Q = Q + P$, $(P + Q) + R = P + (Q + R)$;
2. $1 \cdot P = P$, $P \times Q = Q \times P$, $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R)$;
3. $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$.

Proposition 2.2.3. Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans \mathbb{K} . On a

1. $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$,
2. $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$.

Remarque 2.2.4. Il faut faire attention au degré de la somme de deux polynômes.

Exemple 2.2.1. $P(X) = X^4 - 3X^2 + 2$ est un polynôme de degré 4, $Q(X) = -X^4 + 5X^3 - 3$ est un polynôme de degré 4 et $(P + Q)(X) = 5X^3 - 3X^2 - 1$ est de degré 3.

Exercice 2.2.5.

i) Soit $Q(X) = 2X^2 - 3$, $P(X) = X^3 - 2X + 1$ et $R(X) = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $P + Q$, $P \times Q$, $(P + Q) \times R$ et $P \times Q \times R$.

2. Trouver a et b pour que P soit égal à QR si c'est possible.

3. Trouver a et b afin que le degré de $P - QR$ soit le plus petit possible.

ii) Montrer que si $\deg P \neq \deg Q$ alors $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

Définition 2.2.6. Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. Pour un élément $x \in \mathbb{K}$, on note $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. On associe ainsi au polynôme P une **fonction polynôme** (que l'on note encore P),

$$P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

2.2.3 Division suivant les puissances croissantes

Soit $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tel que le coefficient constant $B(0)$ de $B(X)$ est non nul. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, peut-on trouver $Q(X)$ et $R(X)$ tels que $A(X) = Q(X)B(X) + X^{n+1}R(X)$ avec $\deg(Q(X)) \leq n$?

Dans le cas affirmatif, comment peut-on trouver les polynômes $Q(X)$ et $R(X)$?

Théorème 2.2.7. Soient $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes de $K[X]$ tel que $B(0) \neq 0$, il existe un couple et un seul de polynômes $(Q(X), R(X))$ de $K[X]$ vérifiant

$$A(X) = Q(X)B(X) + X^{n+1}R(X) \text{ avec } \deg(Q(X)) \leq n.$$

L'entier n est appelé l'ordre de la division suivant les puissances croissantes de $A(X)$ par $B(X)$.

Exemple 2.2.2. On effectue la division suivant les puissances croissantes du polynôme

$A(X) = X^3 - 3X^2 + 1$ par $B(X) = X^2 - X + 1$ à l'ordre $n = 3$. On a $B(0) \neq 0$.

$$\begin{array}{r|l}
 1 & -3X^2 + X^3 \\
 - & \\
 \hline
 1 - X & +X^2 \\
 & X - 4X^2 + X^3 \\
 - & \\
 & X - X^2 + X^3 \\
 & \hline
 & -3X^2 \\
 - & \\
 & -3X^2 + 3X^3 - 3X^4 \\
 & \hline
 & -3X^3 + 3X^4 \\
 - & \\
 & -3X^3 + 3X^4 - 3X^5 \\
 & \hline
 & 3X^5
 \end{array}$$

On a $A(X) = (1 + X - 3X^2 - 3X^3)B(X) + X^4(3X)$, alors $Q(X) = 1 + X - 3X^2 - 3X^3$ et $R(X) = 3X$, $\deg Q = 3 \leq 3$.

Exercice 2.2.8.

Effectuer la division suivant les puissances croissantes de P par Q à l'ordre k dans les cas suivants :

1. $P = 3X^3 + X^2 - 2$, $Q = X + 2$, $k \in \{1, 2\}$.
2. $P = X^4 + 2X^3 - X + 1$, $Q = X^2 - X + 1$, $k = 3$.

2.2.4 La division euclidienne des polynômes (division suivant les puissances décroissante)

Soient $A(x)$ et $B(X)$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $B(X)$ non nul, existe-t-il $Q(X)$ et $R(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$A(X) = Q(X)B(X) + R(X) \text{ avec } \deg(R(X)) < \deg(B(X))?$$

Théorème 2.2.9. Soient $A, B \in K[X]$, avec $B \neq 0$, il existe un couple de polynômes $(Q(X), R(X))$ de $K[X]$ vérifiant

$$A(X) = Q(X)B(X) + R(X) \text{ avec } \deg(R(X)) < \deg(B(X)).$$

Remarques 2.2.10.

1. Q est appelé le quotient et R le reste et cette écriture est la **division euclidienne** de A par B .

2. Notez que la condition $\deg R < \deg B$ signifie $R = 0$ ou bien $R \neq 0$ et $\deg R < \deg B$.

Définition 2.2.11. On dit que $B(X)$ divise $A(X)$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$ est nul.

Exemples 2.2.3.

a- Si $P(X) = X^3 - 3X^2 + 1$ et $Q(X) = X^2 - 1$. Effectuons la division euclidienne de P par Q .

$$\begin{array}{r|l}
 X^3 - 3X^2 & +1 \\
 - & \\
 \hline
 X^3 & -X \\
 \hline
 -3X^2 & +X +1 \\
 - & \\
 -3X^2 & +3 \\
 \hline
 X & -2
 \end{array}$$

Alors $P(X) = (X - 3)Q(X) + X - 2$, $\deg R = 1 < 2 = \deg Q$.

b- Pour $P(X) = X^2 - 3X + 2$ et $Q(X) = X - 1$ on a :

$$X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2) = (X - 1)Q(X). \text{ Dans ce cas } Q \text{ divise } P.$$

c- Si $P(X) = 4X - 2$ et $Q(X) = X^2 - 2X + 1$ alors on peut écrire :

$$4X - 2 = 0(X^2 - 2X + 1) + 4X - 2 \text{ et par conséquent } Q(X) = 0 \text{ et } R(X) = P(X).$$

Exercice 2.2.12. Effectuer la division euclidienne de P par Q dans les cas suivants :

1. $P = 2X^3 - 3X^2 + 1$, $Q = X + 2$.
2. $P = 3X^4 + 2X^3 - X + 1$, $Q = X^2 - X + 2$.
3. $P = 3X^5 + X^3 + X^2 - X - 1$, $Q = X^2 - 1$.
4. $P = X^5 + 2X^3 + X - 2$, $Q = X^2 + X - 4$.

Exercice 2.2.13. Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $P = 3X^4 + aX^3 - 2X + b$ soit divisible par $Q = X^2 + X - 1$.

2.3 Racine d'un polynôme, factorisation

2.3.1 Racines d'un polynôme

Définition 2.3.1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une **racine** de P si $P(a) = 0$.

Exemple 2.3.1. Soit $P(X) = 3X^4 - 2X^3 + X - 2$.

On a $P(1) = 0$ donc 1 est une racine du polynôme P , $P(2) = 32$ alors 2 n'est pas une racine de P .

Théorème 2.3.2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors

$$P(a) = 0 \iff X - a \text{ divise } P.$$

preuve

Soit Q le quotient et R le reste de la division euclidienne de P par $X - a$. Alors $P = Q \cdot (X - a) + R$ où R est une constante car $\deg R < \deg(X - a) = 1$.

Donc $P(a) = 0 \iff R(a) = 0 \iff X - a \text{ divise } P$.

Définition 2.3.3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est une **racine de multiplicité k** de P si $(X - a)^k$ divise P alors que $(X - a)^{k+1}$ ne divise pas P . Lorsque $k = 1$, on parle d'une **racine simple**, lorsque $k = 2$, d'une **racine double**, etc.

On dit aussi que a est une **racine d'ordre k** .

Exemple 2.3.2. On considère le polynôme $P(X) = 5X^3 - \frac{37}{2}X^2 + 14X - 6$.

On a $P(2) = 0$ donc 2 est une racine du polynôme P . En effectuant la division euclidienne de P par $X - 2$, on trouve $P(X) = (X - 2)Q(X)$ avec $Q(X) = 5X^2 - \frac{17}{2}X - 3$. On remarque que $Q(2) = 0$ et $Q(X) = (X - 2)(5X + \frac{3}{2})$. Finalement $P(X) = (X - 2)^2(5X + \frac{3}{2})$. 2 est une racine de multiplicité 2 de P car $(X - 2)^2$ divise P et $(X - 2)^3$ ne divise pas P .

Théorème 2.3.4 (Théorème de d'Alembert-Gauss). Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$ a au moins une racine dans \mathbb{C} . Il admet exactement n racines si on compte chaque racine avec multiplicité.

Exemples 2.3.1. Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients complexes avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$ alors P admet 2 racines complexes distinctes $\frac{-b+d}{2a}$ et $\frac{-b-d}{2a}$ avec d une racine carrée de Δ .
- Si $\Delta = 0$ alors P admet une racine réelle double $\frac{-b}{2a}$.

En tenant compte des multiplicités on a donc toujours exactement 2 racines.

Pour les autres ensembles que les nombres complexes nous avons le résultat plus faible suivant :

Théorème 2.3.5. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$. Alors P admet au plus n racines dans \mathbb{K} .

Exemple 2.3.3. Considérons le polynôme $P(X) = -3X^3 + 2X^2 - 3X + 2$ à coefficients dans \mathbb{Q} ou \mathbb{R} , P n'a qu'une seule racine (qui est simple) $\alpha = \frac{2}{3}$ et il se décompose en $P(X) = -3(X - \frac{2}{3})(X^2 + 1)$. Si on considère maintenant P comme un polynôme à coefficients dans \mathbb{C} alors $P(X) = -3(X - \frac{2}{3})(X - i)(X + i)$ et admet 3 racines simples qui sont $\frac{2}{3}$, i et $-i$.

2.3.2 Formule de Taylor

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ un polynôme de $K[X]$ et $k \in \mathbb{N}$.

