Université Moulay Ismaïl
Faculté des Siences
Département de Physique

Parcours Mécanique & Énergétique
Semestre V
Année Universitaire 2011/2012

Examen de Mécanique des Fluides Réels
Durée : $1^{h}30^{mn}$
Mohamed Chaoui

Question 1. ***Notion de viscosité.***

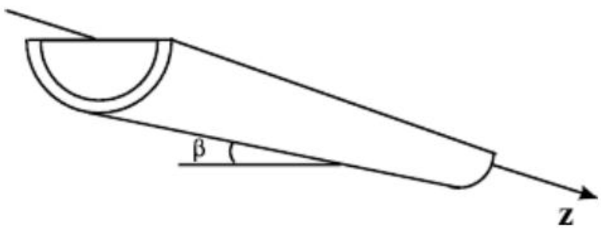
1. *Décrire l'expérience de Newton mettant en évidence la viscosité d'un fluide.*
2. *Donner la signification physique de la viscosité.*
3. *Donner l'expression de la force volumique de viscosité qui s'exerce sur la plaque mobile utilisée dans l'expérience en question.*
4. *Déduire l'unité de la viscosité dynamique.*

Question 2. ***Nombre de Reynolds.***

1. *Définition.*
2. *Interprétation Physique.*

Exercice 1. ***Écoulement dans un canal hemicylindrique.***

Soit l'écoulement laminaire et stationnaire d'un fluide évoluant dans un canal de section semi-



Écoulement dans une Conduite hémicylindrique.

circulaire sous l'effet de la gravité comme indiquer sur la figure. Le fluide est supposé newtonien ayant une viscosité dynamique constante μ et une masse volumique constante ρ.
On suppose que la pression dans le fluide est constante et que la surface libre au contact de l'air est plane. On suppose que seule la composante de vitesse suivant z est non nulle. On propose de représenter le champ des vitesses dans une base cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ où $\overrightarrow{e_z}$ est le vecteur porté par l'axe de révolution de la conduite et $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ sont respectivement les vecteurs radial et polaire définissant une section quelconque normale à l'axe z.

1. *Écrire l'équation de continuité relative à cet écoulement.*
2. *Écrire les projections de l'équation de Navier-Stokes stationnaire dans le système des coordonnées cylindriques.*
3. *Montrer que le profil des vitesses est de la forme :*

$$v_z = \frac{\rho g \sin\beta R^2}{4\mu}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

   Á partir de ce profil,

4. *Calculer le débit volumique Q_V associé à cet écoulement.*
5. *Calculer la vitesse moyenne $\bar{v}$ de l'écoulement dans chaque section de la conduite.*
6. *Calculer le tenseur des contraintes relatif à cet écoulement.*
7. *Calculer la force tangentielle exercée sur la paroi par unité de longueur, dans la direction de l'écoulement.*

Vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{v} = e_r \overrightarrow{e}_r + v_\theta \overrightarrow{e}_\theta + v_z \overrightarrow{e}_z$$

Équation de la conservation de la masse :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Tenseur des contraintes :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} & \sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right) & \sigma_{rz} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) & \sigma_{\theta z} = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Équation de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} \\ &= f_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ &= f_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \end{aligned}$$

ou de manière plus compacte

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla})v_r - \frac{v_\theta^2}{r} &= f_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla})v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} &= f_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla})v_z &= f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta v_z \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} &= v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\theta}{+}v_z\frac{\partial}{\partial z} \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Siences
Département de Physique

Parcours Mécanique & Énergétique
Semestre V
Année Universitaire 2011/2012

Examen de Mécanique des Fluides Réels
Durée : $1^{h}30^{mn}$
Mohamed Chaoui

Notion de viscosité. **5pts**

1. Décrire l'expérience de Newton mettant en évidence la viscosité d'un fluide.
2. Donner la signification physique de la viscosité.
3. Donner l'expression de la force volumique de viscosité qui s'exerce sur la plaque mobile utilisée dans l'expérience en question.
4. Déduire l'unité de la viscosité dynamique.

Nombre de Reynolds. **3pts**

1. Définition.
2. Interprétation Physique.

Écoulement dans un canal hemicylindrique. **12pts**

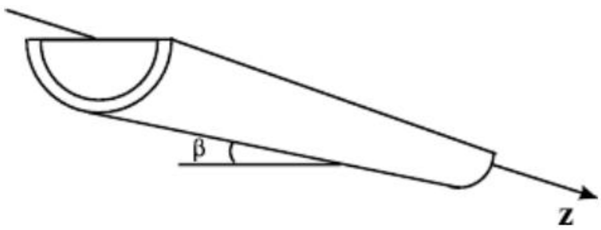


FIGURE 1 – Écoulement dans une Conduite hémicylindrique.

Hypothèses :

H1 Fluide incompressible ; $\rho = C^{te}$.

H2 Fluide visqueux newtonien ; $\mu = C^{te}$.

H3 Écoulement laminaire ; modèle déterministe.

H4 Écoulement Stationnaire ; $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$.

H5 Pression constante.

H6 Surface libre Plane. Ainsi au contact de la surface libre le fluide est soumit à une contrainte qui se réduit à la pression atmosphérique normale. le tenseur des contraintes visqueuses (composantes tangentielles à la base du cisaillement sont nulles).

H7 $\overrightarrow{v} = v_z(r, \theta, z)\overrightarrow{e}_z$.

H8 Le champ des vitesses est à symétrie de révolution autour de l'axe dirigé par $\overrightarrow{e}_z$ de la conduite. Ainsi, $\overrightarrow{v} = v_z(r, z)\overrightarrow{e}_z$.

H9 Dans chaque section orthogonale à $\overrightarrow{e_z}$, la force volumique due à la pesanteur est constante.

H10 La base cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ est choisit comme base de projection.

1. **Équation de continuité :**

   Le champ des vitesses s'écrit dans la base cylindrique

$$\vec{v} = v_z(r,z)\vec{e}_z, \quad v_r = v_\theta = 0$$

   L'équation de la conservation de la masse, appelée aussi équation de continuité, s'écrit

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{v} &= 0\\
\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0\\
\frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0
\end{aligned}$$

   Ainsi, $v_z = v_z(r)$.

2. **Équation de Navier-Stokes stationnaire dans le système des coordonnées cylindriques :**

   Sachant que

$$\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\vec{\nabla} &= v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\\
&= 0
\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)
\end{aligned}$$

   L'équation générale de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_r - \frac{v_\theta^2}{r} &= f_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)\\
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} &= f_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_z &= f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta v_z
\end{aligned}$$

   devient après simplification

$$\begin{aligned}
\vec{e_r} :\ 0 &= \rho f_r - \frac{\partial p}{\partial r}\\
\vec{e_\theta} :\ 0 &= \rho f_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\\
\vec{e_z} :\ 0 &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)
\end{aligned}$$

3. **Calcul du champ de vitesse :**

La force volumique s'écrit

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f} &= g\cos\beta\,\overrightarrow{y} + g\sin\beta\,\overrightarrow{z} \\
&= \underbrace{g\cos\beta\sin\theta}_{f_r}\,\overrightarrow{e_r} + \underbrace{g\cos\beta\cos\theta}_{f_\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \underbrace{g\sin\beta}_{f_z}\,\overrightarrow{e_z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_r} :& \quad \frac{\partial p}{\partial r} &=& \ \rho g\cos\beta\sin\theta \\
\overrightarrow{e_\theta} :& \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} &=& \ \rho r g\cos\beta\cos\theta \\
\overrightarrow{e_z} :& \quad \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) &=& \ \frac{\partial p}{\partial z} - \rho f_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_r} : \ p(r,\theta,z) &= \rho g r\cos\beta\sin\theta + C_r(\theta,z) \\
\overrightarrow{e_\theta} : \ p(r,\theta,z) &= \rho g r\cos\beta\sin\theta + C_\theta(r,z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(r,0,z) &= C_r(0,z) = p_a, \quad \forall(r,z) \\
p(r,\theta,z) &= p_a\left(\frac{\rho g r\cos\beta\sin\theta}{p_a} + 1\right) = p_a\left(\frac{\rho g y\cos\beta}{p_a} + 1\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\rho g y\cos\beta}{p_a} < \frac{\rho g R\cos\beta}{p_a} \ll 1$$

où R est le rayon de la conduite.
La pression varie peut dans la conduite. Elle ne s'éloigne donc pas de la pression atmosphérique p_a. Ainsi on peut admettre que la pression est uniforme dans la conduite et est égale à p_a. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) &= -\rho f_z \\
\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) &= -\frac{\rho g\sin\beta}{\mu}r \\
\frac{dv_z}{dr} &= -\frac{\rho g\sin\beta}{2\mu}r + \frac{K_1}{r} \\
v_z(r) &= -\frac{\rho g\sin\beta}{4\mu}r^2 + K_1\ln r + K_2
\end{aligned}$$

Pour que la vitesse soit définit sur l'axe de la conduite il faudrait impérativement prendre $K_1 = 0$. La constante K_2 est calculée en considérant l'adhérence du fluide à la paroi de la conduite. Ainsi,

$$v_z(R) = -\frac{\rho g\sin\beta}{4\mu}R^2 + K_2 \Longrightarrow K_2 = \frac{\rho g\sin\beta}{4\mu}R^2$$

D'où finalement l'expression du champ des vitesses :

$$v_z = \frac{\rho g\sin\beta R^2}{4\mu}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

Á partir de ce profil,

4. **Débit volumique Q_V :**

$$\begin{aligned}
Q_V &= \int_{S_z} v_z dS \\
&= \frac{\rho g \sin\beta R^2}{4\mu}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=R}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) r dr \\
&= -\frac{\pi\rho g \sin\beta R^4}{8\mu}\int_{r=0}^{r=R}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) d\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \\
&= -\frac{\pi\rho g \sin\beta R^4}{16\mu}\left[\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^2\right]_{r=0}^{r=R} \\
&= \frac{\pi\rho g \sin\beta R^4}{16\mu}
\end{aligned}$$

5. **Vitesse moyenne $\bar{v}$ dans une section quelconque de la conduite :**

$$\begin{aligned}
Q_V &= S_z \bar{v} \\
\bar{v} &= \frac{Q_v}{S_z} \\
&= \frac{\pi\rho g \sin\beta R^4}{16\mu}\frac{2}{\pi R^2} \\
&= \frac{\rho g \sin\beta R^2}{8\mu}
\end{aligned}$$

6. **Tenseur des contraintes $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}$:**

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} = \begin{pmatrix}
\sigma_{rr} = -p + 2\mu\dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \sigma_{r\theta} = \mu\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v_\theta}{r}\right)\right) & \sigma_{rz} = \mu\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial r} + \dfrac{\partial v_r}{\partial z}\right) \\
\sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{v_r}{r}\right) & \sigma_{\theta z} = \mu\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) \\
\sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} = -p + 2\mu\dfrac{\partial v_z}{\partial z}
\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} = \begin{pmatrix}
-p_a & 0 & \mu\dfrac{dv_z}{dr} \\
0 & -p_a & 0 \\
\mu\dfrac{dv_z}{dr} & 0 & -p_a
\end{pmatrix}$$

7. **La force tangentielle exercée sur la paroi par unité de longueur :**
Soit $\overrightarrow{dS} = Rd\theta dz$ l'élément de surface de la paroi qui exerce sur le fluide la force de frottement tangentielle

$$\left[\overrightarrow{dF}\right]_{r=R} = \left[\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}\cdot(dS\overrightarrow{e_z})\right]_{r=R}$$

La résultante par unité de longueur s'écrit donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_{p\to f} &= \int_{S_R} \left[\overrightarrow{dF}\right]_{r=R} \\
&= \int_{S_R} \left[\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} \cdot (dS\overrightarrow{e_z})\right]_{r=R} \\
&= \mu R \frac{dv_z}{dr}\bigg|_{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\theta \int_{z=0}^{z=1} dz\overrightarrow{e_z} \\
&= \mu R\pi \frac{dv_z}{dr}\bigg|_{r=R} \overrightarrow{e_z} \\
&= -\rho g \sin\beta \frac{\pi R^2}{2}\overrightarrow{e_z}
\end{aligned}$$

La force exercée par le fluide sur la paroi est l'pposé de $\overrightarrow{F}_{p\to f}$:

$$\overrightarrow{F}_{f\to p} = \rho g \sin\beta S_c \overrightarrow{e_z}$$

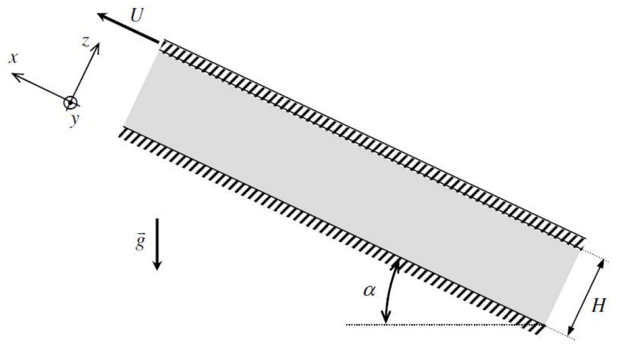
où $S_c = \dfrac{\pi R^2}{2}$ représente la section du canal.
Remarquons que la contrainte visqueuse due à cet écoulement permanent uniforme est indépendante de la loi de comportement utilisée pour décrire la rhéologie du fluide.

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physiquea

Parcours Mécanique & Énergétique
Semestre V
Année Universitaire 2011/2012

Examen de Rattrapage de Mécanique des Fluides Réels
Durée : $1^{h}30^{mn}$
Mohamed Chaoui

Exercice 2. *Écoulement entre deux plaques inclinées noté sur 20 points.*



Écoulement entre deux plaques inclinées

On considère l'écoulement stationnaire et laminaire d'un fluide visqueux (de viscosité μ) et incompressible (de masse volumique ρ) entre deux plaques infinies parallèles et inclinèes d'un angle α avec l'horizontale.
On suppose que la plaque supérieure est animée d'une vitesse constante U et que la plaque inférieure est fixe. On choisira comme repère de calcul le repère cartésien représenté sur la figure ci-dessus.

