

UNIVERSITE MOULAY ISMAIL

DEUST : BCG/S2

FACULE DES SCIENCES

MODULE P222

ET THECHNIQUES ERRACHIDIA

Département de physique

COURS DE
THERMODYNAMIQUE
&
MECANIQUE DES FLUIDES

Réalisé par :

Pr. A. BABAOUI

Pr. F. MOUSSAOUI

TABLEAU DE MATIER

I-INTRODUCTION

II-THERMODYNAMIQUE

CHAPITRE I

ETAT D'UN FLUIDE HOMOGENE

RELATION ENTRE SES VARIABLES D'ETAT

CHAPITRE II

GAZ PRFAIT ET GAZ REEL

CHAPITRE III

PREMIERE PRINCIPE

(PRINCIPE DE LA CONSERVATION D'ENERGIE)

CHAPITRE IV

DEUXIEME PRINCIPE-ENTROPIE

(PRINCIPE DE L'EVOLUTION)

III-MECANIQUE DES FLUIDES

CHAPITRE I

STATIQUE DES FLUIDES

CHAPITRE II

DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES PARFAITS

I-INTRODUCTION

Pour conforter un résultat expérimental, la démarche adoptée par les scientifiques consiste à élaborer des théories. Une théorie permet de décrire toute une classe de phénomènes physiques ou physico-chimiques. Ainsi, la théorie de l'électromagnétique discute de l'ensemble des phénomènes électriques ou magnétiques. Dans le cadre d'une théorie, on analyse souvent un problème donné en construisant un modèle. Il s'agit par exemple de décrire un dispositif expérimental, éventuellement en le simplifiant, pour pouvoir appliquer une théorie et expliquer les résultats obtenus par l'expérience.

La thermodynamique est une science qui naît à la fin de XVII^{ème} siècle. Denis Papin (physicien français, 1647-1714) imagine alors l'ancêtre des machines à vapeur (figure- ci-dessous, la pression à vapeur). L'essentiel était à l'époque de construire les machines indispensables à l'industrie naissante.



On dit que Denis Papin eut l'idée de construire une machine utilisant la vapeur d'eau en regardant bouillir de l'eau dans une marmite. La vapeur soulevant le couvercle, elle pouvait donc aussi repousser un piston et aussi fournir du travail.

La motivation initiale était donc de répondre à un besoin industriel à l'époque : trouver les conditions optimales pour transformer la << chaleur >> en << travail >>.



En 1824, Nicolas Léonard Sadi Carnot (physicien français 1796-1832) développe les premières réflexions sur << La puissance motrice de feu et des machines propres à développer cette puissance << ces machines servent alors de support expérimental à une réflexion scientifique et à une ébauche de théorie.



En 1831, Carnot propose que la chaleur se conserve : un moteur thermique ne peut fournir du travail que s'il emprunte de la chaleur à la source chaude et en restitue à la source froide.

En 1860 : une nouvelle étape importante est franchie par James Prescott Joule (physicien et industriel anglais, 1818-1889)



Il énonce le principe fondateur de la thermodynamique << l'énergie se conserve, c'est-à-dire que tout travail peut être intégralement transformé en chaleur>>. Voilà énoncé le premier principe de la thermodynamique qui ne fait qu'exprimer un Postula maintenant accepté par tous : La conservation de l'énergie. L'énergie devient

alors la grandeur importante de la thermodynamique et en particulier l'énergie propre au système : l'énergie interne U.

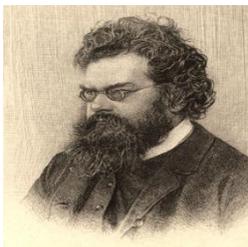


En 1863 : Rudolph Clausius (physicien allemand, 1822-1888)

précise que l'on peut pas faire n'importe quoi même si l'énergie se conserve.

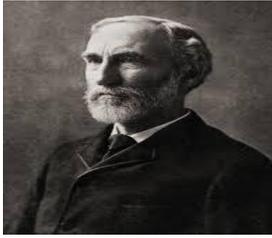
Il énonce le second principe de la thermodynamique qui permettra de définir la température (T) est une grandeur bien difficile à comprendre à cette approche.

L'entropie (S).