Définition 2.3.6. Le $n^{\text{ème}}$ polynôme dérivée de $P(X)$ est le polynôme $P^{(n)}(X)$ définie par :

1. $P^{(0)}(X) = P(X)$.
2. $P^{(1)}(X) = a_1 + 2a_2X + \dots + na_nX^{n-1}$.
3. $P^{(n)}(X) = (P^{(n-1)}(X))^{(1)}$, pour $n \geq 2$.

On note $P^{(1)}(X) = P'(X)$ et $P^{(2)}(X) = P''(X)$.

Exemple 2.3.4. Si $P(X) = X^3 - 3X^2 + 1$ alors $P'(X) = 3X^2 - 6X$, $P''(X) = 6X - 6$, $P^{(3)}(X) = 6$ et $P^{(k)}(X) = 0 \forall k \geq 4$.

Proposition 2.3.7. Soit $P(X) \in K_n[X]$ et $a \in K$, la formule de Taylor de $P(X)$ en a s'écrit :

$$P(X) = P(a) + \frac{P^{(1)}(a)}{1!}(X-a) + \frac{P^{(2)}(a)}{2!}(X-a)^2 + \frac{P^{(3)}(a)}{3!}(X-a)^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n.$$

Exemple 2.3.5. Soit $P(X) = X^3 - 3X^2 + 1$. Alors $P'(X) = 3X^2 - 6X$, $P''(X) = 6X - 6$, $P^{(3)}(X) = 6$. On a $P(2) = -3$, $P'(2) = 0$, $P''(2) = 6$ et $P^{(3)}(2) = 6$.

La formule de Taylor de P au point 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} P(X) &= P(2) + \frac{P'(2)}{1!}(X-2) + \frac{P''(2)}{2!}(X-2)^2 + \frac{P^{(3)}(2)}{3!}(X-2)^3 \\ &= -3 + \frac{0}{1}(X-2) + \frac{6}{2}(X-2)^2 + \frac{6}{6}(X-2)^3 \\ &= -3 + 3(X-2)^2 + (X-2)^3. \end{aligned}$$

Proposition 2.3.8. Soit P un polynôme, $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) α est une racine de multiplicité d'ordre k de P .
- (ii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^k Q$, avec $Q(\alpha) \neq 0$.
- (iii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Exemple 2.3.6. $P(X) = X^n - 1$ admet n racines distinctes.

Sachant que P est de degré n alors par le théorème de d'Alembert-Gauss on sait qu'il admet n racines comptées avec multiplicité. Il s'agit donc maintenant de montrer que ce sont des racines simples. Supposons –par l'absurde– que $\alpha \in \mathbb{C}$ soit une racine de multiplicité ≥ 2 . Alors

$$P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) = 0.$$

Donc

$$\alpha^n - 1 = 0 \text{ et } n\alpha^{n-1} = 0.$$

De la seconde égalité on déduit $\alpha = 0$, contradictoire avec la première égalité. Donc toutes les racines sont simples. Ainsi les n racines sont distinctes.

2.3.3 Polynômes irréductibles

Définition 2.3.9. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré supérieure à 1, on dit que P est *irréductible* si pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ divisant P , alors, soit $Q \in \mathbb{K}^*$, soit P et Q sont associés.

Remarques 2.3.10.

1. Un polynôme irréductible P est donc un polynôme non constant dont les seuls diviseurs de P sont les constantes ou P lui-même.
2. Dans le cas contraire, on dit que P est **réductible**; il existe alors des polynômes A, B de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P = AB$, avec $\deg A \geq 1$ et $\deg B \geq 1$.

Exemples 2.3.2.

- Tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
- $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2) \in \mathbb{R}[X]$ est réductible.
- $X^2 - 3 = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})$ est réductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- $X^2 + 4 = (X - 2i)(X + 2i)$ est réductible dans $\mathbb{C}[X]$ mais est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Théorème 2.3.11. Tout polynôme non constant $A \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles unitaires :

$$A = \lambda P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_r^{k_r}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ et les P_i sont des polynômes irréductibles distincts.

De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Théorème 2.3.12. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ la factorisation s'écrit :

$$P = \lambda (X - \alpha_1)^{k_1} (X - \alpha_2)^{k_2} \dots (X - \alpha_r)^{k_r},$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines distinctes de P et k_1, \dots, k_r sont leurs multiplicités.

preuve

Ce théorème résulte du théorème de d'Alembert-Gauss.

Théorème 2.3.13. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ainsi que les polynômes de degré 2 ayant un discriminant $\Delta < 0$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$. Alors la factorisation s'écrit $P = \lambda (X - \alpha_1)^{k_1} (X - \alpha_2)^{k_2} \dots (X - \alpha_r)^{k_r} Q_1^{\ell_1} \dots Q_s^{\ell_s}$, où les α_i sont exactement les racines réelles distinctes de multiplicité k_i et les Q_i sont des polynômes irréductibles de degré 2 : $Q_i = X^2 + \beta_i X + \gamma_i$ avec $\Delta = \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$.

Exemples 2.3.3.

1) Soit $P(X) = X^3 - 3X^2 + 4$. Écrivons La formule de Taylor de P au point 2.

On a $P'(X) = 3X^2 - 6X$, $P''(X) = 6X - 6$, $P^{(3)}(X) = 6$. Alors $P(2) = 0$, $P'(2) = 0$, $P''(2) = 6$ et $P^{(3)}(2) = 6$.

La formule de Taylor de P au point 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} P(X) &= P(2) + \frac{P'(2)}{1!}(X-2) + \frac{P''(2)}{2!}(X-2)^2 + \frac{P^{(3)}(2)}{3!}(X-2)^3 \\ &= 3(X-2)^2 + (X-2)^3. \\ &= (X-2)^2(3+X-2). \\ &= (X-2)^2(X+1). \end{aligned}$$

2) Soit $P(X) = 2X^4(X-1)^3(X^2+1)^2(X^2+X+1)$.

$P(X)$ est déjà décomposé en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ alors que sa décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$P(X) = 2X^4(X-1)^3(X-i)^2(X+i)^2(X-j)(X-j^2)$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

3) Soit $P(X) = X^4 + 1$.

– **Sur** \mathbb{C} . On peut d'abord décomposer $P(X) = (X^2 + i)(X^2 - i)$. Les racines de P sont donc les racines carrées complexes de i et $-i$ qui sont $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ respectivement. Ainsi P se factorise dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) \left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right) \left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right).$$

– **Sur** \mathbb{R} . Pour un polynôme à coefficients réels, si α est une racine alors $\bar{\alpha}$ aussi. Dans la décomposition ci-dessus on regroupe les facteurs ayant des racines conjuguées, cela doit conduire à un polynôme réel :

$$\begin{aligned} P(X) &= \left[\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right) \right] \left[\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) \left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right) \right] \\ &= [X^2 + \sqrt{2}X + 1] [X^2 - \sqrt{2}X + 1], \end{aligned}$$

qui est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.3.14.

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

a) $X^8 - 1$;

b) $(2X^2 + X - 2)^2(X^4 - 1)^3$.

2. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^3 + (4+i)X^2 + (5-2i)X + 2 - 3i$.

2.3.4 Exercices

Exercice 1. Soit θ un réel et $n \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ (Formule de Mœivre).

2. i) Montrer que $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ (Formules d'Euler).

ii) Linéariser $\cos^3(\theta)$ et $\sin^3(\theta)$.

Exercice 2. Soit $P(X) = X^8 + X^4 + 1$, $Q(X) = X^4 + X^2 + 1$ et $R(X) = X^4 - X^2 + 1$ trois polynômes à coefficient dans \mathbb{R} .

1. Vérifier que $P(X) = Q(X)R(X)$.
2. Décomposez en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les deux Polynôme $P(X)$ et $Q(X)$.
3. En déduire la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

1. Vérifier que $P(\bar{\alpha}) = 0$.
2. Montrer que $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$ et qu'il divise P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n . Déterminer le degré du polynôme $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.
2. Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $3P(X) = XP(X)$.

Chapitre 3

Fractions rationnelles

Dans tout ce qui suit, \mathbb{K} désignera l'un des ensembles \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

3.1 Définitions et propriétés générales

Définition 3.1.1.

On appelle fraction rationnelle à coefficients dans \mathbb{K} toute fraction F de la forme $F = \frac{A}{B}$ où A et B sont deux polynômes avec $B \neq 0$, dans ce cas, on dit que $\frac{A}{B}$ est une forme de F , si de plus A et B n'admettent aucun facteur commun dans leur décomposition en produit de facteurs irréductibles on dit que $\frac{A}{B}$ est une forme irréductible de F .
L'ensemble des fractions rationnelles dans \mathbb{K} est noté $\mathbb{K}(X)$.

Exemples 3.1.1.

1. Tout polynôme P de $K[X]$ est une fraction rationnelle car $P = \frac{P}{1}$.
2. Les fractions $F = \frac{2X}{X-1}$, et $G = \frac{1}{X^2+3}$ sont sous la forme irréductible.
3. Soit la fraction rationnelle $F(x) = \frac{X^2 - 3X + 2}{X^2 - 1}$. Alors :
 - $\frac{X^2 - 3X + 2}{X^2 - 1}$, $\frac{X^3 - 3X^2 + 2X}{X^3 - X}$ et $\frac{X - 2}{X + 1}$ sont trois formes de F .
 - La forme irréductible dans \mathbb{R} de F est $\frac{X - 2}{X + 1}$.

Propriétés 3.1.2.

Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$, $\frac{A}{B}$ est une forme de F et $\frac{C}{D}$ est une forme de G .