1. *Á partir de l'équation de continuité et de l'hypothèse de la symétrie du problème, établir que la vitesse du fluide s'exprime comme : $\overrightarrow{v} = v_x(z)\overrightarrow{e_x}$.*
2. *Négliger le poids de la plaque supérieure revient à poser constante et égale à p_a la pression en $z = H$. Sous cette, hypothèse*
   (a) *Écrire et projeter l'équation de Navier-Stokes dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.*
   (b) *Exprimer le gradient de pression suivant l'axe x.*
   (c) *Déduire l'expression de la pression $p(z)$.*
3. *Montrer que le profil des vitesses est de la forme $v_x(z) = Az^2 + Bz + C$.*
4. (a) *Établir les conditions aux limites, que doit satisfaire le champ des vitesses de cet écoulement visqueux, au niveau des deux plaques.*
   (b) *Déduire les trois constantes A, B et C.*
5. *Exprimer le débit volumique Q_V du fluide s'écoulant entre les deux plaques, sur une épaisseur unitaire ($\Delta y = 1$), en fonction de ρ, μ, g, α, H et U.*
6. *Quelle condition portant sur U permet d'assurer un débit positif, et par voie de conséquence l'ascension globale du liquide ?*
7. *En se plaçant dans le cas limite d'un débit nul ($Q_V = 0$),*
   (a) *Donner les éléments du tenseur des contraintes s'exerçant sur le fluide au contact de la plaque supérieure.*
   (b) *En déduire la force de frottement qu'exerce le fluide sur cette plaque (considérer la force par unité de longueur suivant x et suivant y).*

(c) *Quelle puissance (par unité de surface) doit-on développer pour tirer la plaque ?*

8. *En l'absence de plaque supérieure, le fluide admet une surface libre au contact de l'air dont la pression notée* p_a *est donnée.*

   (a) *En se basant sur ce qui a précédé donner l'expression de la pression et de la vitesse du fluide.*

   (b) *Exprimer les conditions aux limites sur la plaque inférieure et à la surface libre.*

   (c) *Exprimer dans ces conditions le nouveau débit volumique.*

   (d) *Donner l'expression du tenseur des contraintes* $\overline{\overline{\sigma}}_0$ *sur la plaque inférieure*

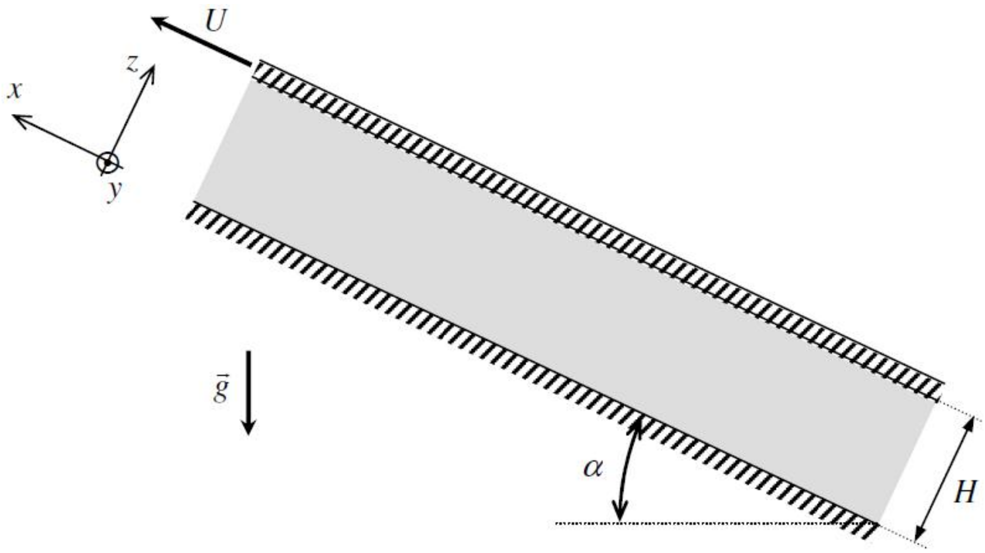
   (e) *Déduire la force de frottement par unité de surface qu'exerce le fluide en écoulement sur la plaque inférieure.*

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Siences
Département de Physique

Parcours Mécanique & Énergétique
Semestre V
Année Universitaire 2011/2012

Corrigé de l'examen de Rattrapage de Mécanique des Fluides Réels
Durée : $1^{h}30^{mn}$
Mohamed Chaoui

Écoulement entre deux plaques inclinées. 20pts



Hypothèses :

H1 La base cartésiènne $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ est choisit comme base de projection.

H2 Fluide incompressible ; $\rho = C^{te}$.

H3 Fluide visqueux newtonien ; $\mu = C^{te}$.

H4 Le fluide adhère à la paroi elliptique.

H5 Écoulement laminaire ; écoulement rampant.

H6 Écoulement Stationnaire ; $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$.

H7 Le gradient de pression suivant $\vec{e_x}$ est non nul.

1. **1pt**
   Équation de continuité :

   Le champ des vitesses s'écrit dans la base cartésiènne

$$\vec{v} = v_x(x, z)\vec{e}_x, \quad v_y = v_z = 0$$

   L'équation de la conservation de la masse, appelée aussi équation de continuité, s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \vec{v} = v_x(y, z)\vec{e_x}$$

   En plus, d'après l'hypothèse [**H7**] l'écoulement est infini suivant l'axe des y. Ainsi chaque plan xOz est un plan de symétrie. D'où, Finalement

$$\vec{v} = v_x(z)\vec{e_x} \quad \textbf{1pt}$$

2. **6pts**

(a) **4pts**

Équation de Navier-Stokes stationnaire dans le système des coordonnées cartesiènnes :

Sachant que

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla} = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

et

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

L'équation générale de Navier-Stokes en coordonnées cartesiènnes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla})v_x &= f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta v_x \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla})v_y &= f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v_y \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla})v_z &= f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta v_z
\end{aligned}$$

La force volumique s'écrit

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f} &= -g\left(\sin\alpha\overrightarrow{e_x} + \cos\alpha\overrightarrow{e_z}\right) \\
&= \underbrace{(-g\sin\alpha)}_{f_x}\overrightarrow{e_x} + \underbrace{(-g\cos\alpha)}_{f_z}\overrightarrow{e_z} \quad \textbf{1pt}
\end{aligned}$$

L'équation de Navier-Stokes devient après simplification et substitution de la focrce volumique de pesanteur

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_x} : \quad 0 &= -\rho g\sin\alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{d^2v_x}{dz^2} && \textbf{1pt} \\
\overrightarrow{e_y} : \quad 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} && \textbf{1pt} \\
\overrightarrow{e_z} : \quad 0 &= -\rho g\cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial z} && \textbf{1pt}
\end{aligned}$$

(b) **1pts**

Calcul du gradient de pression :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_x} : \quad \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho g\sin\alpha + \mu\frac{d^2v_x}{dz^2} \\
\overrightarrow{e_y} : \quad \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\
\overrightarrow{e_z} : \quad \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g\cos\alpha
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{e_z} : \quad p(x,z) &= -\rho g z\cos\alpha + C_z(x) \\
\frac{\partial p(x,z)}{\partial x} &= \underbrace{\frac{dC_z(x)}{dx}}_{\text{fct(x)}} = -\rho g\sin\alpha + \mu\underbrace{\frac{d^2v_x(z)}{dz^2}}_{\text{fct(z)}} = C^{te} \\
C_z(x) &= \left(-\rho g\sin\alpha + \mu\frac{d^2v_x(z)}{dz^2}\right)x + P_C \\
p(x,z) &= \left(-\rho g\sin\alpha + \mu\frac{d^2v_x(z)}{dz^2}\right)x - (\rho g\cos\alpha)z + P_C \\
p(x,z) &= \frac{\partial p(x,z)}{\partial x}x + \frac{\partial p(x,z)}{\partial z}z + P_C
\end{aligned}
$$

où P_C est une pression de référence constante.
Le gradient de la pression est constant et s'écrit dans la base cartesiènne

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla}p(x,z) &= \frac{\partial p(x,z)}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial p(x,z)}{\partial z}\overrightarrow{e_z} \\
\overrightarrow{\nabla}p(x,z) &= \left(-\rho g\sin\alpha + \mu\frac{d^2v_x(z)}{dz^2}\right)\overrightarrow{e_x} - (\rho g\cos\alpha)\overrightarrow{e_z}
\end{aligned}
$$

Si on néglige poids la plaque supérieure, alors la pression appliquer sur le fluide est celle de l'atmosphère que l'on note p_a. Ainsi

$$
p_a = p(x,H) = \left(-\rho g\sin\alpha + \mu\frac{d^2v_x(z)}{dz^2}\right)x - (\rho g\cos\alpha)H + P_C, \quad \forall x
$$

Cette relation n'est satisfaite que si

$$
\frac{\partial p(x,z)}{\partial x} = -\rho g\sin\alpha + \mu\frac{d^2v_x(z)}{dz^2} = 0 \quad \textbf{1pt}
$$

D'où la constante d'intégration P_C qui vaut

$$
P_C = p_a + \rho g H\cos\alpha
$$

Et le laplacien de la vitesse s'écrit en conséquence

$$
\frac{d^2v_x(z)}{dz^2} = \frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}
$$

Nous concluons que le gradient de la pression suivant la direction x est nul et n'est différent de zéro que suivant z. Ainsi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g\cos\alpha
\end{aligned}
$$

(c) **1pt**
Calcul du champ de pression :

Ainsi

$$
p(z) = \rho g\cos\alpha\,(H - z) + p_a \quad \textbf{1pt}
$$

3. **1pt**
   Calcul du champ de vitesse :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 v_x(z)}{dz^2} &= \frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} \\
v_x(z) &= \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} z^2 + Bz + C \quad \textbf{1pt}
\end{aligned}$$

4. **2pts**

   (a) **1pt**
   Application des conditions aux limites :
   En tenant compte des conditions aux limites

$$\begin{aligned}
v_x(0) &= C = 0 \\
v_x(H) &= \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} H^2 + BH + C = U \quad \textbf{1pt}
\end{aligned}$$

   (b) **1pt**
   Détermination des constantes :

$$\begin{aligned}
C &= 0 \\
B &= \frac{U}{H} - \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} H \quad \textbf{1pt}
\end{aligned}$$

$$v_x(z) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} z(H - z) + U\frac{z}{H}$$

5. **2pts**
   Débit volumique Q_V :

$$\begin{aligned}
Q_V &= \int_{S_z} v_x dS = \int_{\Delta y=1} dy \int_{z=0}^{z=H} v_x dz \quad \textbf{1pt} \\
&= -\frac{\rho g H \sin\alpha}{2\mu} \int_{z=0}^{z=H} z dz + \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} \int_{z=0}^{z=H} z^2 dz + \frac{U}{H} \int_{z=0}^{z=H} z dz \\
&= -\frac{\rho g H^3 \sin\alpha}{4\mu} + \frac{\rho g H^3 \sin\alpha}{6\mu} + \frac{UH}{2} \\
&= -\frac{\rho g H^3 \sin\alpha}{12\mu} + \frac{UH}{2} \quad \textbf{1pt}
\end{aligned}$$

6. **1pt**
   Flux asscendant :
   Le flux est asscendant si

$$\begin{aligned}
Q_V &> 0 \\
U &> \frac{\rho g H^2 \sin\alpha}{6\mu} \quad \textbf{1pt}
\end{aligned}$$

7. **2pts**
Débit nul :

(a) **0.5pt**

Tenseur des contraintes $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}$:

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} = -p(z) & 0 & \sigma_{xz} = \mu\dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 & \sigma_{yy} = -p(z) & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & \sigma_{zz} = -p(z) \end{pmatrix}$$

Si le debit est nul, alors

$$\begin{aligned} Q_V &= 0 \\ U &= \frac{\rho g H^2 \sin\alpha}{6\mu} \\ [v_x(z)]_{Q_V=0} &= -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} zH + \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} z^2 + \frac{\rho g H^2 \sin\alpha}{6\mu}\frac{z}{H} \\ &= -\frac{\rho g \sin\alpha}{3\mu} zH + \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} z^2 \\ &= -\frac{\rho g \sin\alpha}{6\mu} z\,(2H - 3z) \\ [\sigma_{xz}(z)]_{Q_V=0} = \mu\left[\frac{\partial v_x(z)}{\partial z}\right]_{Q_V=0} &= -\rho g \sin\alpha\left(\frac{H}{3} - z\right) \end{aligned}$$

La contrainte de cisaillement (contrainte tangentielle) dans le cas où ($Q_V = 0$) ainsi que la pression valent au niveau de la plaque ($z = H$)

$$\begin{aligned} [\sigma_{xz}(z = H)]_{Q_V=0} &= \frac{2}{3}\rho g H \sin\alpha \\ p(z = H) &= \rho g \cos\alpha\,(H - z) + p_a = p_a \end{aligned}$$

Finalement

$$\left[\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(H)\right]_{Q_V=0} = \begin{pmatrix} -p_a & 0 & \frac{2}{3}\rho g H \sin\alpha \\ 0 & -p_a & 0 \\ \frac{2}{3}\rho g H \sin\alpha & 0 & -p_a \end{pmatrix} \quad \textbf{0.5pt}$$

(b) **1pts**

Soit ($\overrightarrow{dS} = -dxdy\overrightarrow{e_z}$) l'élément de surface de la plaque supérieure qui subit de la part du fluide la force élémentaire $\left[\overrightarrow{dF}(z = H)\right]_{Q_V=0}$. ($-\overrightarrow{e_z}$) est la normale à la plaque supérieure "sortant" de la plaque vers le fluide

La force exercée par le fluide sur la plaque supérieure par unité de longueur suivant x et suivant y s'écrit :

$$\left[\overrightarrow{dF}(z = H)\right]_{Q_V=0} = -\left[\left(\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(z = H)\right)\cdot(dS\overrightarrow{e_z})\right]_{Q_V=0}$$

La résultante de cette fore s'écrit

$$
\begin{aligned}
\left[\overrightarrow{F}_{f\to p}\right]_{Q_V=0} &= \int_{S_{xy}} \left[\overrightarrow{dF}(z=H)\right]_{Q_V=0} \\
&= -\int_{S_{xy}} \left[\left(\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(z=H)\right)\cdot(dS\overrightarrow{e_z})\right]_{Q_V=0} \\
&= -\left[\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(z=H)\right]_{Q_V=0}\cdot\left(\int_{\Delta x=1} dx \int_{\Delta y=1} dy\right)\overrightarrow{e_z} \\
&= -\left[\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(z=H)\right]_{Q_V=0}\cdot\overrightarrow{e_z} \\
&= -\begin{pmatrix} -p_a & 0 & \frac{2}{3}\rho g H\sin\alpha \\ 0 & -p_a & 0 \\ \frac{2}{3}\rho g H\sin\alpha & 0 & -p_a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{-\frac{2}{3}\rho g H\sin\alpha\overrightarrow{e_x}}_{\left[\overrightarrow{F}^{T}_{f\to p}\right]_{Q_V=0}} + \underbrace{p_a\overrightarrow{e_z}}_{\left[\overrightarrow{F}^{N}_{f\to p}\right]_{Q_V=0}} \qquad \textbf{1pt}
\end{aligned}
$$

La force exercée par le fluide sur la plaque supérieure se présente donc comme la résultante d'une composante tangentielle $\left\{\left[\overrightarrow{F}^{T}_{f\to p}\right]_{Q_V=0} = -\frac{2}{3}\rho g H\sin\alpha\overrightarrow{e_x}\right\}$ et d'une composante normale qui s'écrit, en toute evidence, $\left\{\left[\overrightarrow{F}^{N}_{f\to p}\right]_{Q_V=0} = p_a\overrightarrow{e_z}\right\}$.
Remarquons que la contrainte visqueuse due à cet écoulement permanent est indépendante de la loi de comportement utilisée pour décrire la rhéologie du fluide.