En 1875 : Les travaux de Ludwig Boltzmann (physicien autrichien,

1844- 1906) démontre que la thermodynamique qui traite avant tout de phénomènes macroscopiques peut être comprise au niveau microscopique : Les atomes existent ! il introduit la célèbre définition l'entropie d'un système : $S = k_B \ln(\Omega)$ impossible de donner un sens physique aux différentes grandeurs comme l'entropie ou la température, grâce au passage de l'échelle atomique (ou microscopique) à la description macroscopique d'un système.



En1880 : Josif williard Gibbs (physicien américain 1839-1903)

généralise le raisonnement de Boltzman et définit les fonctions d'état énergie libre(F) enthalpie libre (G)... Décrivant un état d'équilibre ; les notions de chaleur et de travail devient alors secondaires.

Ainsi, une nouvelle présentation de la thermodynamique se met progressivement en place à la croisé de XIX^{ème} et XX^{ème} siècle. Cette nouvelle approche, qui appuie essentiellement sur la description de l'atome, se verra renforcée par les travaux de Max Planck (1900) et Albert Einstein (1905) qui définissent les bases de la théorie de l'atome que l'on appelle la mécanique quantique.

La thermodynamique est une science essentielle, à la fois pour la physique et la chimie. C'est grâce la thermodynamique que de nombreux résultats de recherche en physique des matériaux sont actuellement discutés dans les laboratoires. Comme l'étude des supraconducteur, des matériaux magnétiques, des polymères ou des cristaux liquides ; la thermodynamique est généralement essentielle en chimie pour l'étude des réactions et en particulier des équilibres chimiques.

La thermodynamique est la science qui étudie et décrit le comportement de la matière ou des systèmes, en fonction des notions de température T , d'énergie (chaleur Q, le travail W,...) et d'entropie S.

La thermodynamique étudie l'évolution ou les transformations de la manière ou systèmes en considérant les variations d'état du système , lors d'échanges d'énergie entre le milieu extérieur et le système. La thermodynamique repose sur deux notions de bases, l'énergie interne (U) et l'entropie (S) qui fait aux deux principes suivant, que stipulent que L'énergie se conserve (première principe de conservation d'énergie).

-L'entropie ne peut qu'augmenter (deuxième principe d'évolution).

L'objet de la thermodynamique est d'étudier le fonctionnement et le bilan d'énergie des machines thermiques aussi les échanges ou transferts de chaleur dans un système ou entre deux systèmes.

-Dans les machines thermiques on assiste à une conservation d'énergie d'une forme à une autre forme (chaleur \longrightarrow travail ou inversement).

-Dans les machines thermodynamiques, il y a production de travail par conversion de chaleur en travail (les moteurs thermiques, les centrales thermiques ou nucléaires).

-Dans les machines thermo-thermiques par contre, il y a transfert de chaleur d'une source froide à une source chaude grâce à un apport de travail (les machines frigo, et pompe à chaleur...).

On distingue entre quatre principes mécanismes de transfert de chaleur : la conduction, la convection, le rayonnement et les changements d'état de la matière. Les applications de ces transferts de chaleur concernent les domaines :

-De l'isolation thermique et du stockage de gaz liquide (cryogène).

-Du chauffage et de climatisation des locaux.

-De la conception et du choix des échanges de chaleur.

On peut décrire la thermodynamique de deux manières ou aspects différents :

*L'aspect macroscopique : On s'intéresse aux propriétés de la matière ou des systèmes à l'échelle globale ou macroscopique, alors les propriétés sont décrites par des variables d'état macroscopiques, telles (P, V, T, m...).

*L'aspect microscopique : On s'intéresse aux propriétés de la matière à l'échelle microscopique ou atomique en utilisant comme variables les grandeurs cinétiques des atomes ou molécules individuelles (P_i, V_i, E, \dots). Selon que l'on considère l'un ou l'autre de ces aspects, on distingue alors entre la thermodynamique classique ou la thermodynamique statistique.

La thermodynamique classique n'a besoin d'aucune hypothèse sur la structure

atomique de la matière, elle explique le comportement de la matière ou des systèmes en fonction de leurs variations d'énergie et d'entropie :

*Elle décrit uniquement les états initiaux et finaux des systèmes en évolution et dresse le bilan d'énergie du système.

*Le chemin suivi par la transformation du système peut jouer un rôle (notion de réversibilité des transformations).