- i) $F + G$ et $F \times G$ sont des fractions rationnelles dans $\mathbb{K}(X)$.
- ii) Si $G \neq 0$, alors $\frac{F}{G} \in \mathbb{K}(X)$.

iii) Si $F \circ G = F(G)$ existe, alors $F \circ G \in \mathbb{K}(X)$.

iv) $F = G \Leftrightarrow AD = BC$.

Exemple 3.1.1. Soient $F(X) = \frac{1}{X+2}$ et $G(X) = \frac{X-1}{X+1}$ deux fractions rationnelles dans $\mathbb{R}(X)$.
On a :

$$\begin{aligned}(F + G)(X) &= \frac{1}{X+2} + \frac{X-1}{X+1} \\ &= \frac{X+1 + (X-1)(X+2)}{(X+1)(X+2)} \\ &= \frac{X^2 + 2X - 1}{X^2 + 3X + 2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(F \times G)(X) &= \frac{1}{X+2} \times \frac{X-1}{X+1} \\ &= \frac{X-1}{X^2 + 3X + 2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{F}{G}(X) &= \frac{1}{X+2} \times \frac{X+1}{X-1} \\ &= \frac{X+1}{X^2 + X - 2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(F \circ G)(X) &= F\left(\frac{X-1}{X+1}\right) \\ &= \frac{1}{\frac{X-1}{X+1} + 2} \\ &= \frac{X-1}{3X+1}.\end{aligned}$$

3.2 Le degré d'une fraction rationnelle

Définition 3.2.1.

Soient $F \in \mathbb{K}(X)$ et $\frac{A}{B}$ une forme quelconque de F . On appelle degré d'une fraction rationnelle F la quantité

$$d^\circ F = d^\circ A - d^\circ B \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}.$$

Exemples 3.2.1.

– Si $F = \frac{3X^4 - 5X + 3}{X^3 + 3X^2 + 1}$, alors $d^\circ F = 4 - 3 = 1$.

– Si $F = \frac{iX^5 + 4X^2 - 2}{2X^5 + 3X^2 - 8i}$, alors $d^\circ F = 5 - 5 = 0$.

– Si $F = \frac{2X - 2}{-X^4 - X^2 + 3X}$, alors $d^\circ F = 1 - 4 = -3$.

Remarque 3.2.2.

$d^\circ F = 0$, ne signifie pas que F est une constante non nulle.

Propriétés 3.2.3.

Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$, on a :

1. $d^\circ F = -\infty \Leftrightarrow F = 0$.
2. $d^\circ(F + G) \leq \max(d^\circ F, d^\circ G)$.
3. $d^\circ(F \times G) = d^\circ F + d^\circ G$.
4. Si $G \neq 0$, alors $d^\circ\left(\frac{F}{G}\right) = d^\circ F - d^\circ G$.

3.3 Les pôles d'une fraction rationnelle

Définition 3.3.1.

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ sous forme irréductible. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est un pôle de F si α est une racine de B . Si α est une racine de B d'ordre k , on dit que α est un pôle de F d'ordre k . Un pôle d'ordre 1 est dit simple.

Exemple 3.3.1. Soit $F = \frac{X^2 + 2X - 3}{(X^2 + 4)(X - 1)^3}$.

F n'est pas sous forme irréductible car on a : $X^2 + 2X - 3 = (X - 1)(X + 3)$ alors $X - 1$ est diviseur commun du numérateur et dénominateur. $\frac{X + 3}{(X^2 + 4)(X - 1)^2}$ est une forme irréductible de F ,

- 1) Dans $\mathbb{R}(X)$, 1 est un pôle double de F .
- 2) Dans $\mathbb{C}(X)$, les pôles de F sont $2i$, $-2i$ et 1,

- $2i$ et $-2i$ sont simples,
- 1 est double.

Remarque 3.3.2.

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est un pôle d'ordre k d'une fraction $F = \frac{A}{B}$, alors il existe un polynôme B_1 tel que

$$F = \frac{A}{(X - \alpha)^k B_1} \text{ avec } B_1(\alpha) \neq 0.$$

Proposition 3.3.3.

Soient $F \in \mathbb{K}(X)$, $\frac{A}{B}$ est une forme quelconque de F et $\alpha \in \mathbb{K}$. Si $A(\alpha) \neq 0$, alors : α est un pôle de F d'ordre $k \Leftrightarrow \alpha$ est une racine de B d'ordre k .

Exemple 3.3.2. Soit $F = \frac{A}{B} = \frac{X^2 - 3X}{X(X-2)^4}$. On a $A(2) = -2 \neq 0$ et 2 est une racine de B d'ordre 4, alors 2 est un pôle de F d'ordre 4.

3.4 Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

3.4.1 Etape 1 : Partie entière et partie principale

Théorème et définitions 3.4.1.

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme E et une unique fraction rationnelle G telle que

$$\begin{cases} F = E + G, \\ d^\circ G < 0. \end{cases}$$

Le polynôme E est le quotient de la division euclidienne de A par B et $G = \frac{R}{B}$ avec R est le reste de cette même division euclidienne. Le polynôme E est appelé la partie **entière** (ou polynômiale) de F et G sa partie **principale** (ou polaire).

Méthode : Pour déterminer la partie entière d'une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B}$.

- Si $d^\circ F < 0$, alors la partie entière est le polynôme nul.
- Si $d^\circ F \geq 0$, alors on effectue la division euclidienne de A par B , et la partie entière est le quotient de la division. On obtient en effet $A = BE + R$, avec $d^\circ R < d^\circ B$, donc

$$F = \frac{A}{B} = \frac{BE + R}{B} = \frac{BE}{B} + \frac{R}{B} = E + \frac{R}{B}$$

Exemple 3.4.1. Soit $F = \frac{X^4 - 3X^3 + X^2 - 1 + i}{X^2 - X + 2}$.

Effectuons la division euclidienne de $X^4 - 3X^3 + X^2 - 1 + i$ par $X^2 - X + 2$.

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} X^4 - 3X^3 + X^2 - 1 + i \\ X^4 - X^3 + 2X^2 \\ \hline - 2X^3 - X^2 - 1 + i \\ - 2X^3 + 2X^2 - 4X \\ \hline - 3X^2 + 4X - 1 + i \\ - 3X^2 + 3X - 6 \\ \hline X + 5 + i \end{array} & \begin{array}{l} X^2 - X + 2 \\ \hline X^2 - 2X - 3 \end{array} \end{array}$$

On trouve $F = X^2 - 2X - 3 + \frac{X + 5 + i}{X^2 - X + 2}$, alors la partie entière de F est

$$E = X^2 - 2X - 3$$

et la partie principale de F est

$$G = \frac{X + 5 + i}{X^2 - X + 2}.$$

Exercice 3.4.2. Déterminer la partie entière et la partie principale de la fraction rationnelle F dans les cas suivants :

1. $F = \frac{X^5 + X^4 + 1}{X^3 - X}$.
2. $F = \frac{X^3 + X + 1}{(X - 1)^3}$.
3. $F = \frac{X + 1}{(X^2 + 3)}$.
4. $F = \frac{5X^4 + (2+i)X^3 - X + 1}{(X^2 + X)}$.

3.4.2 Etape 2 : Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

Soit $F = \frac{A}{B} = E + \frac{R}{B}$ où $\frac{R}{B}$ une forme irréductible de la partie principale de F .

i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, B peut avoir l'écriture suivante

$$B = d \prod_{i=1}^{i=n} (X - a_i)^{\alpha_i} = d(X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_n)^{\alpha_n},$$

où a_1, a_2, \dots, a_n sont les racines de B de multiplicités respectives $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, et d est le coefficient dominant de B . On a ainsi

$$F = E + \frac{R}{d(X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_n)^{\alpha_n}}.$$

ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on sait que B se décompose sur \mathbb{R} sous la forme

$$\begin{aligned} B &= d \prod_{i=1}^{i=n} (X - a_i)^{\alpha_i} \prod_{k=1}^{k=p} (X^2 + b_k X + c_k)^{\beta_k} \\ &= d(X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_n)^{\alpha_n} (X^2 + b_1 X + c_1)^{\beta_1} \cdots (X^2 + b_p X + c_p)^{\beta_p}, \end{aligned}$$

où a_1, \dots, a_n sont les racines réelles de B de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, et d est le coefficient dominant de B , $(X^2 + b_i X + c_i)$ des trinômes de discriminant strictement négatif et β_1, \dots, β_p étant des entiers strictement positifs. On a ainsi

$$F = E + \frac{R}{d(X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_n)^{\alpha_n} (X^2 + b_1 X + c_1)^{\beta_1} \cdots (X^2 + b_p X + c_p)^{\beta_p}}.$$

3.4.3 Etape 3 : Décomposition de la partie principale en éléments simples

a. *Cas* : $\mathbb{K}(X) = \mathbb{C}(X)$

Théorème et définitions 3.4.3.

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle dans $\mathbb{C}(X)$. On note a_1, \dots, a_n les pôles de F de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ i.e..

$$B = (X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_n)^{\alpha_n}.$$

Alors la fraction rationnelle F s'écrit de manière unique sous la forme

$$\begin{aligned} F &= E + \sum_{k=1}^{k=\alpha_1} \frac{\lambda_{1k}}{(X - a_1)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{k=\alpha_n} \frac{\lambda_{nk}}{(X - a_n)^k} \\ &= E + \left(\frac{\lambda_{11}}{X - a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X - a_1)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X - a_1)^{\alpha_1}} \right) + \cdots + \\ &+ \left(\frac{\lambda_{n1}}{X - a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X - a_n)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X - a_n)^{\alpha_n}} \right) \end{aligned}$$

où E la partie entière de F est un polynôme nul, ou de degré $d^\circ A - d^\circ B$ et les coefficients λ_{ij} sont des complexes. Cette écriture s'appelle la décomposition en éléments simples (**DES**) de F dans $\mathbb{C}(X)$.