(c) **0.5pt Calcul de la puissance développée par la force de frottement visqueux du fluide sur la plaque supérieure :**

La vitesse du fluide au niveau de la plaque vaut

$$
\begin{aligned}
\left[v_x(z)\right]_{Q_V=0} &= -\frac{\rho g\sin\alpha}{6\mu}z\,(2H-3z) \\
\left[v_x(z)\right]_{(z=H,Q_V=0)} &= \frac{\rho g H^2\sin\alpha}{6\mu} \\
&= U
\end{aligned}
$$

Ce qui est cohérent vu que la vitesse du fluide égalise la vitesse de la plaque au contact ($z=H$). Puisque cette vitesse est constante la puissance s'écrit simplement

$$
\begin{aligned}
\left[\mathscr{P}_{f\to P}\right]_{(z=H,Q_V=0)} &= \int_{S_{xy}} \left[\overrightarrow{dF}_{f\to p}\cdot\overrightarrow{v_x}\right]_{(z=H,Q_V=0)} \\
&= \left[\overrightarrow{F}_{f\to p}\cdot\overrightarrow{v_x}\right]_{(z=H,Q_V=0)}\left(\int_{\Delta x=1} dx\int_{\Delta y=1} dy\right) \\
&= \left(-\frac{2}{3}\rho g H\sin\alpha\overrightarrow{e_x} + p_a\overrightarrow{e_z}\right)\cdot(U\overrightarrow{e_x}) \\
&= -\frac{\rho^2 g^2 H^3\sin\alpha^2}{9\mu} \qquad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}
$$

8. **5pts**
Absence de la plaque supérieure :

(a) **1pt**
En l'absence de la de la plaque supérieure la surface supérieure du fluide est au contact de l'air. On suppose que cette surface est plane. La pression à la surface est celle de l'atmosphère. Ainsi, le champ de pression et de vitesse sont les mêmes qu'on présence de la plaque supposée sans poids. La seule différence réside dans les conditions aux limites liées à la vitesse.

$$p(z) = \rho g \cos\alpha\,(H-z) + p_a \textbf{1pt}$$

(b) **1pts** Les conditions aux limites sont :
L'adhérence du fluide à la plaque inferieure :

$$\begin{aligned} v_x(z) &= \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} z^2 + Bz + C \\ v_x(0) &= C = 0 \end{aligned}$$

Continuité de la contraite à la surface libre en contact avec l'air :

$$\begin{aligned}
\left[\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_{fluide} - \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_{air}\right]_{(z=H)} \cdot \overrightarrow{e_z} &= 0 \\
\left[\begin{pmatrix} -p_a & 0 & \mu\dfrac{\partial v_x(z)}{\partial z} \\ 0 & -p_a & 0 \\ \dfrac{\partial v_x(z)}{\partial z} & 0 & -p_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -p_a & 0 & 0 \\ 0 & -p_a & 0 \\ 0 & 0 & -p_a \end{pmatrix}\right]_{(z=H)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu\dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu\dfrac{\partial v_x}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(z=H)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} \mu\dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(z=H)} &= 0
\end{aligned}$$

Ainsi la condition de continuité de la contrainte sur l'interface (fluide-air) se réduit à

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial v_x}{\partial z}\right]_{(z=H)} &= 0 \\
\frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} H + B &= 0 \\
B &= -\frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} H
\end{aligned}$$

Finalement la vitesse s'écrit

$$\begin{aligned}
v_x(z) &= -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} z\,(2H-z) \quad \textbf{0.5pt} \\
p(z) &= \rho g \cos\alpha\,(H-z) + p_a \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

(c) **1pt**

Débit volumique Q_V :

$$\begin{aligned} Q_V &= \int_{S_z} v_x dS = \int_{\Delta y=1} dy \int_{z=0}^{z=H} v_x dz \quad \mathbf{0.5pt} \\ &= -\frac{\rho g H \sin\alpha}{\mu} \int_{z=0}^{z=H} z dz + \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} \int_{z=0}^{z=H} z^2 dz \\ &= -\frac{\rho g H^3 \sin\alpha}{2\mu} + \frac{\rho g H^3 \sin\alpha}{6\mu} \\ &= -\frac{\rho g H^3 \sin\alpha}{3\mu} \quad \mathbf{0.5pt} \end{aligned}$$

(d) **1pt**

Tenseur des contraintes $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}$:

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} = -p(z) & 0 & \sigma_{xz} = \mu \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 & \sigma_{yy} = -p(z) & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & \sigma_{zz} = -p(z) \end{pmatrix}$$

Tenseur des contraintes $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_0$ sur la plaque inférieure :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_0 = \begin{pmatrix} -p(0) & 0 & \sigma_{xz}(0) = -\dfrac{\rho g H \sin\alpha}{\mu} \\ 0 & -p(0) & 0 \\ \sigma_{xz}(0) = -\dfrac{\rho g H \sin\alpha}{\mu} & 0 & -p(0) \end{pmatrix} \quad \mathbf{1pt}$$

(e) **1pt**

La force élémentaire appliquée par le fluide sur la plaque inférieure s'écrit

$$\overrightarrow{dF}_{f\to p} = -\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_0 \cdot \overrightarrow{dS} = -\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_0 \cdot (dxdy\overrightarrow{e_z})$$

où $\overrightarrow{e_z}$ est la normale "sortante" de la plaque inférieure vers le fluide.

$$
\begin{aligned}
\left[\overrightarrow{F}_{f\to p}\right] &= \int_{S_{xy}} \left[\overrightarrow{dF}(z=0)\right] \\
&= -\int_{S_{xy}} \left[\left(\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(z=0)\right)\cdot(-dS\overrightarrow{e_z})\right] \quad \textbf{0.5pt} \\
&= \left[\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(z=0)\right]\cdot\left(\int_{\Delta x=1} dx \int_{\Delta y=1} dy\right)\overrightarrow{e_z} \\
&= \left[\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(z=0)\right]\cdot\overrightarrow{e_z} \\
&= \begin{pmatrix} -p(0) & 0 & \sigma_{xz}(0) \\ 0 & -p(0) & 0 \\ \sigma_{xz}(0) & 0 & -p(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\sigma_{xz}(0)\overrightarrow{e_x}}_{[\overrightarrow{F}^T_{f\to p}]} - \underbrace{p(0)\overrightarrow{e_z}}_{[\overrightarrow{F}^N_{f\to p}]} \\
&= \underbrace{\left(\frac{\rho g H \sin\alpha}{\mu}\right)(-\overrightarrow{e_x})}_{\text{Force de frottement tangentielle}} + \underbrace{\left(\rho g H \cos\alpha + p_a\right)(-\overrightarrow{e_z})}_{\text{Force de pression normale}} \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}
$$

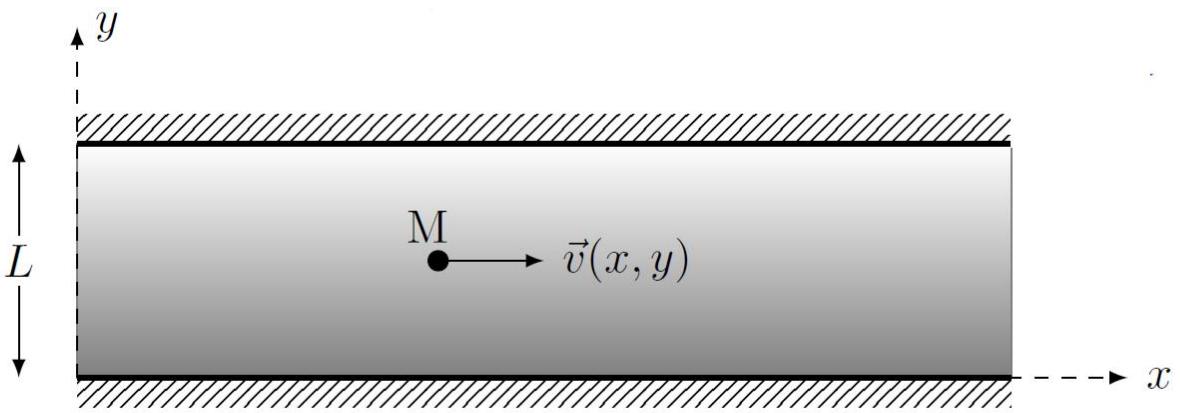
Université Moulay Ismaïl
Faculté des Siences
Département de Physique

Parcours Mécanique & Énergétique
Semestre V
Année Universitaire 2012/2013

Examen de Mécanique des Fluides Réels
Durée : $1^{h}30^{mn}$
Mohamed Chaoui

Exercice 3. ***Écoulement de Poiseuille plan.***

L'espace est rapporté à un trièdre $Oxyz$, de vecteurs de base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Oy et est dirigé suivant la verticale ascendante. ***On néglige les effets de la pesanteur****. Un fluide newtonien incompressible de viscosité μ est confiné entre deux plaques planes, infinies, parallèles, perpendiculaires à Oy et de cotes respectives : $y = 0$ et $y = L$. Les deux plaques sont fixes et l'écoulement est supposé établi, stationnaire et unidirectionnel. En un point de l'écoulement, le champ des vitesses s'écrit $\overrightarrow{v} = v_x(x,y)\overrightarrow{e_x}$ et le champ de pression, $p = p(x,y)$.*



Écoulement de Poiseuille entre deux plaques fixes.

1. (a) *Á partir de l'équation de continuité et de l'hypothèse de la symétrie du problème, établir que la vitesse du fluide s'exprime comme : $\overrightarrow{v} = v_x(y)\overrightarrow{e_x}$.*
   (b) *Que peut-on dire de l'accélération d'une particule du fluide ?*
2. (a) *Écrire et projeter l'équation de Navier-Stokes dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.*
   (b) *Exprimer le gradient de pression suivant l'axe x.*
   (c) *Montrer que ce gradient de pression doit être nécessairement non nul pour qu'il y ait écoulement.*
   (d) *Montrer que p ne dépend pas de y.*
   (e) *Montrer que $\dfrac{dp}{dx}$ est constant, on appellera K cette constante.*
   (f) *Déduire l'expression de la pression $p(x)$. On notera p_0 la pression de référence en $x = 0$.*
3. (a) *Montrer que le profil des vitesses est de la forme $v_x(z) = \dfrac{K}{2\mu}y^2 + By + C$.*
   (b) *En exprimant la condition d'adhérence, que doit satisfaire le champ des vitesses de cet écoulement visqueux, au niveau des deux plaques, déduire les constantes B et C.*
   (c) *Calculer la vitesse maximale v_{xmax} entre les deux plaques.*
   (d) *Quel est le signe de K si v_x est positive ?*
   (e) *Représentez schématiquement le profil des vitesses $v_x = f(y)$ entre les deux plaques.*
   (f) *Calculer la vitesse moyenne $\bar{v_x}$ de l'écoulement entre les deux plaques.*

4. *Calculer le débit volumique* Q_V *à travers une section délimitée par les plaques* ($y = 0$ *et* $y = L$) *et par les plans* $z = -\frac{h}{2}$ *et* $z = \frac{h}{2}$. *Commentez le résultat*
5. *Calculer le tenseur des contraintes* $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}$ *relatif à cet écoulement.*
6. *Calculer la force* $\overrightarrow{F}_{p^+\to f}$*, par unité de surface, exercée par la plaque supérieure sur le fluide. Spécifier les composantes tangentièlle* $\overrightarrow{F}^T_{p^+\to f}$ *et normale* $\overrightarrow{F}^N_{p^+\to f}$ *de* $\overrightarrow{F}_{p^+\to f}$.

Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = e_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

Équation de la conservation de la masse dans le cas d'un fluide incompressible :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Équation de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\
\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\
\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)
\end{aligned}$$

Tenseur des contraintes :

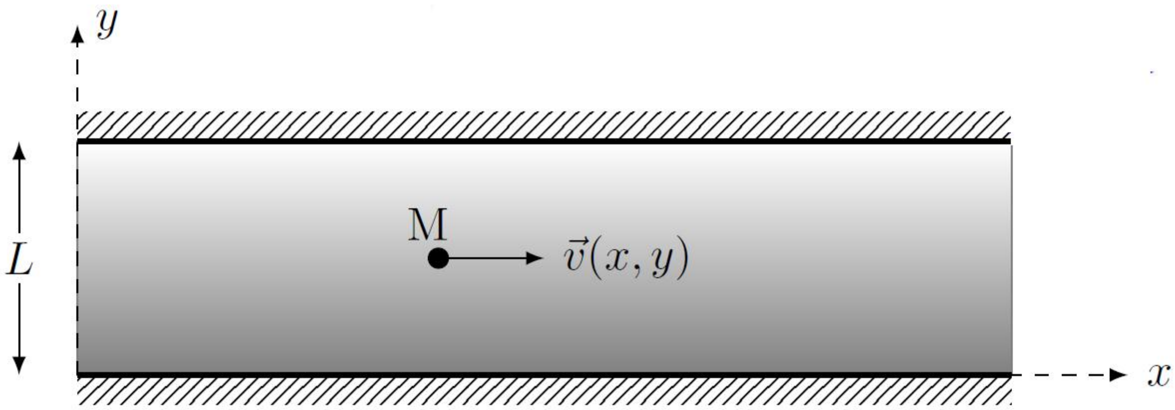
$$\vec{\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} & \sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} & \sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Force due au tenseur des contraintes :

$$d\vec{F} = \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{dS} = \vec{\vec{\sigma}} \cdot (dS\,\vec{n})$$

où $\vec{dS}$ est le vecteur élémentaire de surface sortant.

Réponse 1. ***Écoulement de Poiseuille entre deux plaques planes.*** ***20pts***



Écoulement de Poiseuille entre deux plaques fixes.

Hypothèses :

H1 *Fluide incompressible ;* $\rho = C^{te}$.

H2 *Fluide visqueux newtonien ;* $\mu = C^{te}$.

H3 *Écoulement laminaire ; écoulement rampant.*

H4 *Écoulement Stationnaire ;* $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$.

H5 *Pression linéaire entre les deux plaques.*

H6 *Écoulement unidirectionnel,* $\overrightarrow{v} = v_x(x, y, z)\overrightarrow{e}_x$.

H7 *Le champ des vitesses est symétrique par rapport à tout plan xOy perpendiculaire aux plaques. Ainsi,* $\overrightarrow{v} = v_x(x, y)\overrightarrow{e}_x$.

H9 *Dans chaque section orthogonale à* $\overrightarrow{e_x}$*, la force volumique due à la pesanteur est négligeable.*

H8 *La base cartésiènne* $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ *est choisit comme base de projection.*

1. ***1.5pt***

   (a) ***1pt***

   Équation de continuité :

   Le champ des vitesses s'écrit dans la base cartésiènne

$$\overrightarrow{v} = v_x(x, y)\overrightarrow{e}_x, \quad v_y = v_z = 0$$

   L'équation de la conservation de la masse, appelée aussi équation de continuité, s'écrit dans ce cas où le fluide est incompressible

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

   Le champs des vitesses est indépendant de x, d'où

$$\overrightarrow{v} = v_x(y)\overrightarrow{e_x} \quad \textbf{\textit{1pt}}$$

(b) **0.5pt**

Accélération de la particule :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})}_{=0} v_x = 0$$

L'accélération de la particule est nulle.