*Elle ne cherche pas à élucider les mécanismes des transformations.

La thermodynamique statique par contre, cherche à expliquer l'origine et la signification des variables macroscopiques (P, T) et des notions de chaleur, de travail et d'entropie, en les reliant directement au mécanisme de l'agitation moléculaire. Ainsi, on explique les notions de température, de pression et de chaleur :

***Notion de température :** La température est liée au degré d'agitation moléculaire de la matière. Si la vitesse V_i des molécules et donc leur énergie cinétique E_{ci} augmentent, alors le degré d'agitation thermique est plus grand. A la température de 0K (zéro absolu à -273°C) les atomes ou molécules sont figés.

Les molécules se déplacent dans l'enceinte de façon totalement aléatoire avec des vitesses V_i , on définit la température T par la relation suivante :

$$E_c = 1/2mV_i^2 = 3/2KT$$

Cette relation définit l'échelle de la température absolue en degré Kelvin (K).

***Notion de pression :** La pression est due aux nombreux chocs des atomes ou molécules sur les parois du récipient .

Pression dans une enceinte

Dans l'enceinte il y a N molécules en agitation permanente. Soit $n' = N/V$ le nombre de molécules par unité de volume. On définit la pression par la relation :

$$P = 1/3n'mV_i^2, \quad V_i : \text{vitesse des molécules}$$

II-THERMODYNAMIQUE

CHAPITRE I

ETAT D'UN FLUIDE HOMOGENE

RELATION ENTRE SES VARIABLES D'ETAT

I-Définitions générales

I.1-Système thermodynamique et état d'équilibre

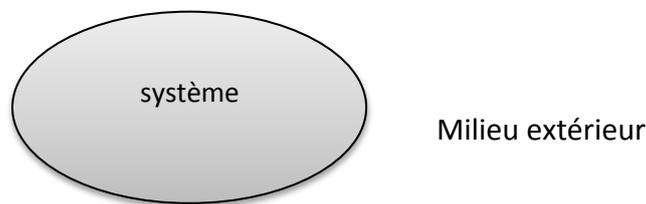
I.1.1- Définition du système

Pour décrire d'une manière thermodynamique un système, il faut à la fois :

- Définir le système en délimitant ses frontières par rapport au milieu extérieur.
- Déterminer l'état du système défini par ses variables.

Le système est défini comme une partie de la matière (de masse donnée) délimitée par rapport au milieu extérieur. Le milieu extérieur est le reste de l'espace entourant le

système voir figure suivante :



Le système peut être **ouvert** ou **fermé, adiabatique** c'est-à-dire isolé thermiquement ($Q = 0$) ou **rigide** c'est-à-dire indéformable ($W = 0$)

a-Système ouvert

Un système ouvert est un système qui peut échanger de l'énergie et de la matière avec le milieu extérieur.

b-Système fermé

Un système fermé est un système qui ne peut échanger que de l'énergie avec le milieu extérieur.

c-Système isolé

Un système isolé est un système qui ne peut échanger ni énergie ni matière avec le milieu extérieur.

On compte positivement l'énergie reçue par le système et négativement l'énergie cédée par le système.

1.1.2-Variables d'état et fonction d'état

L'état d'un système thermodynamique est défini par un ensemble de paramètres physiques correspondant à des grandeurs macroscopiques, telles que la pression P, le volume V et la température T.

Pour un fluide homogène, paramètres P, V et T sont appelés variables d'état.

-La grandeur physique qui caractérise cet état est appelée fonction d'état.

Il est commode de rappeler l'unité de la pression et de la température.

-L'unité internationale de la pression est Pascal, noté : P_a. Il y a autres unités de la pression, telles que le bar et l'atmosphère (noté : atm)

$$1\text{bar} = 1\text{atm} = 10^5 \text{ P}_a$$

-L'unité légale de la température est le Kelvin noté : K.

On utilise aussi comme unité de la température le degré Celsius noté °C.