$\frac{\lambda_{ij}}{(X - a_i)^j}$, sont appelés les éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

$\frac{\lambda_{i1}}{X - a_i} + \frac{\lambda_{i2}}{(X - a_i)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{i\alpha_j}}{(X - a_i)^{\alpha_j}}$ est appelée la partie principale de F associée au pôle a_i .

Remarque 3.4.4.

Dans la partie associée à chaque pôle, le coefficient correspondant à l'élément simple de plus haut degré est nécessairement non nul. En d'autres termes

$$\lambda_{1\alpha_1} \neq 0, \dots, \lambda_{n\alpha_n} \neq 0.$$

Exemples 3.4.1.

1) $F_1 = \frac{X + 2}{(X - 2)(X - 1)(X + 3)}$, on a $d^\circ F_1 = -2$, donc la partie entière de F_1 est nulle. Ainsi F_1 a une **DES** de la forme

$$F_1 = \frac{A}{X - 2} + \frac{B}{X - 1} + \frac{C}{X + 3}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

2) $F_2 = \frac{2X^4 + X + 1}{(X - 1)(X^2 + 1)} = \frac{2X^4 + X + 1}{(X - 1)(X - i)(X + i)}$, on a $d^\circ F_2 = 1$, donc la partie entière de F_2 est un polynôme de degré 1. Ainsi F_2 a une **DES** de la forme

$$F_2 = aX + b + \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\beta}{X - i} + \frac{\gamma}{X + i}, \quad a, b, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

3) $F_3 = \frac{-X^5}{X(X^2 - 4)^2}$, on a $d^\circ F_3 = 0$, donc la partie entière de F_3 est égale à -1 .
Ainsi F_3 a une **DES** de la forme

$$F_3 = -1 + \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{(X-2)} + \frac{\gamma}{(X-2)^2} + \frac{\lambda}{X+2} + \frac{\nu}{(X+2)^2}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \nu \in \mathbb{R}.$$

b. Cas : $\mathbb{K}(X) = \mathbb{R}(X)$

Théorème et définitions 3.4.5.

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$, la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du dénominateur s'écrit :

$$B = (X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_n)^{\alpha_n} (X^2 + b_1X + c_1)^{\beta_1} \cdots (X^2 + b_pX + c_p)^{\beta_p}.$$

Alors la fraction rationnelle F s'écrit de façon unique sous la forme

$$\begin{aligned} F &= E + \sum_{k=1}^{k=\alpha_1} \frac{\lambda_{1k}}{(X - a_1)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{k=\alpha_n} \frac{\lambda_{nk}}{(X - a_n)^k} + \\ &+ \sum_{k=1}^{k=\beta_1} \frac{\mu_{1k}X + \gamma_{1k}}{(X^2 + b_1X + c_1)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{k=\beta_p} \frac{\mu_{pk}X + \gamma_{pk}}{(X^2 + b_pX + c_p)^k} \\ &= E + \left(\frac{\lambda_{11}}{X - a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X - a_1)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X - a_1)^{\alpha_1}} \right) + \cdots + \\ &+ \left(\frac{\lambda_{n1}}{X - a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X - a_n)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X - a_n)^{\alpha_n}} \right) + \\ &+ \left(\frac{\mu_{11}X + \gamma_{11}}{X^2 + b_1X + c_1} + \frac{\mu_{12}X + \gamma_{12}}{(X^2 + b_1X + c_1)^2} + \cdots + \frac{\mu_{1\beta_1}X + \gamma_{1\beta_1}}{(X^2 + b_1X + c_1)^{\beta_1}} \right) + \cdots + \\ &+ \left(\frac{\mu_{p1}X + \gamma_{p1}}{X^2 + b_pX + c_p} + \frac{\mu_{p2}X + \gamma_{p2}}{(X^2 + b_pX + c_p)^2} + \cdots + \frac{\mu_{p\beta_p}X + \gamma_{p\beta_p}}{(X^2 + b_pX + c_p)^{\beta_p}} \right) \end{aligned}$$

où E , la partie entière de F est un polynôme nul, ou de degré $d^\circ A - d^\circ B$ et les coefficients λ_{ij} , μ_{ij} et γ_{ij} sont des réels tels que $\lambda_{i\alpha_i} \neq 0$ et $(\mu_{i\beta_i}, \gamma_{i\beta_i}) \neq (0, 0)$. Cette écriture s'appelle la décomposition en éléments simples (**DES**) de F dans $\mathbb{R}(X)$.

$\frac{\lambda_{ij}}{(X - a_i)^j}$, sont appelés les éléments simples de première espèce.

$\frac{\mu_{ij}X + \gamma_{ij}}{(X^2 + b_iX + c_i)^j}$, sont appelés les éléments simples de seconde espèce.

Exemples 3.4.2. $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \nu, \mu$ désignent des réels.

- a. $G_1 = \frac{2X - 1}{(X - 1)(X + 2)^2}$, on a $d^\circ G_1 = -2$, donc la partie entière de G_1 est nulle.
Ainsi G_1 a une **DES** de la forme

$$G_1 = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\beta}{X + 2} + \frac{\gamma}{(X + 2)^2}.$$

- b. $G_2 = \frac{3X + 1}{(X - 3)(X^2 + 5)^2}$, on a $d^\circ G_2 = -4$, donc la partie entière de G_2 est nulle.
Ainsi G_2 a une **DES** de la forme

$$G_2 = \frac{\alpha}{(X - 3)} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2 + 5} + \frac{\mu X + \lambda}{(X^2 + 5)^2}.$$

- c. $G_3 = \frac{3X^4 - 1}{(X^2 - 2X + 3)^3}$, on a $d^\circ G_3 = -2$, donc la partie entière de G_3 est nulle.
Ainsi G_3 a une **DES** de la forme

$$G_3 = \frac{\alpha X + \beta}{X^2 - 2X + 3} + \frac{\gamma X + \lambda}{(X^2 - 2X + 3)^2} + \frac{\nu X + \mu}{(X^2 - 2X + 3)^3}.$$

3.5 Techniques de DES : calcul des coefficients

3.5.1 Méthode de décomposition par identification des coefficients

Exemple 3.5.1. Décomposons la fraction rationnelle $G = \frac{X^2 + X + 1}{X^3 - X}$ en éléments simples par identification des coefficients.

On a $d^\circ G = -1$ et G admet trois pôles simples 0, 1 et -1 . Alors la DES de G est sous forme :

$$\begin{aligned} G &= \frac{X^2 + X + 1}{X(X - 1)(X + 1)} \\ &= \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1}, \end{aligned}$$

implique que

$$\begin{aligned} \frac{a(X^2 - 1) + b(X^2 + X) + c(X^2 - X)}{X(X - 1)(X + 1)} &= \frac{(a + b + c)X^2 + (b - c)X - a}{X(X - 1)(X + 1)} \\ &= \frac{X^2 + X + 1}{X(X - 1)(X + 1)}, \end{aligned}$$

alors

$$(a + b + c)X^2 + (b - c)X - a = X^2 + X + 1,$$

donc $a = -1$, $b + c = 2$ et $b - c = 1$. Alors $a = -1$, $b = \frac{3}{2}$ et $c = \frac{3}{2}$.

D'où la DES de G est :

$$G = \frac{-1}{X} + \frac{3/2}{X - 1} + \frac{1/2}{X + 1}.$$

3.5.2 Technique de base : multiplication/substitution

Proposition 3.5.1.

Soit a un pôle d'ordre m d'une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B}$. Le coefficient λ du terme $\frac{\lambda}{(X-a)^m}$ dans la **DES** de F est

$$\lambda = [(X-a)^m F](a).$$

Remarque 3.5.2.

Cette technique va permettre de déterminer entièrement la **DES** d'une fraction rationnelle qui n'admet que des pôles simples. Pour les pôles multiples, d'autres techniques sont données ci-dessous, mais on peut également raisonner de proche en proche : en calculant $F - \frac{\lambda}{(X-a)^m}$ (où λ est le coefficient déjà trouvé), on obtient une fraction dont a est pôle d'ordre $m-1$, et on peut recommencer.

Exemples 3.5.1.

1. Décomposons la fraction rationnelle $F_1 = \frac{X-2}{X(X+2)(X-1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

On a $d^\circ F_1 = -3$, donc la partie entière de F_1 est nulle. Ainsi F_1 a une **DES** de la forme

$$F_1 = \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X-1} + \frac{\lambda_3}{X+2} \text{ où } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}.$$

Calculons λ_1, λ_2 et λ_3 . D'après la proposition on obtient

$$\lambda_1 = [X \times F_1](0) = \left[\frac{(X-2)}{(X-1)(X+2)} \right](0) = 1$$

$$\lambda_2 = [(X-1) \times F_1](1) = \left[\frac{(X-2)}{X(X+2)} \right](1) = \frac{-1}{3}$$

$$\lambda_3 = [(X+2) \times F_1](-2) = \left[\frac{(X-2)}{X(X-1)} \right](-2) = \frac{-2}{3}$$

Ainsi, la **DES** de F_1 est $F_1 = \frac{1}{X} + \frac{-1/3}{X-1} + \frac{-2/3}{X+2}$.

2. Décomposons la fraction rationnelle $F_2 = \frac{X^4 + X^3 + X + 2}{(X-1)(X+1)^2}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .

On a $d^\circ F_2 = 1$, donc la partie entière de F_2 est un polynôme de degré 1 qui est le quotient de la division euclidienne de $X^4 + X^3 + X + 2$ par $(X-1)(X+1)^2$, on obtient

$E = X$ et la partie principale de F_2 est $\frac{X^2 + 2X + 2}{(X-1)(X+1)^2}$.

Ainsi la **DES** de F_2 est de la forme

$$F_2 = X + \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta_1}{X+1} + \frac{\beta_2}{(X+1)^2}$$

où $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

- Calcul de α et β_2

$$\alpha = [(X-1) \times F_2](1) = \left[\frac{(X^4 + X^3 + X + 2)}{(X+1)^2} \right](1) = \frac{5}{4}.$$

$$\beta_2 = [(X+1)^2 \times F_2](-1) = \left[\frac{(X^4 + X^3 + X + 2)}{X-1} \right](-1) = \frac{-1}{2}.$$

Donc $F_2 = X + \frac{5/4}{X-1} + \frac{\beta_1}{X+1} + \frac{-1/2}{(X+1)^2}$.

- Calcul de β_1 . On peut calculer

$$F_2' = F_2 + \frac{1/2}{(X+2)^2} = \frac{X^4 + X^3 + X + 2}{(X-1)(X+1)^2} + \frac{1/2}{(X+1)^2} = \frac{X^4 + X^3 + 3/2X + 3/2}{(X-1)(X+1)^2}$$

En divisant $X^4 + X^3 + 3/2X + 3/2$ par $X+1$, on obtient $X^4 + X^3 + 3/2X + 3/2 = (X+1)(X^3 + 3/2)$, et on a donc

$$F_2' = \frac{X^4 + X^3 + 3/2X + 3/2}{(X-1)(X+1)}.$$

On ré-applique la méthode ci-dessus (sur la fraction, -1 n'est plus pôle double, mais simple), et on obtient

$$\beta_1 = [(X+1) \times F_2'](-1) = \left[\frac{(X^3 + 3/2)}{X-1} \right](-1) = \frac{-1}{4}.$$

On en déduit alors la décomposition de F_2 en éléments simples sur \mathbb{R}

$$F_2 = X + \frac{5/4}{X-1} + \frac{-1/4}{X+1} + \frac{-1/2}{(X+1)^2}.$$

3.5.3 Evaluation

Lorsqu'il ne reste plus qu'un ou deux coefficients à déterminer dans la **DES**, on peut remplacer X par des valeurs particulières.

Exemple 3.5.2. Revenons à l'exemple précédent dans lequel on a trouvé pour la fraction rationnelle F_2

$$F_2 = X + \frac{5/4}{X-1} + \frac{\beta_1}{X+1} + \frac{-1/2}{(X+1)^2},$$

au lieu de répéter la méthode multiplication/substitution, on peut remplacer X par la valeur 0. On a donc $F_2(0) = -2 = 0 - \frac{5}{4} + \beta_1 + \frac{-1}{2}$ alors $\beta_1 = -2 + \frac{5}{4} + \frac{1}{2}$, ce qui donne $\beta_1 = \frac{-1}{4}$.

3.5.4 Parité

Soit F une fraction rationnelle paire ou impaire. Si a est un pôle d'ordre m de F , alors $-a$ est un pôle d'ordre m de F . En comparant les **DES** de $F(X)$ et $F(-X) = F(X)$, et en utilisant leur unicité, on obtient des relations entre les coefficients de la **DES** de F .

Exemple 3.5.3. Considérons la fraction rationnelle $F = \frac{3X^2 + 1}{(X^2 - 4)^2}$ de $\mathbb{R}(X)$. La factorisation irréductible sur \mathbb{R} du dénominateur s'écrit :

$$(X^2 - 4)^2 = (X - 2)^2(X + 2)^2.$$

La fraction F possède sur \mathbb{R} deux pôles doubles (les réels 2 et -2). Sa décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} s'écrit (la partie entière est nulle) :

$$F = \frac{\lambda_1}{X - 2} + \frac{\lambda_2}{(X - 2)^2} + \frac{\lambda'_1}{X + 2} + \frac{\lambda'_2}{(X + 2)^2}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1$ et λ'_2 sont des réels. F est paire : $F(X) = F(-X)$. Donc

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{\lambda_1}{X - 2} + \frac{\lambda_2}{(X - 2)^2} + \frac{\lambda'_1}{X + 2} + \frac{\lambda'_2}{(X + 2)^2} \\ &= F(-X) \\ &= \frac{-\lambda_1}{X + 2} + \frac{\lambda_2}{(X + 2)^2} + \frac{-\lambda'_1}{X - 2} + \frac{\lambda'_2}{(X - 2)^2}. \end{aligned}$$

L'unicité de la **DES** impose $\lambda'_1 = -\lambda_1$ et $\lambda'_2 = \lambda_2$. On a donc

$$F = \frac{\lambda_1}{X - 2} + \frac{\lambda_2}{(X - 2)^2} - \frac{\lambda_1}{X + 2} + \frac{\lambda_2}{(X + 2)^2},$$

et il faut calculer seulement deux coefficients (λ_1 et λ_2) au lieu des quatre coefficients. Le coefficient λ_2 s'obtient en multipliant par $(X - 2)^2$ puis en remplaçant X par 2 :

$$\lambda_2 = [(X - 2)^2 \times F](2) = \left[\frac{(3X^2 + 1)}{(X + 2)^2} \right](2) = 13/16.$$

Pour obtenir le coefficient λ_1 on peut remplacer X par 0 par exemple, on obtient :

$$F(0) = \frac{1}{16} = -\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2.$$

On conclut que $\lambda_1 = \frac{11}{32}$. Alors

$$F = \frac{11/32}{X - 2} + \frac{13/16}{(X - 2)^2} - \frac{11/32}{X + 2} + \frac{13/16}{(X + 2)^2}.$$

Exercice 3.5.3.

Décomposer en élément simple la fraction rationnelle $F = \frac{X + 3}{(X^2 - 1)^3}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

3.5.5 Limite de $xF(x)$ à l'infini

Soit F une fraction rationnelle de degré strictement négatif. Alors la fonction $x \rightarrow xF(x)$ a une limite finie en l'infini. On peut ainsi trouver des relations entre les coefficients de la **DES** de F .

Exemple 3.5.4. Considérons la fraction rationnelle $G = \frac{4X}{X^4 - 1}$ de $\mathbb{R}(X)$. La factorisation irréductible sur \mathbb{R} du dénominateur s'écrit :

$$X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1).$$

La fraction G possède sur \mathbb{R} deux pôles simples (les réels 1 et -1). Sa décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} s'écrit ainsi (la partie entière est nulle) :

$$G = \frac{\alpha_1}{X - 1} + \frac{\alpha_2}{X + 1} + \frac{\alpha_3 X + \alpha_4}{X^2 + 1}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ dans \mathbb{R} . G est impaire : $G(X) = -G(-X)$. Donc

$$\begin{aligned} G(X) &= \frac{\alpha_1}{X - 1} + \frac{\alpha_2}{X + 1} + \frac{\alpha_3 X + \alpha_4}{X^2 + 1} \\ &= \frac{\alpha_1}{X + 1} + \frac{\alpha_2}{X - 1} + \frac{\alpha_3 X - \alpha_4}{X^2 + 1} = -G(-X). \end{aligned}$$

Par unicité de la **DES**, on en déduit $\alpha_2 = \alpha_1$ et $\alpha_4 = 0$. On a donc

$$G = \frac{\alpha_1}{X - 1} + \frac{\alpha_1}{X + 1} + \frac{\alpha_3 X}{X^2 + 1}.$$

Le coefficient α_1 s'obtient en multipliant par $X - 1$ puis en remplaçant X par 1 :

$$\alpha_1 = [(X - 1) \times G](1) = \left[\frac{4X}{(X + 1)(X^2 + 1)} \right](1) = 1.$$

Pour calculer α_3 , on a d'une part

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xG(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{x^4 - 1} = 0,$$

et d'autre part

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xG(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x - 1} + \frac{x}{x + 1} + \frac{\alpha_3 x^2}{x^2 + 1} \right) = 1 + 1 + \alpha_3 = \alpha_3 + 2$$

on obtient alors $\alpha_3 + 2 = 0$ puis $\alpha_3 = -2$. Finalement,

$$G = \frac{1}{X - 1} + \frac{1}{X + 1} + \frac{-2X}{X^2 + 1}.$$

3.5.6 Division suivant les puissances croissantes

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction de $\mathbb{K}(X)$ irréductible, possède (au moins) un pôle $a \in \mathbb{K}$ d'ordre n . Le dénominateur B se factorise alors sous la forme suivante :

$$B = (X - a)^n B_0 \text{ avec } B_0(a) \neq 0.$$

où B_0 est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Donc

$$F = \frac{A}{(X - a)^n B_0}.$$

Dans la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{K}(X)$, la partie principale associée au pôle a s'écrit :

$$\frac{\lambda_1}{X - a} + \frac{\lambda_2}{(X - a)^2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{(X - a)^n}$$

où, parmi les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de \mathbb{K} , seul λ_n est nécessairement non nul.

Calcul simultané des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. La méthode se décompose en trois étapes.