2. **6.5pts**

(a) **3pts**
Équation de Navier-Stokes stationnaire dans le système des coordonnées cartesiènnes :

D'après la structure du champs des vitesses

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla} = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

et

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

L'équation générale de Navier-Stokes en coordonnées cartesiènnes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_x &= f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta v_x \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_y &= f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v_y \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})v_z &= f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta v_z
\end{aligned}$$

Où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ *est la viscosité cinématique du fluide fluide soumis à l'écoulement en question.*
La force volumique de pesanteur est négligeable

$$\begin{aligned}
\vec{f} &= 0 \\
f_y &= 0
\end{aligned}$$

L'équation de Navier-Stokes devient après simplification et substitution de la focrce volumique de pesanteur

$$\begin{aligned}
\vec{e_x} :\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{d^2 v_x}{dy^2} && \textbf{1pt} \\
\vec{e_y} :\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} && \textbf{1pt} \\
\vec{e_z} :\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} && \textbf{1pt}
\end{aligned}$$

(b) ***0.5pts***
Calcul du gradient de pression :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_x} : \quad \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} \\
\overrightarrow{e_y} : \quad \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\
\overrightarrow{e_z} : \quad \frac{\partial p}{\partial z} &= 0
\end{aligned}$$

où

$$\overrightarrow{\nabla p} = \frac{\partial p}{\partial x}\overrightarrow{e_x} = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}\overrightarrow{e_x}$$

(c) ***0.5pts***
Gradient de pression non nul :

Supposons que le gradient de pression est nul, alors d'après ce qui viend de précéder

$$\overrightarrow{\nabla p} = \frac{\partial p}{\partial x}\overrightarrow{e_x} = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}\overrightarrow{e_x} = 0$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 v_x}{dy^2} &= 0 \\
\frac{dv_x}{dy} &= C_1 \\
v_x(y) &= C_1 y + C_2
\end{aligned}$$

Or la condition d'adherence aux parois impose

$$\begin{array}{llcccccc}
y = 0 : & v_x(y=0) & = & C_2 & = & 0 & & \\
y = L : & v_x(y=L) & = & C_1 L + C_2 & = & 0 & \Rightarrow & C_1 = 0
\end{array}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{\nabla p} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v} = 0$$

D'où nous concluons que l'écoulement ne pourrait avoir lieu que si le gradient de pression est non nul.

(d) ***0.5pts***

D'après le calcul du gradient de pression

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial p}{\partial z} &= 0
\end{aligned}$$

D'où $p = p(x)$

(e) ***1pts***

$$\overrightarrow{e_x} : \underbrace{\frac{dp}{dx}}_{fct(x)} = \underbrace{\mu \frac{d^2 v_x(y)}{dy^2}}_{fct(y)} = C^{te} = K$$

(f) ***1pts***

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= K \\ p(x) &= Kx + p_0 \end{aligned}$$

où p_0 *est une pression de référence prise en* $x = 0$.

3. ***6pt***

Calcul du champ de vitesse :

(a) ***1pt***

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_x(y)}{dy^2} &= \frac{K}{\mu} \\ v_x(y) &= \frac{K}{2\mu} y^2 + By + C \quad \textbf{\textit{1pt}} \end{aligned}$$

(b) ***1pt***

Application des conditions aux limites :
En tenant compte des conditions aux limites

$$\begin{aligned} v_x(y=0) &= C = 0 \\ v_x(y=L) &= \frac{K}{2\mu} L^2 + BL + C = 0 \quad \textbf{\textit{1pt}} \end{aligned}$$

Détermination des constantes :

$$\begin{aligned} C &= 0 \\ B &= -\frac{K}{2\mu} L \quad \textbf{\textit{1pt}} \end{aligned}$$

$$v_x(y) = -\frac{K}{2\mu} y(L - y)$$

(c) ***1pt***

Calcul de la vitesse maximale v_{xmax} ***:***

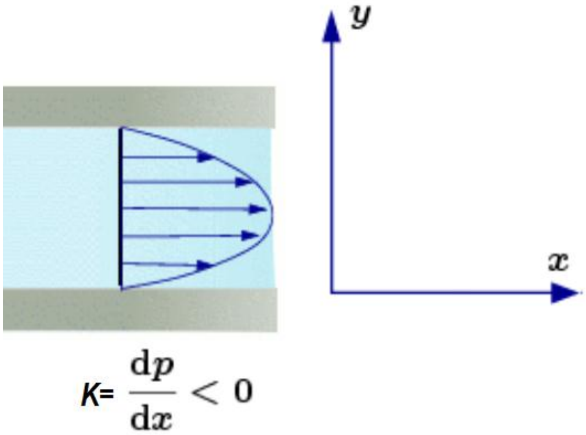
$$
\begin{aligned}
v_x(y) &= -\frac{K}{2\mu}y(L-y) \\
\frac{dv_x}{dy} &= -\frac{K}{2\mu}(L-2y) \\
\frac{dv_x}{dy} &= 0 \quad pour \quad y=\frac{L}{2} \\
v_{xmax} &= v_x(y=\frac{L}{2}) = -\frac{KL}{8\mu}
\end{aligned}
$$

(d) ***1pt***
Signe de K ***:***

$$
\frac{v_x(y)}{K} = -\frac{1}{2\mu}y(L-y) \leq 0
$$

Ainsi $v_x(y)$ *et* K *sont de signes opposés. Si* $v_x(y)$ *est positive alors* K *est négatif.*

(e) ***1pt***
Profile des vitesses entre les deux plaques :
Profile parabolique en y^2



Écoulement de Poiseuille entre deux plaques fixes.

(f) ***1pt***
Calcul de la vitesse moyenne $\overline{v_x}$ ***:***

$$
\begin{aligned}
\overline{v_x} &= \frac{1}{S_x}\int_{S_x} v_x dS = \frac{1}{S_x}\int_{\Delta z=1} dz \int_{y=0}^{y=L} v_x dy \quad \textbf{1pt} \\
&= -\frac{K}{2\mu}\frac{1}{L\Delta z}\int_{y=0}^{y=L} y(L-y)dy \quad \textbf{1pt} \\
&= -\frac{K}{2\mu L}\left[\frac{Ly^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=L} \quad \textbf{1pt} \\
&= -\frac{KL^2}{12\mu} \quad \textbf{1pt}
\end{aligned}
$$

4. ***2pts***
Débit volumique Q_V :

$$
\begin{aligned}
Q_V &= \int_{S_x} v_x dS = S_x \overline{v_x} \quad \textbf{\textit{1pt}} \\
&= -\frac{KhL^3}{12\mu} \quad \textbf{\textit{1pt}} \\
&= -\frac{KS_xL^2}{12\mu} \quad \textbf{\textit{1pt}}
\end{aligned}
$$

Le débit est constant dans toute section normale à l'écoulement.

5. ***2pts***

Tenseur des contraintes $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}$:

$$
\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} = -p(x) & \sigma_{xy} = \mu \dfrac{dv_x}{dy} & \sigma_{xz} = 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} = -p(x) & \sigma_{yz} = 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} = -p(x) \end{pmatrix}
$$

6. ***2pts***
Calcul de la force $\overrightarrow{F}_{p^+ \to f}$, par unité de surface, exercée par la plaque supérieure sur le fluide. :

Le tenseur des contraintes exprimé sur la plaque supérieure s'écrit

$$
\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(x, y = L, \overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_y}) = \begin{pmatrix} -p(x) & KL & 0 \\ KL & -p(x) & 0 \\ 0 & 0 & -p(x) \end{pmatrix}
$$

Spécifier les composantes tangentièlle $\overrightarrow{F}^T_{p^+ \to f}$ et normale $\overrightarrow{F}^N_{p^+ \to f}$ de
Soit ($\overrightarrow{dS} = dxdz\overrightarrow{e_y}$) l'élément de surface de la plaque supérieure qui exerce sur le fluide la force élémentaire $\overrightarrow{dF}(y = L)$. ($-\overrightarrow{e_z}$) est la normale à la plaque supérieure "sortant" de la plaque vers le fluide
La force exercée par le fluide sur la plaque supérieure par unité de longueur s'écrit :

$$
\left[\overrightarrow{dF}_{p^+ \to f}\right]_{y=L} = \left[\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} \cdot (dS\overrightarrow{e_y})\right]_{y=L}
$$

La résultante de cette fore s'écrit

$$
\begin{aligned}
\left[\overrightarrow{F}_{p^+\to f}\right]_{y=L} &= \int_{S_{xz}} \left[\overrightarrow{dF}_{p^+\to f}\right]_{y=L} \\
&= \int_{S_{xz}} \left[\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} \cdot \overrightarrow{e_y} dS\right]_{y=L} \\
&= \left(\int_{\Delta x=1} \left[\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} \cdot \overrightarrow{e_y}\right]_{y=L} dx\right) \int_{\Delta z=1} dz \\
&= \int_{\Delta x=1} \left[KL\overrightarrow{e_x} - p(x)\overrightarrow{e_y}\right] dx \\
&= KL\overrightarrow{e_x} - \int_{\Delta x=1} p(x) dx \overrightarrow{e_y} \\
&= KL\overrightarrow{e_x} - \left[\frac{K}{2}x^2 + p_0 x\right]_{\Delta x=1} \overrightarrow{e_y} \\
&= \underbrace{-\frac{2}{3}\rho g H \sin\alpha \overrightarrow{e_x}}_{\left[\overrightarrow{F}^T_{f\to p}\right]_{Q_V=0}} + \underbrace{p_a \overrightarrow{e_z}}_{\left[\overrightarrow{F}^N_{f\to p}\right]_{Q_V=0}} \qquad \textbf{1pt}
\end{aligned}
$$

La force exercée par le fluide sur la plaque supérieure se présente donc comme la résultante d'une composante tangentielle $\left\{\left[\overrightarrow{F}^T_{f\to p}\right]_{Q_V=0} = -\frac{2}{3}\rho g H \sin\alpha \overrightarrow{e_x}\right\}$ *et d'une composante normale qui s'écrit, en toute evidence,* $\left\{\left[\overrightarrow{F}^N_{f\to p}\right]_{Q_V=0} = p_a \overrightarrow{e_z}\right\}$.
Remarquons que la contrainte visqueuse due à cet écoulement permanent est indépendante de la loi de comportement utilisée pour décrire la rhéologie du fluide.

7. ***0.5pt* Calcul de la puissance développée par la force de frottement visqueux du fluide sur la plaque supérieure :**

La vitesse du fluide au niveau de la plaque vaut

$$
\begin{aligned}
\left[v_x(z)\right]_{Q_V=0} &= -\frac{\rho g \sin\alpha}{6\mu} z (2H - 3z) \\
\left[v_x(z)\right]_{(z=H, Q_V=0)} &= \frac{\rho g H^2 \sin\alpha}{6\mu} \\
&= U
\end{aligned}
$$

Ce qui est cohérent vu que la vitesse du fluide égalise la vitesse de la plaque au contact $(z = H)$.
Puisque cette vitesse est constante la puissance s'écrit simplement

$$
\begin{aligned}
\left[\mathscr{P}_{f\to P}\right]_{(z=H, Q_V=0)} &= \int_{S_{xy}} \left[\overrightarrow{dF}_{f\to p} \cdot \overrightarrow{v_x}\right]_{(z=H, Q_V=0)} \\
&= \left[\overrightarrow{F}_{f\to p} \cdot \overrightarrow{v_x}\right]_{(z=H, Q_V=0)} \left(\int_{\Delta x=1} dx \int_{\Delta y=1} dy\right) \\
&= \left(-\frac{2}{3}\rho g H \sin\alpha \overrightarrow{e_x} + p_a \overrightarrow{e_z}\right) \cdot \left(U\overrightarrow{e_x}\right) \\
&= -\frac{\rho^2 g^2 H^3 \sin\alpha^2}{9\mu} \qquad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}
$$

8. ***5pts***
Absence de la plaque supérieure :

9. ***1pt***
En l'absence de la de la plaque supérieure la surface supérieure du fluide est au contact de l'air. On suppose que cette surface est plane. La pression à la surface est celle de l'atmosphère. Ainsi, le champ de pression et de vitesse sont les mêmes qu'on présence de la plaque supposée sans poids. La seule différence réside dans les conditions aux limites liées à la vitesse.

$$p(z) = \rho g \cos\alpha \,(H - z) + p_a \; \textbf{\textit{1pt}}$$

10. ***1pts*** *Les conditions aux limites sont :*
L'adhérence du fluide à la plaque inferieure :

$$\begin{aligned} v_x(z) &= \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} z^2 + Bz + C \\ v_x(0) &= C = 0 \end{aligned}$$

Continuité de la contraite à la surface libre en contact avec l'air :

$$\begin{aligned}
\left[\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_{fluide} - \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_{air}\right]_{(z=H)} \cdot \overrightarrow{e_z} &= 0 \\
\left[\begin{pmatrix} -p_a & 0 & \mu\dfrac{\partial v_x(z)}{\partial z} \\ 0 & -p_a & 0 \\ \dfrac{\partial v_x(z)}{\partial z} & 0 & -p_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -p_a & 0 & 0 \\ 0 & -p_a & 0 \\ 0 & 0 & -p_a \end{pmatrix}\right]_{(z=H)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu\dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu\dfrac{\partial v_x}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(z=H)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} \mu\dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(z=H)} &= 0
\end{aligned}$$

Ainsi la condition de continuité de la contrainte sur l'interface (fluide-air) se réduit à

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial v_x}{\partial z}\right]_{(z=H)} &= 0 \\
\frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} H + B &= 0 \\
B &= -\frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} H
\end{aligned}$$

Finalement la vitesse s'écrit

$$\begin{aligned}
v_x(z) &= -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} z\,(2H - z) \quad \textbf{\textit{0.5pt}} \\
p(z) &= \rho g \cos\alpha\,(H - z) + p_a \quad \textbf{\textit{0.5pt}}
\end{aligned}$$

11. ***1pt***
Débit volumique Q_V :

$$\begin{aligned}
Q_V &= \int_{S_z} v_x dS = \int_{\Delta y=1} dy \int_{z=0}^{z=H} v_x dz \quad \textbf{\textit{0.5pt}} \\
&= -\frac{\rho g H \sin\alpha}{\mu} \int_{z=0}^{z=H} z dz + \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} \int_{z=0}^{z=H} z^2 dz \\
&= -\frac{\rho g H^3 \sin\alpha}{2\mu} + \frac{\rho g H^3 \sin\alpha}{6\mu} \\
&= -\frac{\rho g H^3 \sin\alpha}{3\mu} \quad \textbf{\textit{0.5pt}}
\end{aligned}$$

12. ***1pt***
Tenseur des contraintes $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}$:

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} = -p(z) & 0 & \sigma_{xz} = \mu \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 & \sigma_{yy} = -p(z) & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & \sigma_{zz} = -p(z) \end{pmatrix}$$

Tenseur des contraintes $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_0$ sur la plaque inférieure :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_0 = \begin{pmatrix} -p(0) & 0 & \sigma_{xz}(0) = -\dfrac{\rho g H \sin\alpha}{\mu} \\ 0 & -p(0) & 0 \\ \sigma_{xz}(0) = -\dfrac{\rho g H \sin\alpha}{\mu} & 0 & -p(0) \end{pmatrix} \quad \textbf{\textit{1pt}}$$

13. ***1pt***
La force élémentaire appliquée par le fluide sur la plaque inférieure s'écrit

$$\overrightarrow{dF}_{f\to p} = -\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_0 \cdot \overrightarrow{dS} = -\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_0 \cdot (dxdy\overrightarrow{e_z})$$

où $\overrightarrow{e_z}$ est la normale "sortante" de la plaque inférieure vers le fluide.

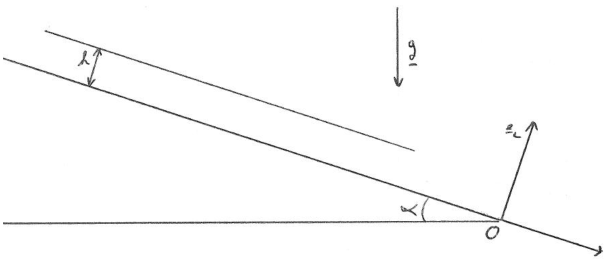
$$
\begin{aligned}
\left[\overrightarrow{F}_{f\to p}\right] &= \int_{S_{xy}} \left[\overrightarrow{dF}(z=0)\right] \\
&= -\int_{S_{xy}} \left[\left(\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(z=0)\right)\cdot(-dS\overrightarrow{e_z})\right] \quad \textcolor{red}{\textbf{\textit{0.5pt}}} \\
&= \left[\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(z=0)\right]\cdot\left(\int_{\Delta x=1} dx \int_{\Delta y=1} dy\right)\overrightarrow{e_z} \\
&= \left[\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(z=0)\right]\cdot\overrightarrow{e_z} \\
&= \begin{pmatrix} -p(0) & 0 & \sigma_{xz}(0) \\ 0 & -p(0) & 0 \\ \sigma_{xz}(0) & 0 & -p(0) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\sigma_{xz}(0)\overrightarrow{e_x}}_{[\overrightarrow{F}^T_{f\to p}]} - \underbrace{p(0)\overrightarrow{e_z}}_{[\overrightarrow{F}^N_{f\to p}]} \\
&= \underbrace{\left(\frac{\rho g H\sin\alpha}{\mu}\right)(-\overrightarrow{e_x})}_{\textit{Force de frottement tangentielle}} + \underbrace{\left(\rho g H\cos\alpha + p_a\right)(-\overrightarrow{e_z})}_{\textit{Force de pression normale}} \quad \textcolor{red}{\textbf{\textit{0.5pt}}}
\end{aligned}
$$

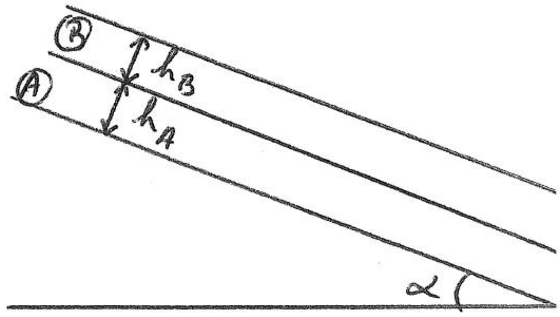
Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physiquea

Parcours Mécanique & Énergétique
Semestre V
Année Universitaire 2013/2014

Examen de Mécanique des Fluides Réels
Durée : $1^{h}30^{mn}$
Mohamed Chaoui

Écoulements, à surface libre, de fluides simples ou superposés sur une paroi inclinée.
(noté sur 20 points)





Soit l'écoulement **stationnaire, laminaire et unidirectionnel** d'un fluide visqueux newtonien incompressible le long d'une plaque infinie, inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le fluide est soumis à la pesanteur $\vec{g}$, exercée dans la direction opposée à la verticale.
La masse volumique ρ, la viscosité dynamique η du fluide sont supposées constantes. La pression de l'atmosphère est notée p_a. En suppose que le fluide glisse sans frottement sur l'air, que le fluide adhère à la paroi de base et que la vitesse et la contrainte sont continues dans l'interface entre les deux fluides.
Le débit volumique du fluide par unité de largeur est connu et est noté Q_v. Finalement on suppose que l'épaisseur inconnue h de la couche du fluide est constante.
L'écoulement est décrit par rapport au repère $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ et le champ des vitesses s'écrit
$\vec{v}(x, y, z) = v_x(x, y, z)\vec{e_x}$

Partie 1 Écoulement d'un seul fluide :

1. En se basant sur les hypothèses du problème montrer que l'équation de continuité conduit à écrire le champ des vitesses sous la forme $\vec{v} = v_x(z)\vec{e_x}$
2. Écrire, en tenant compte de la question (1), l'équation de la quantité de mouvement sous sa forme vectorielle simplifiée.
3. Projeter l'équation de la quantité de mouvement trouvée sur la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$
4. Écrire les conditions aux frontières, en supposant que le fluide adhère à la paroi et glisse sans frottement sur l'air.
5. Calculer les champs de vitesses et de pression.
6. Tracer les profils des champs des vitesses et de pression en prenant comme axe des abscisses l'axe (Ox).
7. Déterminer l'épaisseur h à partir du débit volumique par unité de largeur Q_v.
8. Interpréter les résultats pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.
9. Calculer les tenseurs des contraintes dans le fluide.
10. (a) Calculer la force par unité de surface appliquée par la paroi sur le fluide. Identifier la composante normale et la composante d'adhérence tangentielle.

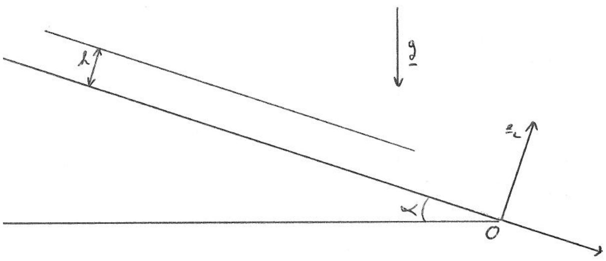
(b) Calculer la force par unité de surface appliquée par l'"air sur le fluide. Conclure

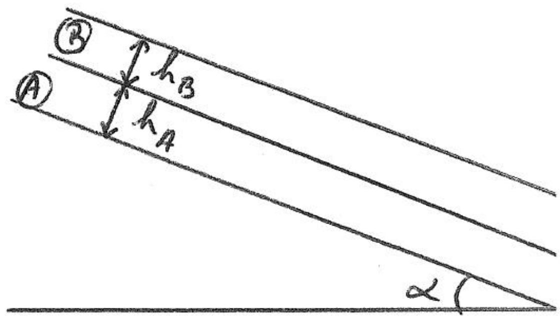
Partie 2 Écoulement de deux fluides superposés de paramètres respectifs (h_A, p_A, η_A) **et** (h_B, p_B, η_B).

1. En se basant sur les hypothèse du problème écrire les équations à résoudre pour chaque fluide.
2. À partir de ce qui précède suggérer la forme des champs de vitesse et de pression dans chaque fluide (on peut supposer à priori que les hauteurs inconnues h_A et h_B des fluides sont constantes et que $h = h_A + h_B$ est la hauteur totale des fluides superposés).
3. Écrire les conditions aux frontières, en supposant en plus que la vitesse ainsi que le tenseur des contraintes sont continus à la surface de séparation entre les deux fluides.
4. Résoudre les équations.
5. Calculer les débits volumiques, par unité de largeur, Q_{vA} sur la hauteur h_A et Q_{vB} sur la hauteur h_B. En déduire le débit total Q_v sur toute la hauteur $h = h_A + h_B$.
6. Calculer les tenseurs des contraintes dans chaque fluide.
7. (a) Calculer la force par unité de surface appliquée par la paroi sur le fluide (A). Identifier la composante normale et la composante d'adhérence tangentielle.
   (b) Calculer la force par unité de surface appliquée par le fluide (A) sur le fluide (B). Identifier la composante normale et la composante de de cisaillement tangentielle.
   (c) Calculer la force par unité de surface appliquée par l'"air sur le fluide (B). Conclure

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique

Corrigé de l'examen de Mécanique des Fluides Réels
Durée : $1^{h}30^{mn}$
Mohamed Chaoui





Données du problème :

H1 Fluide incompressible ; $\rho = C^{te}$.

H2 Fluide visqueux newtonien ; $\eta = C^{te}$.

H3 Écoulement laminaire ; écoulement rampant.

H4 Écoulement Stationnaire ; $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$.

H5 Surface libre Plane. Ainsi au contact de la surface libre le fluide est soumit à une contrainte qui se réduit à la pression atmosphérique normale. le tenseur des contraintes visqueuses (composantes tangentielles à la base du cisaillement sont nulles).

H6 $\vec{v} = v_x(x, y, z)\vec{e}_x$.

H7 Le champ des vitesses est symétrique par rapport à tout plan xOz perpendiculaire aux plaques. Ainsi, $\vec{v} = v_x(x, z)\vec{e}_x$.

H8 Dans chaque section orthogonale à $\vec{e_x}$, la force volumique due à la pesanteur est constante.

H9 La base cartésienne $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ est choisit comme base de projection.

Partie 1 Écoulement d'un seul fluide : Notée sur 8 pts Écoulement à surface libre d'un fluide sur une plaque inclinée.

1. **0.5pt Équation de continuité :**

Le champ des vitesses s'écrit dans la base cartésienne

$$\vec{v} = v_x(x, y, z)\vec{e}_x, \quad v_y = v_z = 0$$

L'équation de la conservation de la masse, appelée aussi équation de continuité, s'écrit

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \vec{v} = v_x(y, z)\vec{e_x}\end{aligned}$$

En plus, d'après l'hypothèse [**H7**] l'écoulement est infini suivant l'axe des y. Ainsi chaque plan (xOz) est un plan de symétrie. D'où, Finalement

$$\overrightarrow{v} = v_x(z)\overrightarrow{e_x} \quad \textbf{0.5pt}$$

Vu l'équation de continuité et vu que tout plan (xOz) est un plan de symétrie les champs de vitesse et de pression sont de la forme $\overrightarrow{v}(z)$ et $p(x,z)$. Ainsi le fluide s'écoule en filets parallèlement à la plaque dans la direction $\overrightarrow{e_x}$, mieux encore le fluide s'écoule en lames de fluide parallèle à la plaque d'où l'appellation d'écoulement laminaire ou rampant.

2. $\boxed{\textbf{1.5pt}}$ **Équation de la quantité de mouvement simplifiée :**

L'équation générale de Navier-Stokes relative à la quantité de mouvement s'écrit

$$\rho\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\nabla}p + \eta\Delta\overrightarrow{v} + \rho\overrightarrow{g} \tag{1}$$

Sachant que

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla} = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

et

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3}$$

L'équation (**??**) devient, en tenant compte de ([**H4**]), (45), (46) et de (48)

$$\overrightarrow{\nabla}p = \eta\Delta\overrightarrow{v} + \rho\overrightarrow{g} \tag{4}$$

3. En coordonnées cartésiennes, la force volumique s'écrit

$$\overrightarrow{f} = g\left(\sin\alpha\overrightarrow{e_x} - \cos\alpha\overrightarrow{e_z}\right) = \underbrace{(-g\sin\alpha)}_{f_x}\overrightarrow{e_x} + \underbrace{(-g\cos\alpha)}_{f_z}\overrightarrow{e_z} \tag{5}$$

Par projection de (47) sur la base de calcul, on trouve en tenant compte de (48)

$$\overrightarrow{e_x}: \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \eta\frac{d^2v_x}{dz^2} + \rho g\sin\alpha \quad \textbf{0.5pt} \tag{6a}$$

$$\overrightarrow{e_y}: \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \textbf{0.5pt} \tag{6b}$$

$$\overrightarrow{e_z}: \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g\cos\alpha \quad \textbf{0.5pt} \tag{6c}$$

4. **Condition aux frontières :** **1pt**
   — **Condition de Contact "fluide-plaque" :** Le fluide "colle" ou "adhère" à la paroi.

$$\text{En} \quad z=0: \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}^{\text{plaque}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \quad \textbf{0.5pt} \\ v_z = 0 \end{cases} \tag{7}$$

   — **Interface "fluide-air" :** La densité des forces de contact se réduit à la pression atmosphérique p_a.

$$\text{En} \quad z=h: \quad \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}\cdot\overrightarrow{e_z} = -p_a\overrightarrow{e_z} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \quad \textbf{0.5pt} \\ \sigma_{zz} = -p_a \end{cases} \tag{8}$$

5. **3pts Solution $(\vec{v}, p)$ de l'écoulement :**

— L'intégration de l'équation (49c) conduit à

$$p(x,z) = -\rho g z \cos\alpha + C_z(x)\textbf{0.5pt}$$

Vu que $p(x, z = h) = p_a$ alors

$$C_z(x) = p_a + \rho g h \cos\alpha = p_0 \quad C^{te}$$

Ainsi

$$p(z) = \rho g \cos\alpha(h - z) + p_a\textbf{0.5pt} \tag{9}$$

$$\vec{\nabla} p = -\rho g \cos\alpha \vec{e_z} \tag{10}$$

On remarque que le gradient de la pression est constant.

— **Calcul du champ de vitesse :**

$$\frac{d^2 v_x(z)}{dz^2} = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\eta} \tag{11}$$

$$\frac{dv_x(z)}{dz} = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\eta} z + B \tag{12}$$

$$v_x(z) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta} z^2 + Bz + C \quad \textbf{0.5pt} \tag{13}$$

Application des conditions aux limites :
En tenant compte des conditions aux limites

$$v_x(z=0) = 0 \Rightarrow C = 0\textbf{0.5pt} \tag{14}$$

$$\tau_{xz}(x, z = h) = \left[\frac{dv_x(z)}{dz}\right]_{z=h} = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\eta} h + B = 0 \Rightarrow B = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta} h \quad \textbf{0.5pt} \tag{15}$$

La vitesse du fluide vaut finalement

$$v_x(z) = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta}(2hz - z^2)\textbf{0.5pt} \tag{16}$$

La vitesse sur l'interface "fluide-air" est constante et vaut

$$\vec{v}(z = h) = v_x(z = h)\vec{e_x} = \frac{\rho g h^2 \sin\alpha}{2\eta}$$

6. Tracé

7. **1pt**
Débit volumique Q_v par unité de largeur :

$$\begin{aligned}
Q_v &= \int_{S_z} v_x dS = \int_{\Delta y=1} dy \int_{z=0}^{z=h} v_x dz \quad \textbf{0.5pt} && (17)\\
&= \frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta} \int_{z=0}^{z=h} \left(2hz - z^2\right) dz \\
&= \frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta} \left[hz^2 - \frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=h} \\
&= \frac{\rho g h^3 \sin\alpha}{3\eta} && (18)\\
h &= \sqrt[3]{\frac{3\eta Q_v}{\rho g \sin\alpha}} \quad \textbf{0.5pt} && (19)
\end{aligned}$$

8. **0.5pt**

   - ⋆ **Cas où $\alpha = 0$: Plaque horizontale.** D'après la relation (16) si $\alpha = 0$ la vitesse s'annulera et le fluide sera au repos et ne sera soumis qu'à l'action de la pression hydrostatique $p(z) = \rho g(h-z) + p_a$ données par la relation (9). Le gradient de pression vaut, d'après (10), le vecteur constant $\vec{\nabla} p = -\rho g \vec{e_z}$
   - ⋆ **Cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$: Plaque verticale.**
     D'après la relation (16) si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la vitesse du fluide doit valoir $v_x(z) = \frac{\rho g}{2\eta}(2hz - z^2)$.