Étape 1 : elle consiste en un changement d'indéterminée : $Y = X - a$ alors $X = Y + a$. D'où

$$F = \frac{A(Y + a)}{Y^n B_0(Y + a)} \text{ avec } B_0(Y + a)(0) = B_0(a) \neq 0.$$

Étape 2 : en effectuant la division suivant les puissances croissantes à l'ordre $n - 1$ du polynôme $A(Y + a)$ de $\mathbb{K}[Y]$ par le polynôme $B_0(Y + a)$ de $\mathbb{K}[Y]$. Donc il existe $Q(Y), R(Y) \in \mathbb{K}[Y]$ tels que

$$\begin{cases} A(Y + a) = B_0(Y + a)Q(Y) + Y^n R(Y) \\ d^\circ Q(Y) \leq n - 1 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} F &= \frac{B_0(Y + a)Q(Y) + Y^n R(Y)}{Y^n B_0(Y + a)} \\ &= \frac{Q(Y)}{Y^n} + \frac{R(Y)}{B_0(Y + a)}. \end{aligned}$$

Comme $d^\circ Q(Y) \leq n - 1$, alors il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$Q(Y) = \alpha_1 Y^{n-1} + \alpha_2 Y^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} Y + \alpha_n.$$

Étape 3 : on déduit de l'égalité précédente :

$$\begin{aligned} \frac{Q(Y)}{Y^n} &= \frac{\alpha_1 Y^{n-1} + \alpha_2 Y^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} Y + \alpha_n}{Y^n} \\ &= \frac{\alpha_1}{Y} + \frac{\alpha_2}{Y^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{Y^n} \\ &= \frac{\alpha_1}{X - a} + \frac{\alpha_2}{(X - a)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(X - a)^n}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lambda_1 = \alpha_1, \lambda_2 = \alpha_2, \dots, \lambda_n = \alpha_n$.

Exemple 3.5.5.

Soit $F = \frac{-4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$. Appliquons cette méthode pour déterminer la **DES** de F dans $\mathbb{R}(X)$.

On a $d^\circ F = -5 < 0$, alors la partie entière de F est nulle. Posons $Y = X - 1$, alors $X = Y + 1$. On obtient :

$$-4X = -4Y - 4 \text{ et } (X^2 + 1)^2 = ((Y + 1)^2 + 1)^2 = 4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4.$$

Donc

$$F = \frac{-4Y - 4}{Y^2(4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4)}.$$

En faisant la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 1 de $-4Y - 4$ par $4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} -4 \quad - \quad 4Y \\ 4 \quad + \quad 8Y \quad + \quad 8Y^2 \quad + \quad 4Y^3 \quad + \quad Y^4 \\ \hline 4Y \quad + \quad 8Y^2 \quad + \quad 4Y^3 \quad + \quad Y^4 \\ -4Y \quad - \quad -8Y^2 \quad - \quad -8Y^3 \quad - \quad 4Y^4 \quad - \quad Y^5 \\ \hline \quad -4Y^3 \quad - \quad 3Y^4 \quad - \quad Y^5 \end{array} & \begin{array}{l} 4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4 \\ \hline -1 + Y \end{array} \end{array}$$

On peut ainsi écrire : $-4 - 4Y = (-1 + Y)(4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4) + Y^2(-4Y - 3Y^2 - Y^3)$.
D'où

$$\begin{aligned} F &= \frac{(Y-1)(Y^4 + 4Y^3 + 8Y^2 + 8Y + 4) + Y^2(-Y^3 - 3Y^2 - 4Y)}{Y^2(Y^4 + 4Y^3 + 8Y^2 + 8Y + 4)} \\ &= \frac{Y-1}{Y^2} + \frac{-Y^3 - 4Y^2 - 4Y}{Y^4 + 4Y^3 + 8Y^2 + 8Y + 4} \\ &= \frac{1}{Y} + \frac{-1}{Y^2} + \frac{-Y^3 - 3Y^2 - 4Y}{Y^4 + 4Y^3 + 8Y^2 + 8Y + 4}. \end{aligned}$$

Revenons enfin à l'indéterminée X . Remplaçons pour cela Y par $X - 1$. On obtient :

$$F = \frac{1}{X-1} + \frac{-1}{(X-1)^2} + \frac{-X^3 - X + 2}{(X^2+1)^2}$$

car $-(X-1)^3 - 3(X-1)^2 - 4(X-1) = -X^3 - X + 2$.

Remarquons que la partie associée au polynôme $X^2 + 1$ s'obtient alors facilement à partir de la dernière fraction rationnelle de l'égalité ci-dessus. On a

$$-X^3 - X + 2 = -X(X^2 + 1) + 2.$$

On en déduit alors :

$$\frac{-X^3 - X + 2}{(X^2 + 1)^2} = \frac{-X(X^2 + 1) + 2}{(X^2 + 1)^2} = \frac{-X}{X^2 + 1} + \frac{2}{(X^2 + 1)^2}.$$

On en déduit alors la **DES** de F sur \mathbb{R} :

$$F = \frac{1}{X-1} + \frac{-1}{(X-1)^2} + \frac{-X}{X^2+1} + \frac{2}{(X^2+1)^2}.$$

3.5.7 Exercices

Exercice 1. Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur \mathbb{R} , en raisonnant par substitution

1. $F = \frac{X^5 + X^4 + 1}{X^3 - X}$,

2. $G = \frac{X^3 + X + 1}{(X-1)^2(X+1)}$.

Exercice 2. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} par identification des coefficients, les fractions rationnelles suivantes :

1. $F = \frac{3X+1}{X^2-9}$,

2. $G = \frac{2X^3 - X^2 + 2X - 4}{X+2}$,

Exercice 3. Décomposer la fraction rationnelle suivantes en éléments simples sur \mathbb{R} . à l'aide d'une division selon les puissances croissantes :

$$G = \frac{4X^4 - 10X^3 + 8X^2 - 4X + 1}{X^3(X-1)^2}.$$

Exercice 4. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} les fractions rationnelles :

$$\frac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1},$$
$$\frac{X^3 - 2}{X^4(X^2 + X + 1)^2}.$$

Chapitre 4

Calcul matriciel, déterminants et résolution des systèmes linéaires

Dans tous le chapitre, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

4.1 Calcul matriciel

4.1.1 Définitions et notations

Définition 4.1.1.

Soit m et n deux entiers naturels. On appelle matrice A de type (m, n) (ou d'ordre $m \times n$) à coefficients dans \mathbb{K} tout tableau de m **lignes** et n **colonnes** d'éléments de \mathbb{K} . L'ensemble des matrices de type (m, n) à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Les nombres du tableau sont appelés les **coefficients** de la matrice A .

Le coefficient situé à la i -ème ligne et à la j -ème colonne est noté $a_{i,j}$.

Une matrice A est représentée de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou encore

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{ou} \quad A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Exemples 4.1.1.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

A est une matrice 2×3 c-à-d $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ avec $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = -2$, $a_{2,2} = 3$ et $a_{2,3} = 7$.

2.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$. $a_{11} = -3$, $a_{22} = 6$ et $a_{33} = 5$.

4.1.2 Matrices particulières

Soient m et n deux entiers non nuls et A une matrice d'ordre $m \times n$.

1) Si $m = 1$, on dit que A est une matrice ligne, on la note

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1p})$$

2) Si $n = 1$, on dit que A est une matrice colonne, on la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

3) Si $m = n$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n . On note par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} .

Exemples 4.1.2.

i) $A = (-2 \quad 3 \quad -1 \quad \sqrt{7})$ est une matrice ligne d'ordre 4.

ii) $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne d'ordre 3.

iii) $C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & \sqrt{3} & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 4.

Définitions 4.1.2.

On dit qu'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est :

1. **Triangulaire supérieure** si $i > j$ alors $a_{ij} = 0$.

Une matrice triangulaire supérieure est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & a_{pp} \cdots & a_{pn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. **Triangulaire inférieure** si $i < j$ alors $a_{ij} = 0$.
3. **Diagonale** si $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Une matrice diagonale est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On appelle diagonale de A l'ensemble des coefficients de A telle que $i = j$ et on la note $\mathbf{Diag}(A) = \{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$.

4. La matrice diagonale d'ordre n dont les éléments de la diagonale sont tous égaux à 1 est appelée matrice identité d'ordre n notée \mathbb{I}_n .

$$\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

5. La matrice de type (m, n) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée matrice nulle et notée 0_{mn} ou 0.

Exemples 4.1.3.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.

2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure.

3. La matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

4. $\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3.

5. $0_{4,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle de type $(4, 3)$.

Définition 4.1.3. (Egalité de deux matrices)

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ deux matrices de même ordre $m \times n$ sur \mathbb{K} . Les matrices A et B sont égales, et on note $A = B$, si pour tout couple (i, j) tel que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, on a $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemple 4.1.1.

Soient les deux matrices de type $(4, 3)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & b \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & c & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ e & d & -1 \end{pmatrix}, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

Alors : $A = B \iff a = 0, b = -1, c = 1, d = 0 \text{ et } e = -3.$

4.1.3 Opérations sur les matricesa) *Addition de matrices***Définition 4.1.4.**

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ deux matrices de même type (m, n) . La somme $A + B$ est aussi une matrice de type (m, n) , définie par :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple 4.1.2. Soient les deux matrices de type $(3, 4)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -4 & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ -3 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Alors la somme de A et B est la matrice de type $(3, 4)$ suivante :

$$A + B = \begin{pmatrix} 0+3 & 2+1 & -3+2 & 5+4 \\ -1-1 & 4+0 & -4+4 & 0-1 \\ 6-3 & 2+4 & 5-2 & 5+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 9 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.1.5. La somme de deux matrices d'ordres différents n'est pas définie.

Proposition 4.1.6. Soit A, B, C trois matrices de même ordre $m \times n$.

(a) $A + B = B + A$, (commutativité).

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$, (associativité).

(c) $A + 0_{mn} = A$.