     La pression est donnée par intégration du système (49a), (49b) et (49c)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(p - \rho g \sin\alpha x\right) &= \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2} = C^{te} \\
\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= \rho g \sin\alpha x + Kx + p(0) \\
p(z) &= p_a
\end{aligned}$$

     Or la pression dans le fluide est si importante que la condition de continuité exprimée par l'égalité $p(x) = p_a$ n'est justifiée. Autrement dit que la tension superficielle au niveau de l'interface "fluide-air" est nulle.
     Pour que les hypothèses supposées aient un sens il faut que l'angle α ne dépasse pas une limite critique $\alpha_c < \frac{\pi}{2}$.

9. Tenseur des contraintes

10. (a)
    (b)

Partie 2 : $\boxed{\text{Notée sur 12 pts}}$ Écoulement à surface libre de deux fluides superposés et non miscibles, sur une plaque inclinée.

1. **0.5pt Équation à résoudre :**
   Sachons que les fluides (A) et (B) respectent les hypothèses supposées dans l'énoncé, les équations de Navier-Stokes s'écrivent pour chaque fluide en s'inspirant de la **partie 1**

$$\text{Fluide (A)} : \left\{ \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{v_A} &= 0 \\ \vec{\nabla} p_A &= \eta_A \Delta \vec{v_A} + \rho_A \vec{g} \end{aligned} \right. \qquad \text{Fluide (B)} : \left\{ \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{v_B} &= 0 \\ \vec{\nabla} p_B &= \eta_B \Delta \vec{v_B} + \rho_B \vec{g} \end{aligned} \right.$$

2. **1pt Conditions aux limites :**
Les conditions aux limites s'écrivent

0.25pt	"Paroi-Fluide(A)" :	$z = 0$:	$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v}_{Plaque}$	(20a)
0.25pt	"Fluide(A)-Fluide(B)" :	$z = h_A$:	$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v}_B$	(20b)
0.25pt	"Fluide(A)-Fluide(B)" :	$z = h_A$:	$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma_A}} \cdot \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma_B}} \cdot \overrightarrow{e_z}$	(20c)
0.25pt	"Fluide(B)-Atmosphère" :	$z = h_A + h_B$:	$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma_B}} \cdot \overrightarrow{e_z} = -p_a \overrightarrow{e_z}$	(20d)

3. **2pts Solutions des écoulements $(\overrightarrow{v_A}, p_A)$ et $(\overrightarrow{v_B}, p_B)$:**

Les solutions des écoulements (A) et (B) s'écrivent donc
— **Fluide (A) :** Les champs de vitesse et de pression s'écrivent

$$\textbf{0.5pt} \quad p_A(z) = \rho_A g \cos\alpha (h_A - z) + p_B(h_A) \tag{21a}$$
$$\overrightarrow{\nabla} p_A = -\rho_A g \cos\alpha \overrightarrow{e_z} \tag{21b}$$

$$\frac{d^2 v_{Ax}(z)}{dz^2} = -\frac{\rho_A g \sin\alpha}{\eta_A} \tag{22a}$$
$$\frac{d v_{Ax}(z)}{dz} = -\frac{\rho_A g \sin\alpha}{\eta_A} z + C_A \tag{22b}$$
$$\textbf{0.5pt} \quad v_{Ax}(z) = -\frac{\rho_A g \sin\alpha}{2\eta_A} z^2 + C_A z + D_A \tag{22c}$$

— **Fluide (B) :**

$$\textbf{0.5pt} \quad p_B(z) = \rho_B g \cos\alpha \left((h_A + h_B) - z\right) + p_a \tag{23a}$$
$$\overrightarrow{\nabla} p_B = -\rho_B g \cos\alpha \overrightarrow{e_z} \tag{23b}$$

$$\frac{d^2 v_{Bx}(z)}{dz^2} = -\frac{\rho_B g \sin\alpha}{\eta_B} \tag{24a}$$
$$\frac{d v_{Bx}(z)}{dz} = -\frac{\rho_B g \sin\alpha}{\eta_B} z + C_B \tag{24b}$$
$$\textbf{0.5pt} \quad v_{Bx}(z) = -\frac{\rho_B g \sin\alpha}{2\eta_B} z^2 + C_B z + D_B \tag{24c}$$

Les distributions des vitesses et des pressions sont données par les relations ci-dessus et où (C_A, D_A, C_B, D_B) sont des constantes d'intégration à déterminer par les conditions à la frontière "Paroi-Fluide(A)" et aux interfaces "Fluide(A)-Fluide(B)" et "Fluide(B)-Air".

4. **4pts Résolution des Équations de l'écoulement :**
⋆ La condition d'adhérence à la frontière "Paroi-Fluide(A)" : z=0

$$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v}_{Plaque} = 0 \Rightarrow v_{Ax}(0) = 0 \Rightarrow D_A = 0 \quad \textbf{1pt} \tag{25}$$

⋆ La condition sur l'interface "Fluide(B)-Atmosphère" : $z = h_A + h_B$.

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma_B}} \cdot \overrightarrow{e_z} = -p_a \overrightarrow{e_z} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{Bxz}(z = h_A + h_B) = \eta_B \frac{dv_{Bx}}{dz} = 0$$
$$\Rightarrow \quad -\rho_B g \sin\alpha\,(h_A + h_B) + \eta_B C_B = 0$$
$$\Rightarrow \quad C_B = \frac{\rho_B g \sin\alpha\,(h_A + h_B)}{\eta_B} \quad \textbf{1pt} \tag{26}$$

⋆ **Continuité du tenseur des contraintes sur l'interface "Fluide(A)-Fluide(B)" :** $z = h_A$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma_A}} \cdot \overrightarrow{e_z} &= \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma_B}} \cdot \overrightarrow{e_z} \\
\sigma_{Axz}(h_A) &= \sigma_{Bxz}(h_A) \\
-\rho_A g \sin\alpha h_A + \eta_A C_A &= -\rho_B g \sin\alpha h_A + \eta_B C_B \\
C_A &= \frac{g \sin\alpha\,(\rho_A h_A + \rho_B h_B)}{\eta_A} \quad \textbf{1pt}
\end{aligned} \tag{27}$$

⋆ **Continuité du champs des vitesses sur l'interface "Fluide(A)-Fluide(B)" :** $z = h_A$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_A} &= \overrightarrow{v_B} \\
v_{Ax}(h_A) &= v_{Bx}(h_A) \\
-\frac{\rho_A g \sin\alpha}{2\eta_A} h_A^2 + C_A h_A + D_A &= -\frac{\rho_B g \sin\alpha}{2\eta_B} h_A^2 + C_B h_A + D_B \\
\frac{g \sin\alpha\,(\rho_A h_A + 2\rho_B h_B)}{2\eta_A} h_A &= \frac{\rho_B g \sin\alpha\,(h_A + 2h_B)}{2\eta_B} h_A + D_B \\
D_B &= \frac{g \sin\alpha}{2} h_A^2 \left(\frac{\rho_A}{\eta_A} - \frac{\rho_B}{\eta_B}\right) && (28) \\
&\quad + g \sin\alpha \rho_B h_A h_B \left(\frac{1}{\eta_A} - \frac{1}{\eta_B}\right) \quad \textbf{1pt} && (29)
\end{aligned}$$

Si les viscosités et les masses volumiques des deux fluides sont identiques (Pas d'interface "Fluide(A)-Fluide(B)"), alors

$$C_A = C_B = \frac{\rho g \sin\alpha\,(h_A + h_B)}{\eta} \tag{30a}$$
$$D_A = D_B = 0 \tag{30b}$$

5. ⋆**2pts**
   Débit volumique Q_v par unité de largeur :

$$Q_v = \int_{S_z} v_x dS = \int_{\Delta y = 1} dy \left(\int_{z=0}^{z=h_A} v_{Ax} dz + \int_{z=h_A}^{z=h_B} v_{Bx} dz \right) \quad \textbf{1pt} \tag{31}$$
$$\textbf{1pt} \quad = -\frac{\rho_A g \sin\alpha}{6\eta_A} h_A^3 + \frac{C_A}{2} h_A^2 - \frac{\rho_B g \sin\alpha}{6\eta_B}\left(h_B^3 - h_A^3\right) + \frac{C_B}{2}\left(h_B^2 - h_A^2\right) + D_B (h_B - h_A) \tag{32}$$

6. **2.5pt** **Calcul du tenseur des contraintes $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}$:**

⋆ **"Fluide(A)" :**

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_A(z) = \begin{pmatrix} \sigma_{Axx} = -p_A & 0 & \sigma_{Axz} = \eta_A \dfrac{dv_{Ax}}{dz} \\ 0 & \sigma_{Ayy} = -p_A & 0 \\ \sigma_{Axz} & 0 & \sigma_{Azz} = -p_A \end{pmatrix} \quad \textbf{0.5pt} \tag{33}$$

Sur la paroi : **0.5pt**

$$p_A(z=0) = \rho_A g \cos\alpha h_A + p_B(h_A) \tag{34a}$$

$$\left[\frac{dv_{Ax}(z)}{dz}\right]_{z=0} = C_A \tag{34b}$$

Au niveau de l'interface "Fluide(A)-Fluide(B)" $z = h_A$ **0.5pt**

$$p_A(z=h_A) = p_B(h_A) = \rho_B g \cos\alpha h_B + p_a \tag{35a}$$

$$\left[\frac{dv_{Ax}(z)}{dz}\right]_{z=h_A} = -\frac{\rho_A g \sin\alpha}{\eta_A} h_A + C_A \tag{35b}$$

⋆ **"Fluide(B)" :**

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_B(z) = \begin{pmatrix} \sigma_{Bxx} = -p_B & 0 & \sigma_{Bxz} = \eta_B \dfrac{dv_{Bx}}{dz} \\ 0 & \sigma_{Byy} = -p_B & 0 \\ \sigma_{Bxz} & 0 & \sigma_{Bzz} = -p_B \end{pmatrix}$$

Au niveau de l'interface "Fluide(A)-Fluide(B)" $z = h_A$. **0.5pt**

$$p_B(z) = \rho_B g \cos\alpha h_B + p_a \tag{36a}$$

$$\left[\frac{dv_{Bx}(z)}{dz}\right]_{z=h_A} = -\frac{\rho_B g \sin\alpha}{\eta_B} h_A + C_B \tag{36b}$$

Nous pouvons constater que

$$p_B(h_A) = p_A(h_A) \tag{37a}$$

$$\left[\frac{dv_{Bx}(z)}{dz}\right]_{z=h_A} = \left[\frac{dv_{Ax}(z)}{dz}\right]_{z=h_A} \tag{37b}$$

$$\text{d'où} \quad \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_B(h_A) = \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}_A(h_A) = \tag{37c}$$

Au niveau de l'interface "Fluide(B)-Air" $z = h = h_A + h_B$. **0.5pt**

$$p_B(z) = p_a \tag{38a}$$

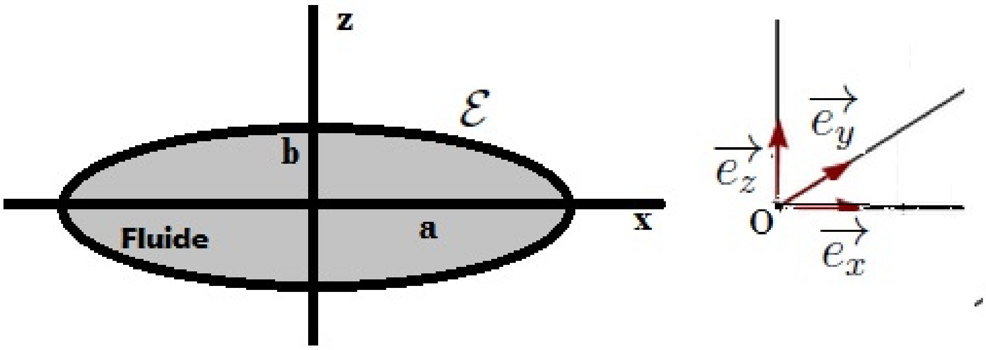
$$\left[\frac{dv_{Bx}(z)}{dz}\right]_{z=(h_A+h_B)} = -\frac{\rho_B g \sin\alpha}{\eta_B}(h_A + h_B) + C_B \tag{38b}$$

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physiquea

Parcours Mécanique & Énergétique
Semestre V
Année Universitaire 2013/2014

Examen de Rattrapage de Mécanique des Fluides Réels
Durée : $1^{h}30^{mn}$
Mohamed Chaoui

Écoulements d'un fluide visqueux dans une conduite elliptique.
(noté sur 20 points)



On considère une conduite elliptique $\mathcal{E}$ schématisée sur la figure, dont la longueur du demi-grand axe est a et la longueur du demi-petit axe est b. Un fluide visqueux newtonien incompressible, à température constante s'écoule dans cette conduite suivant le sens indiqué par le vecteur $\overrightarrow{e_x}$. L'écoulement est, ainsi, unidirectionnel et le champ des vitesses s'écrit dans le repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$:

$$\overrightarrow{v}(x, y, z) = v_x(x, y, z)\overrightarrow{e_x}$$

L'écoulement du fluide, supposé stationnaire et laminaire, est engendré par une différence de pression Δp sur une longueur L de la conduite. La seule force de volume prise en compte est le poids du fluide. La masse volumique ρ, la viscosité dynamique μ du fluide sont supposées constantes et on suppose aussi que le fluide adhère à la paroi de la conduite.

1. En se basant sur les hypothèses du problème montrer que l'équation de continuité conduit à écrire le champ des vitesses sous la forme $\overrightarrow{v} = v_x(y, z)\overrightarrow{e_x}$
2. Écrire, en tenant compte de la question (1.), l'équation de la quantité de mouvement sous sa forme vectorielle simplifiée.
3. Projeter l'équation de la quantité de mouvement trouvée dans (2.) sur la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$
4. À partir des projections exprimées dans (3.)
   (a) Montrer que la pression est une fonction de (x, z).
   (b) Calculer p(x,z). En prendra comme pression de référence $p(0, 0) = p_0$.
5. On cherche une solution pour le champ de vitesse sous la forme

$$v_x(y, z) = Ay^2 + Bz^2 + C \tag{39}$$

   où A, B et C sont trois constantes inconnues du problème.

   (a) Quelle relation obtient-on entre A et B à partir de l'équation de continuité écrite en (3).

(b) Quelle relation obtient-on entre A, B et C à partir de l'expression de la condition d'adhérence du fluide à la paroi de la conduite elliptique $\mathcal{E}$.
On rappelle que l'équation de la section elliptique de la conduite s'écrit

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{40}$$

(c) Déduire que le champ des vitesses s'écrit sous la forme

$$v_x(y, z) = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right) \tag{41}$$

6. Calculer la vitesse maximale $v_{x_{max}}$ de v_x et le point (y_{max}, z_{max}) de la section correspondant au maximum de vitesse.
7. Calculer le tenseur des contraintes de l'écoulement.
8. Calculer la force par unité de surface appliquée par la paroi elliptique sur le fluide.
9. Calculer le débit volumique Q_v.
10. Calculer la vitesse moyenne $v_{x_{moy}}$.

Indications facultatives :

⋆ **Par symétrie on remarque que $\mathbf{Q_v = 4q_v}$ où $\mathbf{q_v}$ est le débit dans le quart de la section correspondant à $\mathbf{y \in [0, a]}$ et $\mathbf{z \in [0, b]}$.**

⋆ **Le calcul de $\mathbf{q_v}$ se fait simplement en faisant le changement de variable $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{a}} = \sin\alpha$ où $\alpha \in \left[\mathbf{0}, \frac{\pi}{\mathbf{2}}\right]$. Dans ce cas le résultat suivant est utile :**

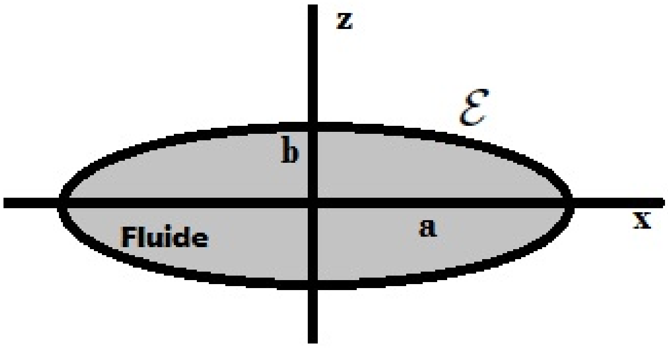
$$\int_{\mathbf{0}}^{\frac{\pi}{\mathbf{2}}} \cos^{\mathbf{4}}\alpha \, \mathbf{d}\alpha = \frac{\mathbf{3}\pi}{\mathbf{16}}$$

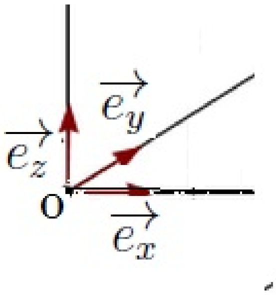
11. Supposons maintenant que la variation de pression ΔP sur la longueur L est induite par une légère inclinaison de la conduite elliptique par rapport à l'horizontale locale.
Calculer cette inclinaison en fonction de $(\Delta p, L, \rho, g)$. (On utilisera $|\overrightarrow{g}| = 10\, S.I.$
12. Retrouver l'expression du champ de vitesse de l'écoulement de Poiseuille cylindrique en appliquant l'expression (41) au cas particulier où la section est cylindrique.

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique

Parcours Mécanique & Énergétique
Semestre V
Année Universitaire 2013/2014

Corrigé de l'examen de Rattrapage de Mécanique des Fluides Réels
Durée : $1^{\text{h}}30^{\text{mn}}$
Mohamed Chaoui **Modèle d'écoulement dans une conduite de section elliptique :**
Noté sur 20 pts





Données du problème :

H1 La base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est choisit comme base de projection.

H2 Fluide incompressible ; $\rho = C^{te}$.

H3 Fluide visqueux newtonien ; $\mu = C^{te}$.

H3 Adhèrence du fluide à la paroi de la conduite elliptique.

H4 Écoulement laminaire ; écoulement rampant.

H5 Écoulement Stationnaire ; $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$.

H6 Écoulement unidirectionnel : $\vec{v} = v_x(x, y, z)\vec{e}_x$.

H3 Le gradient de pression est non nul suivant $\vec{e}_x$.

1. **1pt** **Équation de continuité :**
   Le champ des vitesses s'écrit dans la base cartésienne

$$\vec{v} = v_x(x, y, z)\vec{e}_x, \quad v_y = v_z = 0 \tag{42}$$

L'équation de la conservation de la masse, appelée aussi équation de continuité, s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \vec{v} = v_x(y, z)\overrightarrow{e_x} \end{aligned} \tag{43}$$

Vu l'équation de continuité les champs de vitesse et de pression s'écrivent sous la forme $\vec{v}(y, z)$ et $p(x, z)$. Ainsi le fluide s'écoule en **filets parallèles** à l'axe de la conduite parallèle à l'axe $\overrightarrow{e_x}$, d'où l'appellation d'écoulement laminaire ou rampant.

2. $\boxed{\text{1pt}}$ **Équation de la quantité de mouvement simplifiée :**
L'équation générale de Navier-Stokes relative à la quantité de mouvement s'écrit

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} \tag{44}$$

Sachant que

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} = 0 \tag{45}$$

et

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{46}$$

L'équation (44) devient

$$\vec{\nabla} p = \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} \tag{47}$$

3. $\boxed{\text{3pts}}$ **Projection de l'équation de la quantité de mouvement :**
En coordonnées cartésiennes, la force volumique s'écrit

$$\vec{f} = -g\vec{e_z} \tag{48}$$

Par projection de (47) sur la base de calcul, on trouve en tenant compte de (48)

$$\vec{e_x} : \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{d^2 v_x}{dy^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \tag{49a}$$

$$\vec{e_y} : \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{49b}$$

$$\vec{e_z} : \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{49c}$$

4. $\boxed{\text{2pts}}$ **Calcul du champ de pression :**

   (a) Vu l'équation (49b), la pression est fonction de (x, z)

   (b) L'équation (49a) conduit à écrire

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x, z) = \mu \left(\frac{d^2 v_x}{dy^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)(y, z) = 2\mu (A + B) = C^{te} = -\frac{\Delta P}{L} \tag{50}$$

   Par intégration de l'équation (49c),

$$p(x, z) = -\rho g z + C_x(x) \tag{51a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x, z) = \begin{cases} \dfrac{dC_x}{dx} \\ -\dfrac{\Delta P}{L} \end{cases} \tag{51b}$$

$$
\begin{aligned}
C_x &= -\frac{\Delta P}{L}x + C \\
p(x,z) &= -\rho g z - \frac{\Delta P}{L}x + C \\
p(0,0) &= p_0 = C \\
p(x,z) &= -\rho g z - \frac{\Delta P}{L}x + p_0 \qquad (52a)
\end{aligned}
$$

5. $\boxed{\text{5pts}}$ **Calcul du champ de vitesse :**

   (a) L'équation de continuité s'écrit

$$
2Ay + 2Bz = 0 \quad \forall\,(y,z) \qquad (53)
$$

   En particulier à la frontière où $\frac{y_p^2}{a^2} + \frac{z_p^2}{b^2} = 1$

   (b) L'expression de la condition d'adhérence du fluide à la paroi de la conduite elliptique $\mathcal{E}$ s'écrit

$$
\begin{aligned}
v_x\,(y,z) = 0 &= Ay_p^2 + Bz_p^2 + C \\
0 &= Ay_p^2 + Bb^2\left(1 - \frac{y_p^2}{a^2}\right) + C \\
0 &= y_p^2\left(A - \frac{Bb^2}{a^2}\right) + Bb^2 + C \quad \forall y_p \in \mathcal{E} \\
B &= -\frac{C}{b^2} \qquad (54a) \\
A &= \frac{Bb^2}{a^2} = -\frac{C}{a^2} \qquad (54b)
\end{aligned}
$$

   (c) Dans la (50) nous substituons les expressions des constantess A et B exprimées en foncttion de la constaante C

$$
\begin{aligned}
A + B = &= -\frac{\Delta P}{2\mu L} \\
-\frac{C}{a^2} - \frac{C}{b^2} &= -\frac{\Delta P}{2\mu L} \\
C &= \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\frac{\Delta P}{2\mu L} \qquad (55a) \\
A &= -\frac{C}{a^2} = -\frac{b^2}{a^2+b^2}\frac{\Delta P}{2\mu L} \qquad (55b) \\
B &= -\frac{C}{b^2} = -\frac{a^2}{a^2+b^2}\frac{\Delta P}{2\mu L} \qquad (55c)
\end{aligned}
$$

   D'où l'expression du champ de vitesse

$$
\begin{aligned}
v_x\,(y,z) &= Ay^2 + Bz^2 + C \\
&= \frac{\Delta p}{2\mu L}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right) \qquad (56)
\end{aligned}
$$

6. $\boxed{5\text{pts}}$ **Calcul de la vitesse maximale :**

La vitesse est fonction de deux variables (y, z), sa differentielle s'écrit

$$dv_x(y,z) = \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz$$

Le maximum de v_x est atteint quand $\dfrac{\partial v_x}{\partial y} = \dfrac{\partial v_x}{\partial z} = 0$

$$\begin{aligned}
v_x(y,z) &= \frac{\Delta p}{2\mu L}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right) \\
\frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{\Delta p}{\mu L}\frac{b^2}{a^2+b^2}y = 0 \quad \Rightarrow y_m = 0 \\
\frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{\Delta p}{\mu L}\frac{a^2}{a^2+b^2}z = 0 \quad \Rightarrow z_m = 0 \\
v_{x_{max}}(y_m, z_m) &= \frac{\Delta p}{2\mu L}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \qquad (57a)
\end{aligned}$$

L'analyse physique conduit à dire que le maximum de la vitesse a lieu au points les plus éloignés de la paroi, c'sst à dire sur l'axe Ox ou quand $(y = 0, z = 0)$.

7. $\boxed{2\text{pts}}$ **Calcul du tenseur des contraintes $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}$:**

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}(y,z) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} = -p & \sigma_{xy} = \mu\dfrac{\partial v_x}{\partial y} & \sigma_{xz} = \mu\dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} = -p & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & \sigma_{zz} = -p \end{pmatrix} \qquad (58)$$

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{\Delta P}{L}x \qquad (59a)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \qquad (59b)$$

$$\sigma_{xy} = \mu\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\Delta p}{L}\frac{b^2}{a^2+b^2}y \qquad (59c)$$

$$\sigma_{xz} = \mu\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{L}\frac{a^2}{a^2+b^2}z \qquad (59d)$$

8. $\boxed{2\text{pts}}$ **Calcul de la force hydrodynamique au contact** *Fluide − Paroi* **:**

Soit $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}^p$ l'expression du tenseur des contraintes sur la paroi de la conduite et $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal sortant du fluide :

$$\overrightarrow{OM} = y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z} = \sqrt{y^2+z^2}\,\overrightarrow{n}, \quad \overrightarrow{n} = \underbrace{\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}}_{n_y}\overrightarrow{e_y} + \underbrace{\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}}_{n_z}\overrightarrow{e_z} \qquad (60)$$

L'élément de surface s'écrit

$$dS_\ell = \sqrt{y^2+z^2}\,d\theta dx \quad \text{avec} \quad (y = a\cos\theta, z = b\sin\theta)$$

$$
\begin{aligned}
d\overrightarrow{F}_{paroi\rightarrow fluide} &= \overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}^p \cdot \overrightarrow{n}\, dS_\ell & \text{(61a)}\\
&= \left(\sigma^p_{xy}n_y + \sigma^p_{xz}n_z\right) dS_\ell \overrightarrow{e}_x + \sigma^p_{yy}n_y dS_\ell \overrightarrow{e}_y + \sigma^p_{zz}n_z dS_\ell \overrightarrow{e}_z \\
&= \left(\sigma^p_{xy}n_y + \sigma^p_{xz}n_z\right) dS_\ell \overrightarrow{e}_x - p^p dS_\ell \left(n_y \overrightarrow{e}_y + n_z \overrightarrow{e}_z\right) \\
&= \underbrace{\left(\sigma^p_{xy}n_y + \sigma^p_{xz}n_z\right) dS_\ell}_{dF_t} \overrightarrow{e}_x - \underbrace{p^p dS_\ell}_{dF_n} \overrightarrow{n} & \text{(61b)}\\
\overrightarrow{F}_t &= \int_{S_\ell} \left(\sigma^p_{xy}n_y + \sigma^p_{xz}n_z\right) \sqrt{y^2+z^2}\, d\theta dx \overrightarrow{e}_x & \text{(61c)}\\
&= \int_{S_\ell} \left(y\sigma^p_{xy} + z\sigma^p_{xz}\right) d\theta dx \overrightarrow{e}_x \\
&= -\frac{\Delta p}{L}\frac{1}{a^2+b^2}\int_{S_\ell} \left(b^2y^2 + a^2z^2\right) d\theta dx \overrightarrow{e}_x \\
&= -\frac{\Delta p}{L}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\int_{S_\ell} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right) d\theta dx \overrightarrow{e}_x \\
&= -\frac{\Delta p}{L}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{\Delta=1} dx \overrightarrow{e}_x \\
&= -\frac{2\pi\Delta p}{L}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{e}_x & \text{(61d)}\\
\overrightarrow{F}_n &= -\int_{S_\ell} p^p \sqrt{y^2+z^2}\, d\theta dx \overrightarrow{n} & \text{(61e)}\\
&= -\int_{S_\ell} p^p \left(y\overrightarrow{e}_y + z\overrightarrow{e}_z\right) d\theta dx \\
&= \left(\rho g \int_{S_\ell} yz d\theta dx + \frac{\Delta P}{L}\int_{S_\ell} yx d\theta dx - p_0 \int_{S_\ell} y d\theta dx\right) \overrightarrow{e}_y \\
&+ \left(\rho g \int_{S_\ell} z^2 d\theta dx + \frac{\Delta P}{L}\int_{S_\ell} zx d\theta dx - p_0 \int_{S_\ell} z d\theta dx\right) \overrightarrow{e}_z \\
&= \left(\rho g ab \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \cos\theta\sin\theta d\theta \int_{\Delta=1} dx + \frac{a\Delta P}{L}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \cos\theta d\theta \int_{\Delta=1} x dx\right. \\
&- \left. a p_0 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \cos\theta d\theta \int_{\Delta=1} dx\right) \overrightarrow{e}_y \\
&+ \left(\rho g b^2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sin^2\theta d\theta \int_{\Delta=1} dx + \frac{b\Delta P}{L}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sin\theta d\theta \int_{\Delta=1} x dx\right. \\
&- \left. b p_0 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sin\theta d\theta \int_{\Delta=1} dx\right) \overrightarrow{e}_z \\
&= \pi\rho g b^2 \overrightarrow{e}_z & \text{(61f)}
\end{aligned}
$$