(d) Si $A = (a_{ij})$ et $B = (-a_{ij})$, alors $A + B = 0_{mn}$, (B est dite l'opposé de A).

b) **Produit d'une matrice par un scalaire**

Définition 4.1.7.

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ de type (m, n) sur \mathbb{K} et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle produit de A par α , et on note $\alpha.A$ ou αA , la matrice de type (m, n) sur \mathbb{K} définie par

$$\alpha.A = (\alpha.a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Exemple 4.1.3. Si $\alpha = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Alors $\alpha.A = 3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$.

Proposition 4.1.8. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ deux matrices de même ordre et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

- i) $0.A = 0_{mn}$ et $1.A = A$.
- ii) $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$.
- iii) $(\alpha + \beta)A = \alpha.A + \beta.A$.
- iv) $(\alpha \times \beta)A = \alpha(\beta.A)$.

c) **Produit de matrices** Soient $L = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})$ et $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Alors $L \times C$, noté aussi LC , est une matrice de taille 1×1 dont l'unique coefficient est $L \times C = \sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$. Ce nombre est le produit scalaire des vecteurs L et C .

Exemple 4.1.4. $U = (1 \ -2 \ 0)$ et $V = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $U.V = 6$.

Définition 4.1.9.

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de type (m, n) sur \mathbb{K} et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une matrice de type (n, p) sur \mathbb{K} . On appelle produit de A et B , et on note $A \times B$ ou AB , la matrice de type (m, p) sur \mathbb{K} , définie par : $A \times B = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}$ avec

$$c_{ij} = L_i C_j = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Remarque 4.1.10.

Le produit $A \times B$ n'est défini que si le nombre de colonnes de la première matrice du produit est égal au nombre de lignes de la deuxième matrice, matrice de type $(m, n) \times$ matrice de type $(n, p) =$ matrice de type (m, p) .

Exemple 4.1.5.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

A est de type $(3,3)$ et B de type $(3,2)$. Le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B , donc la matrice $A \times B$ existe et de type $(3,2)$.

$$\text{On a } A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 7 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, le produit $B \times A$ n'est pas défini car le nombre de colonnes de B n'est pas égal au nombre de lignes de A .

Proposition 4.1.11. Soient A, B et C trois matrices telles que les produits écrits ci-après existent et soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

- (a) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$ (associativité)
- (b) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ (distributivité)
- (c) $(\alpha A) \times B = A \times (\alpha B) = \alpha(A \times B)$
- (d) $A \times \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n \times A = A$ et $A \times 0 = 0 \times A = 0$.
- (e) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $A^0 = \mathbb{I}_n$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad A^k = A^{k-1} \times A = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

La matrice A^k s'appelle puissance k -ième de A .

Exemples 4.1.4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors, } A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 10 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

d) **Transposée d'une matrice****Définition 4.1.12.**

Soit A une matrice de type (m,n) sur \mathbb{K} . On appelle matrice **transposée** de A et on note tA (ou parfois A^T), la matrice de type (n,m) sur \mathbb{K} obtenue à partir de A en échangeant les lignes et les colonnes.

Exemple 4.1.6. Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Alors

$${}^tA = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Proposition 4.1.13. (Propriétés de la transposée)

- a) Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors ${}^t({}^tA) = A$.
- b) Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors ${}^t(\alpha A) = \alpha {}^tA$.
- c) Si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
- d) Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.

Définition 4.1.14. Une matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n est dite *symétrique* (resp. *antisymétrique*) si $(a_{ij}) = (a_{ji})$ (resp. $(a_{ij}) = -(a_{ji})$) pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Exemples 4.1.5.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique.

Proposition 4.1.15. Une matrice carrée A est symétrique $\iff {}^tA = A$.

4.1.4 Matrices carrées inversibles

Définition 4.1.16.

Soit A une matrice carrée d'ordre n sur \mathbb{K} . On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice carrée d'ordre n sur \mathbb{K} , notée A^{-1} et appelée matrice **inverse** de A , telle que

$$A^{-1} \times A = \mathbb{I}_n \text{ et } A \times A^{-1} = \mathbb{I}_n.$$

Exemple 4.1.7. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On vérifie facilement que $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2$ et $B \times A = \mathbb{I}_2$ alors A est inversible et

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.1.17.

Soient A et B deux matrices carrées inversibles de même ordre on a :

1. A^{-1} est unique.
2. $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
3. $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

4.1.5 Matrices échelonnées

Définition 4.1.18.

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ une matrice non nulle. On appelle **pivot** d'une ligne non nulle de A le premier élément non nul, les pivots des lignes non nulles sont appelé pivots de A .

On dit que A est sous forme **échelonnée** (ou simplement échelonnée) lorsque les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- i)* Toutes les lignes non nulles sont situées au-dessus des lignes nulles.
- ii)* Le pivot de chaque ligne non nulle se trouve dans une colonne (strictement) à droite du pivot de la ligne précédente.

On dit que A est sous forme **échelonnée réduite** (ou simple échelonnée réduite) si de plus les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- iii)* Le pivot de chaque ligne non nulle vaut 1.
- iv)* Le pivot de chaque ligne non nulle est le seul coefficient non nul de sa colonne.

Exemples 4.1.6.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée (*i*) n'est pas vérifiée).

2. La matrice $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée (*ii*) n'est pas vérifiée).

3. La matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée, mais pas échelonnée réduite (*iii*) et *iv*) ne sont pas vérifiées).

4. La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée, mais pas échelonnée réduite (*iii*) n'est pas vérifiée).

5. La matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite.

4.1.6 Le rang d'une matrice

Définition 4.1.19.

Le **rang** d'une matrice A est le nombre de lignes non nulles dans sa forme échelonnée en lignes. On le note $\text{rg}A$.

Exemple 4.1.8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, A est une matrice échelonnée, alors $\text{rg}A = 3$.

Soit $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, B est une matrice échelonnée, alors $\text{rg}B = 2$.

Théorème 4.1.20.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ on a

$$\text{rg}A \leq \min(n, p).$$

4.1.7 Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

Définition 4.1.21.

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'une matrice l'une des trois opérations suivantes :

1. L'échange de deux lignes L_i et L_j , parfois noté $L_i \longleftrightarrow L_j$.
2. La multiplication d'une ligne par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ non nul, parfois noté $L_i \longleftarrow \alpha L_i$.
3. L'ajout à une ligne une autre ligne multipliée par $\alpha \in \mathbb{K}$, parfois noté $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$.

Définition 4.1.22.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont **équivalentes**, si l'une est la transformation de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires, et on note $A \sim B$.

Exemple 4.1.9.

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Permutation de L_1 avec L_2 .

$$A \stackrel{L_1 \longleftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Multiplication de L_1 par $\frac{-1}{2}$

$$A \stackrel{L_1 \longleftarrow \frac{-1}{2} \times L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- L'ajout à L_3 , L_2 multipliée par -3 .

$$A \stackrel{L_3 \longleftarrow L_3 + (-3) \times L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}.$$

4.1.8 Applications

a) Calcul du rang d'une matrice

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à obtenir une matrice B' , une forme échelonnée équivalente à B .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-6} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B'.$$

Donc $B \sim B'$ et B' est une matrice échelonnée, possède deux lignes non nulles, alors $\text{rg}A = 2$.

b) Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si A est inversible, alors pour calculer A^{-1} on suit les étapes suivantes :

- On construit une matrice à n lignes et $2n$ colonnes notée $(A|I_n)$ (appelée matrice **élargie**), en écrivant la matrice identité à droite de A .
- En appliquant les opérations élémentaires, pour transformer A en une matrice échelonnée notée \tilde{A} et on applique les mêmes opérations sur I_n . La matrice obtenue sera notée $(\tilde{A}|\tilde{I})$.
- Si \tilde{A} a une ligne nulle, alors A n'est pas inversible.
- Sinon, en appliquant des nouvelles opérations élémentaires jusqu'à transformer \tilde{A} en I_n , les mêmes opérations élémentaires transforment \tilde{I} en A^{-1} .

Exemple 4.1.10. Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}.$$

On applique les éliminations de Gauss sur les lignes de $(A|I_3)$ d'abord, pour avoir 1 comme pivot de la première ligne, on effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_3$, on obtient

$$L_1 \leftrightarrow L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

pour faire apparaître des 0 sur la première colonne, on effectue successivement les deux opérations élémentaires suivantes, $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right),$$

on multiplie la ligne L_2 par $\frac{1}{2}$ afin qu'elle commence par 1

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right).$$

On continue afin de faire apparaître des 0 partout sous la diagonale

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{-3}{2} & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -12 \end{array} \right)$$

Faire apparaître des 0 au-dessus de la diagonale

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -12 \end{array} \right) \\ = (I_n \mid A^{-1}).$$

Ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & -12 \end{pmatrix}.$$

4.2 Déterminant d'une matrice carrée

4.2.1 Définitions et propriétés

Définition 4.2.1. Soit A une matrice carrée d'ordre n sur \mathbb{K} , le **déterminant** de la matrice A est noté $\det A$ telle que :

1. Si $n = 1$ avec $A = (a)$, alors $\det A = a$.
2. Si $n = 2$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\det A = ad - bc$.
3. Si $n > 2$ et $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, alors $\det A = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ avec A_{ij} est la matrice extraite de A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A .

Remarques 4.2.2.

1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son déterminant est noté aussi
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$
2. L'écriture $\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ s'appelle le développement du déterminant par rapport à la ligne i .
3. L'écriture $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ s'appelle le développement du déterminant par rapport à la colonne j .
4. Le déterminant d'une matrice carrée ne dépend pas du choix de la ligne i et la colonne j .