9. $\boxed{1pt}$ **Calcul du débit volumique Q_v :**

$$\begin{aligned}
Q_v &= \int_{S_x} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{S_x} v_x dS_x = \int_{y=-a}^{y=a}\left(\int_{z=-b\sqrt{1-(y/a)^2}}^{z=b\sqrt{1-(y/a)^2}} v_x dz\right) dy & (62)\\
&= 4\int_{y=0}^{y=a}\left(\int_{z=0}^{z=b\sqrt{1-(y/a)^2}} v_x dz\right) dy\\
&\quad \text{Vu la symetrie dans la section } S_x \text{ par rapport au axes } Oy \text{ et } Oz\\
&= \frac{2\Delta p}{\mu L}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\int_{y=0}^{y=a}\left(\int_{z=0}^{z=b\sqrt{1-(y/a)^2}}\left(1-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right)dz\right)dy\\
&= \frac{2\Delta p}{\mu L}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\int_{y=0}^{y=a}\left[\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)z-\frac{z^3}{3b^2}\right]_{z=0}^{z=b\sqrt{1-(y/a)^2}} dy\\
&= \frac{4\Delta p}{3\mu L}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}\int_{y=0}^{y=a}\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} d\left(\frac{y}{a}\right)\\
&\quad \text{Par changement de variable } \frac{y}{a}=\sin\alpha,\ d\left(\frac{y}{a}\right)=\cos\alpha\, d\alpha\\
&= \frac{4\Delta p}{3\mu L}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}}\cos^4\alpha d\alpha\\
&= \frac{\pi\Delta p}{4\mu L}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2} & (63)\\
&= \pi ab\frac{v_{x_{max}}}{2} = S_x\frac{v_{x_{max}}}{2} & (64)
\end{aligned}$$

10. $\boxed{1pt}$ **Calcul de la vitesse moyenne :**

$$v_{x_{moy}} = \frac{Q_v}{S_x} = \frac{v_{x_{max}}}{2} = \frac{\Delta p}{4\mu L}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \qquad (65)$$

11. $\boxed{2pts}$ **Calcul de l'inclinaison :**

$$\Delta P = \rho g L\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha = \arcsin\left(\frac{\Delta P}{\rho g L}\right) \qquad (66)$$

12. $\boxed{1pt}$ **Cas particulier de l'écoulement dans une conduite à section cylindrique :**
Cas d'un cylindre $a=b=R$ et $(y=r\cos\theta, z=r\sin\theta)$

$$v_x(y,z) = \frac{\Delta p}{2\mu L}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right) = \frac{R^2\Delta p}{4\mu L}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \qquad (67)$$

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique

Master d'Ingénierie Optique, Énergétique & Vision Artificielle
Semestre III
Année Universitaire 2013/2014

Examen de Mécanique des Fluides Réels
Durée : 30 mn
Mohamed Chaoui

Questions de cours. **Noté sur 6 pts**

1. Écrire les équations de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide quelconque.
2. Rappeler la définition d'un fluide Newtonien.
3. Soit le cas d'un fluide Newtonien incompressible de masse volumique $\rho = Cte$, de viscosité dynamique η et de viscosité cinématique ν.
   (a) Rappeler la relation entre η et ν et donner la signification de chacun des deux paramètres.
   (b) Écrire, dans ce cas, les équations de Navier-Stokes en faisant intervenir les paramètres (ρ, η).
   (c) Récrire les équations de Navier-Stokes en faisant intervenir les paramètres (ρ, ν).
   (d) Rappeler la signification de chacun des termes des équations vectorielles relatives aux bilans de la masse et de la quantité de mouvement.
   (e) Rappeler la définition du nombre de Reynolds et sa signification en le comparant à l'unité.

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique

Master d'Ingénierie Optique, Énergétique & Vision Artificielle
Semestre III
Année Universitaire 2013/2014

Examen de Mécanique des Fluides Réels
Durée : $1^{\text{h}}30^{\text{mn}}$
Mohamed Chaoui

Problème : Viscosimètre de Couette. **Noté sur 14 pts**

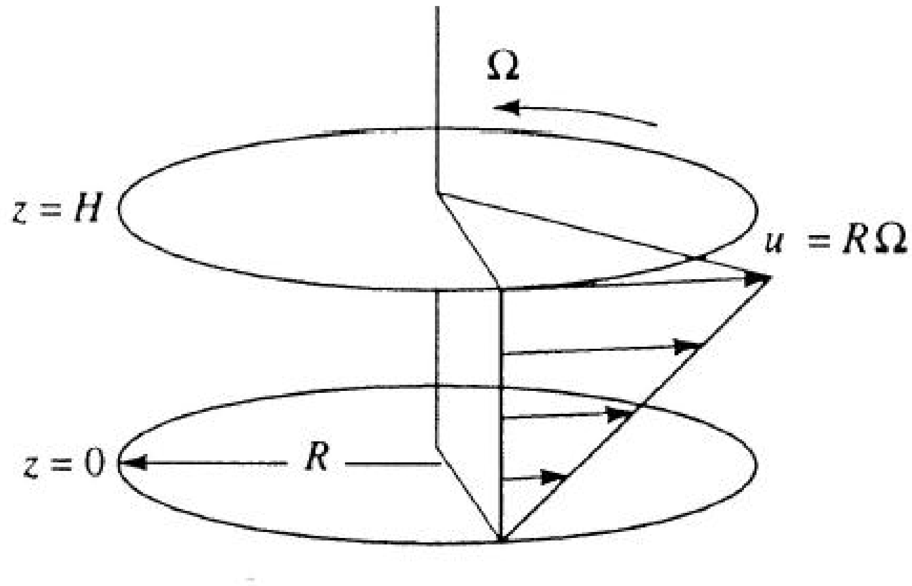


FIGURE 2 – Géométrie de l'écoulement de Couette à torsion.

Un viscosimètre permet de mesurer la viscosité d'un fluide, à partir de la mesure du taux de cisaillement en fonction de la contrainte imposée. On veut modéliser ici l'écoulement dans un viscosimètre de Couette à torsion, dans la géométrie dite à *plan-plan* (FIGURE 5).

On dépose au centre d'un disque horizontal de rayon R, dans le plan $z = 0$, une goutte d'un liquide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η. On place un second disque de même rayon parallèlement au premier sur le même axe vertical, à une hauteur $z = H$, telle que $H \ll R$. Ce disque supérieur est mis en rotation, à une vitesse angulaire constante Ω.

On adopte la base des coordonnées cylindriques (r, θ, z) pour paramétrer et représenter les grandeurs physiques, ainsi le champ de vitesse de l'écoulement s'écrit $\overrightarrow{v} = v_r \overrightarrow{e}_r + v_\theta \overrightarrow{e}_\theta + v_z \overrightarrow{e}_z$. **On négligera dans ce problème les effets de la gravité et de la tension de surface**. En conséquence, la pression en $r = R$ est égale à la pression atmosphérique p_a, et l'on peut considérer que le fluide occupe simplement un volume cylindrique $\pi R^2 H$ (pas de ménisque). Enfin on suppose que **l'écoulement est de révolution autour de l'axe Oz suivant par $\overrightarrow{e}_z$.**

Les équations de continuité et de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques sont données dans le formulaire en fin de l'énoncé.

1. On choisit $R = 10\,mm$, $H = 0.1\,mm$ et $\Omega = 10\,rad/s$, et l'on considère que le fluide étudié est une huile de silicone, de densité $\rho = 1.2 \times 10^3\,kg.m^3$ et de viscosité dynamique $\eta = 0.1\,Pa.s$.
   (a) À partir du terme de diffusion de l'équation bilan de la quantité de mouvement déduire l'expression du temps caractéristique de diffusion τ_{diff} pendant lequel l'écoulement du fluide induit par le disque supérieur va se transmettre au disque inférieur sous l'effet de la diffusion visqueuse ?
   (b) À partir du terme d'advection (ou d'inertie) de l'équation bilan de la quantité de mouvement déduire l'expression du temps caractéristique d'advection τ_{adv}.
   (c) Exprimer le nombre de Reynolds Re de l'écoulement en prenant comme vitesse caractéristique $U_c = R\Omega$.
   (d) Montrer que Re peut s'exprimer comme le rapport entre le temps de diffusion τ_{diff} et le temps caractéristique d'advection τ_{adv}.
   (e) Calculer le nombre de Reynolds Re.
   (f) Déduire la nature de l'écoulement entre les deux disques.
2. Écrire les conditions aux limites de la vitesse (v_r, v_θ, v_z) en tout point de la surface des deux disques.
3. (a) Écrire l'équation de de continuité de l'écoulement.
   (b) En comparant les ordres de grandeurs des termes de l'équation de continuité, montrer que la vitesse axiale (verticale) dans le fluide est très petite comparée à la vitesse radiale.
4. On néglige dans la suite la vitesse radiale et la vitesse verticale, et l'on cherche une solution stationnaire et axisymétrique de la forme $\overrightarrow{v} = v_\theta\,(r, z)\,\overrightarrow{e}_\theta$.
   (a) Étant données toutes ces hypothèses, projeter l'équation bilan de la quantité de mouvement suivant $\overrightarrow{e}_\theta$.
   (b) En comparant les ordres de grandeurs des termes de l'équation trouvée dans la question ci-dessus, montrer que $\dfrac{\partial^2 v_\theta\,(r, z)}{\partial z^2} = 0$.
   (c) En appliquant la condition d'adhérence aux disques, déduire que $v_\theta\,(r, z) = Krz$, où K est une constante que l'on explicitera.
5. On veut calculer le couple, qui appliqué au disque supérieur, maintient sa rotation uniforme $\left(\Omega = C^{te}\right)$.
   (a) Calculer le tenseur des contraintes **visqueuses** noté $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}'$.
   (b) Calculer la force élémentaire de cisaillement $d\overrightarrow{F}(r)$ qui s'applique à la couronne de rayon compris entre r et $r + dr$ du le disque supérieur.
   (c) Calculer le couple élémentaire $\left(d\overrightarrow{\Gamma}(r) = \overrightarrow{r} \wedge d\overrightarrow{F}\right)$ qui a lieu sur la couronne de rayon r et d'épaisseur dr.
   (d) Montrer que le couple $\overrightarrow{\Gamma}$ appliqué au disque supérieur s'écrit sous la forme $\left(\overrightarrow{\Gamma} = \eta\,A\,\Omega\,\overrightarrow{e}_z\right)$, avec A une constante que l'on identifiera.
   (e) Expliquer, d'après ce qui vient de précéder, le mode expérimental de la mesure de la viscosité dynamique.

Vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{v} = e_r \overrightarrow{e}_r + v_\theta \overrightarrow{e}_\theta + v_z \overrightarrow{e}_z$$

Équation de la conservation de la masse :

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Tenseur des contraintes :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} & \sigma_{r\theta} = \eta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right) & \sigma_{rz} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} = -p + 2\eta \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) & \sigma_{\theta z} = \eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} = -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Équation de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ = f_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ = f_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

Ou de manière plus compacte

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}) v_r - \frac{v_\theta^2}{r} &= f_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}) v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} &= f_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}) v_z &= f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} &= v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial \theta}{+} v_z \frac{\partial}{\partial z} \\ \Delta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique

Master d'Ingénierie Optique, Énergétique & Vision Artificielle
Semestre III
Année Universitaire 2013/2014

Examen de rattrapage de mécanique des fluides réels
Durée : $1^{h}30^{mn}$
Mohamed Chaoui

Exercice 1 : Déplacement lubrifié. Noté sur 8 pts

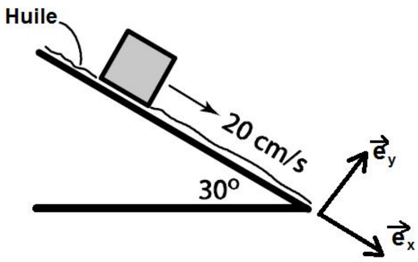


FIGURE 3 – Déplacement lubrifié d'un cube sur un plan incliné.

Un cube d'aluminium de volume $\mathcal{V}_{al} = L \times L \times L$ et de densité $\rho = 2700\,kg/m^3$ est animé d'un mouvement uniforme descendant avec une vitesse constante $V_c = 20\,cm/s$ sur une plaque inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale (voir figure). La plaque est recouverte d'une couche d'huile de viscosité dynamique $\mu = 0,008\,N.s/m^2$ et d'épaisseur fixe $e = 0,1\,mm$ qui colle à la base du cube. On donne $g = 10\,m/s^2$.

1. Schématiser les forces qui s'appliquent sur le cube lors de son mouvement.
2. Calculer, en fonction du poids P, la réaction normale N appliquée par la surface de l'huile sur la base du cube.
3. Calculer le taux de cisaillement τ sur la surface de contacte avec la base du cube.
   En déduire la force de cisaillement F exercée par la couche supérieure de l'huile sur la base du cube
4. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au cube, déduire la longueur de l'arrête du cube.
5. Faire l'**application numérique** de tous les résultats.

Exercice 2 : Mesure de la viscosité à l'aide d'un ressort de rappel. Noté sur 6 pts

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux, de viscosité cinématique ν, entre deux plans parallèles distants de D. Les forces de pesanteurs sont considérées comme négligeables dans l'écoulement et la pression est uniforme et vaut P_0.

L'écoulement est de la forme $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$ et il est dû au déplacement du plan supérieur à la vitesse $V_0\vec{e}_x$, le plan inférieur restant fixe.

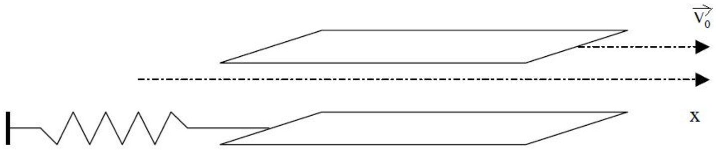


FIGURE 4 – Rappel d'une plaque soumise à la trainée d'un fluide en écoulement de Couette.

1. Déterminer le profil des vitesses $v(y)$ et la force surfacique exercée par le fluide sur chacun des plans.
2. Le plan inférieur, de surface S est en fait maintenu fixe grâce à un ressort. Lorsque le fluide est au repos, le ressort possède sa longueur naturelle. Montrer que la mesure de son allongement quand le fluide est en mouvement permet la mesure de la viscosité.

.

Exercice 3 : Lubrification d'un arbre. **Noté sur 6 pts**

Un arbre de longueur $L = 2\,cm$ de diamètre $d = 1\,cm$ tournant à une vitesse angulaire $\omega = 800\,trs/mn$ dans un carter cylindrique fixe. L'écart entre l'habitai fixe et l'arbre est $e = 10^{-2}\,cm$ et est rempli avec de l'huile de viscosité $\mu = 3^{-4}\,N.s/m^2$.
Trouver le couple et la puissance nécessaire pour faire tourner l'arbre. Supposons que le mouvement de l'huile dans l'espace peut être décrit par l'écoulement de Couette.

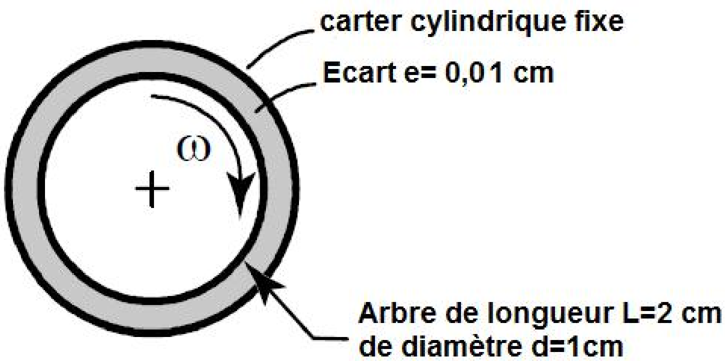


FIGURE 5 – Lubrification d'un arbre.