Exemples 4.2.1.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, on a $\det A = 1 \times 3 - 0 \times (-2) = 3$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, on a $A_{11} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \dots$

Calculons le déterminant de la matrice A .

-En développant suivant la première ligne,

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} \times 1 \times \det \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \times 0 \times \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+3} (-2) \times \det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 18 + 24 = 42. \end{aligned}$$

-En développant suivant la deuxième colonne,

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+2} \times 0 \times \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \times 6 \times \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+2} \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 54 - 12 = 42. \end{aligned}$$

Propriétés 4.2.3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

1. Si une colonne (resp., une ligne) de A est nulle, alors la valeur de $\det A$ est nulle.
2. La valeur de $\det A$ ne change pas en ajoutant à l'une des colonnes (resp., des lignes) de A une combinaison linéaire des autres colonnes (resp., des autres lignes) de A .
3. Si on multiplie une colonne (resp., une ligne) de A par un scalaire α , la valeur de $\det A$ est multipliée par α .

4. Si on échange deux colonnes (resp., deux lignes) de A , alors la valeur de $\det A$ est multipliée par -1 .

Proposition 4.2.4. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n , Alors :

1. $\det(AB) = \det A \det B$.
2. $\det({}^t A) = \det A$.
3. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

Corollaire 4.2.5. Soit A une matrice d'ordre n .

A est inversible $\iff \det A \neq 0$. De plus si A est inversible alors $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Exemple 4.2.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 2. On a $\det A = -8 \neq 0$, alors A est inversible et $\det A^{-1} = \frac{-1}{8}$.

4.2.2 Déterminants des matrices particulières

Proposition 4.2.6. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est égal au produit des termes diagonaux.

Pour une matrice triangulaire $A = (a_{ij})$, on a

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Exemples 4.2.2.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure, on a $\det A = (-3) \times (-1) \times 4 \times 5 = 60$.

2. Soit La matrice triangulaire inférieure $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\det B = 2 \times (-2) \times 1 = -4$.

Comme cas particulièrement important on obtient :

Corollaire 4.2.7. Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux.

Exemple 4.2.2. $\forall n \in \mathbb{N}, \det \mathbb{I}_n = 1$.

4.2.3 Déterminant et inverse d'une matrice

Définition 4.2.8. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$. Si $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on appelle **mineur** du coefficient a_{ij} le déterminant, $\det A_{ij}$ de la matrice A_{ij} , obtenue en supprimant dans A , la i -ième ligne et la j -ème colonne. Le scalaire $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ s'appelle le **cofacteur** du coefficient a_{ij} . La matrice dont les coefficients sont les cofacteurs s'appelle la **comatrice** de A et on la note $\text{com}(A)$.

Exemple 4.2.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 3. Déterminons la comatrice de la matrice A .

Posons $\text{com}(A) = (b_{ij})$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, alors $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ avec A_{ij} est la matrice obtenue en supprimant dans A , la i -ième ligne et la j -ème colonne. On a donc

$$\begin{aligned} b_{11} &= (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -4, & b_{12} &= (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 22, & b_{13} &= (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \\ & -10, & b_{21} &= (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 11, & b_{22} &= (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -3, & b_{23} &= (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \\ & -7, & b_{31} &= (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -5, & b_{32} &= (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = -7 & \text{et } b_{33} &= (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ & -1. \end{aligned}$$

Alors

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 22 & -10 \\ 11 & -3 & -7 \\ -5 & -7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.2.9. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n . Alors :

- $A({}^t \text{com}(A)) = ({}^t \text{com}(A))A$.
- A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} ({}^t \text{com}(A)).$$

Exemples 4.2.3.

i) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que A est inversible, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} ({}^t \text{com}(A)) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

ii) Dans (Exemple 4.2.3), on a ${}^t \text{com}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 11 & -5 \\ 22 & -3 & -7 \\ -10 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ et $\det A = -46$. On conclut que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} ({}^t \text{com}(A)) = \begin{pmatrix} \frac{2}{23} & \frac{-11}{46} & \frac{5}{46} \\ \frac{-11}{23} & \frac{3}{46} & \frac{7}{46} \\ \frac{5}{23} & \frac{7}{46} & \frac{1}{46} \end{pmatrix}.$$

- Le p -uplet (x_1, \dots, x_p) est solution du système (S) lorsqu'il est solution de chacune des équations formant le système,
- Résoudre le système, c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions.

Interprétation matricielle

Le système linéaire (S) s'écrit sous la forme d'une équation matricielle (équivalente au système) :

$$AX = b \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

$$\iff (S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Exemples 4.3.1.

1. Le système suivant a 2 équations et 3 inconnues :

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

2. Le système

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -2 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$$

est un système linéaire de trois équations et trois inconnues.

- $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ est la matrice du système,

- $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$ est le second membre du système,

- $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ est la matrice élargie du système,

- L'écriture matricielle du système est : $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix},$

4.3.2 Existence des solutions d'un système linéaire

Théorème 4.3.3. Soit (S) un système linéaire de n équations et p inconnues et à coefficients dans \mathbb{K} . Soient A la matrice de (S) et $(A|b)$ sa matrice élargie. On note r le rang de A et m le rang de $(A|b)$. Alors :

- Si $r = m = p$, (S) admet une seule solution.
- Si $r = m < p$, (S) admet une infinité de solutions.
- Si $r \neq m$, alors (S) n'admet pas de solutions.

Remarque 4.3.4.

1. Si un système linéaire a 2 solutions différentes, alors ce système admet une infinité de solutions.
2. Un système linéaire qui n'a aucune solution est dit **incompatible**.
3. Un cas particulier important est celui des **systèmes homogènes**, pour lesquels $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, c'est-à-dire dont le second membre est nul. De tels systèmes sont toujours compatibles car ils admettent toujours la solution $s_1 = s_2 = \dots = s_p = 0$. Cette solution est appelée solution triviale.

4.3.3 Résolutions des systèmes linéaires

1. Méthode de Gauss

Soit (S) un système linéaire, de matrice A et de second membre b :

- On considère la matrice élargie $(A|b)$ du système,
- On cherche la forme échelonnée lignes réduite de $(A|b)$. La matrice finale correspond à un système équivalent à (S) .
- Les inconnues dont le coefficient est un pivot $= 1$ s'appellent inconnues principales, -les autres sont les inconnues secondaires.
- Si le système admet une infinité de solutions, on exprime alors les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.

Exemples 4.3.2.

(a) On considère le système suivant à 3 équations et 3 inconnues.

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ 2x & -y & +5z & = & -5 \\ -x & -3y & -9z & = & -5 \end{cases}$$

La matrice élargie du système est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{pmatrix}.$$

La forme échelonné réduite de la matrice élargie est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi $x = 2$, $y = 4$ et $z = -1$ et l'unique solution du système est $(2, 4, -1)$.

(b) Le système linéaire suivant à 4 équations et 4 inconnues.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases}$$

La matrice élargie du système est : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{pmatrix}$.

Pour faire apparaître des 0 sur la première colonne, on effectue successivement les trois opérations élémentaires suivantes, $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$. On trouve la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 40 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 7L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 40 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 7L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 40 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{-1}{4}L_3$$

$$\begin{aligned}
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow L_4 - 4L_3 \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow \frac{1}{40}L_4 \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 - 7L_4 \\
& \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - 3L_3 - 4L_4
\end{aligned}$$

Alors la forme échlonnée réduite de $(A|b)$ est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \{(2, 1, 1, 1)\}.$$

(c) Le système linéaire suivant à 3 équations et 4 inconnues.

$$\begin{cases} x_1 & +2x_3 & = & 25 \\ & x_2 & -2x_3 & = & 16 \\ & & & x_4 & = & 1 \end{cases}$$

Ce système se résout trivialement en

$$\begin{cases} x_1 & = & 25 - 2x_3 \\ x_2 & = & 16 + 2x_3 \\ x_4 & = & 1. \end{cases}$$

L'inconnue x_3 est secondaire les valeurs de x_1 , x_2 et x_4 s'expriment en fonction de x_3 . On a donc l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \{(25 - 2x_3, 16 + 2x_3, x_3, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer la matrice $E = 2I_3 - C$.
- 2) Déterminer si possible les produits des matrices suivantes :
 $A \times B$, $B \times C$, $C \times E$, $A \times B$ et $B \times A$.

Exercice 3. Écrire dans chaque cas, la matrice carrée A telle que, pour tous nombres entiers naturels i et j compris entre 1 et 3 :

- 1) $a_{i,j} = i - j$.
- 2) $a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i < j \\ -2 & \text{si } i > j \end{cases}$

Exercice 4. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice $A^2 - 3A + 2I_2$ est nulle (Le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ est dit polynôme annulateur de A).
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer la matrice A^2 . En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
- 2) En déduire les solutions du système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.

- 1) Résoudre les systèmes (S_1) et (S_2) par la méthode de Gauss.

$$(S_1) \begin{cases} -2x & +y & +8z & = & 3 \\ -x & +3y & +z & = & 2 \\ 2x & -3y & -5z & = & 2 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} -x & +2y & +8z & = & 1 \\ -x & +2y & +7z & = & 2 \\ 2x & -3y & -12z & = & -1 \end{cases}$$

2) Résoudre les systèmes (S_3) et (S_4) en utilisant une matrice inverse ou la méthode de Cramer.

$$(S_3) \begin{cases} 4x + 2y + 3z = \frac{1}{2} \\ -x + 3y + z = -2 \\ 2x - 3y - z = 3 \end{cases}$$

$$(S_4) \begin{cases} 2x + 2y + 8z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + 4z = -1. \end{cases}$$