On a :

$$t(^{\circ}\text{C}) = T - 273,15 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T = t(^{\circ}\text{C}) + 273,15 \text{ K}$$

$T(^{\circ}\text{C})$: température en degré Celsius : $^{\circ}\text{C}$

T : température en Kelvin : K

Exemple : on a $t = 25^{\circ}\text{C}$, alors on aura :

$$T = t + 273,15$$

$$T = 298,15 \text{ K}$$

a-Variance du système thermodynamique

En réalité, il suffit de se donner un nombre minimal de ces variables d'état (P, V, T). Pour décrire correctement l'état d'un système thermodynamique. Ce nombre est appelé variance noté v , donner par la règle de Gibbs suivante :

$$V = C + 2 - \Upsilon$$

Où : C : est le nombre de constituants indépendants.

Υ étant le nombre de phases.

Exemple :

On considère un fluide homogène (Gaz : $\text{O}_2, \text{H}_2, \dots$).

$C = 1$ un seul constituant (Gaz homogène).

$\Upsilon = 1$ une seule phase (phase Gazeux).

D'où : $V = 2$

Donc, il suffit deux variables d'état indépendantes pour décrire l'état d'un système thermodynamique considéré (fluide homogène).

b-Equation d'état d'un système thermodynamique

Les variables d'état (P, V, T) ne sont pas nécessairement indépendantes.

Elles sont reliés par l'équation d'état suivante :

$$f(P, V, T) = 0$$

Exemple :

La fonction $f(P, V, T)$ à trois variables donner par :

$$F(P, V, T) = PV - nRT$$

-12-

Où R étant la constante du Gaz parfait : $R = 8,31 \text{ J/ Mole K}$

n étant le nombre de moles du fluide considéré :

$$n = \frac{m}{M}$$

m est la masse du fluide et M la masse molaire.

L'équation d'état :

$$f(P, V, T) = 0, \text{ alors : } PV - nRT = 0$$

D'où : $PV = nRT$ c'est l'équation d'état des gaz parfait.

Pour un fluide homogène, les couples de variables d'état les plus couramment utilisés sont :

1-Couple (V, T) , il caractérise l'état de pression du fluide homogène considéré.

La pression P constitue une fonction d'état à deux variables indépendantes

$$V \text{ et } T : P = P(V, T)$$

2-Couple (P, T) , il caractérise l'état du volume du fluide considéré, alors

le volume V est une fonction d'état à deux variables d'état indépendantes P et T

$$V = V(P, T).$$

3-Couple (P, V) caractérise l'état thermique du fluide homogène considéré,

la température est alors fonction d'état à deux variables d'état indépendantes

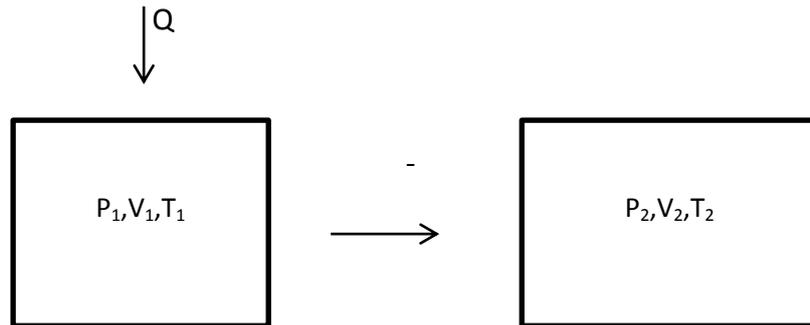
$$P \text{ et } V : T = T(P, V).$$

Donc, pour un fluide homogène P, V, T sont des variables d'état deux à deux

indépendantes, Elles sont reliés entre eux par l'équation d'état : $f(P, V, T) = 0$

I.1.3-Evolution ou transformation du système

Sous l'influence d'énergie ou transferts d'énergie entre le système et le milieu extérieur, le système évolue et les variables d'état d'un système sont **modifiés**. On dit que le système se transforme ou change d'état, en passant d'un état d'équilibre (1) à un autre état d'équilibre (2)



Transformation du système par échange d'énergie (apport de chaleur Q)

Au cours d'une transformation les **variables d'état** du système varient, pour atteindre un autre d'état d'équilibre. Le passage de l'état d'équilibre (1) à l'état d'équilibre (2) se déroule généralement **hors équilibre**.

On distingue alors entre :

***Transformations réversibles** (ou idéales) : ce sont des transformation infiniment lentes formées d'une succession d'état d'équilibre.

***Transformations irréversibles** : ce sont des transformations rapides et brutales hors équilibre.

La réversibilité d'une transformation exige que le système passe par une infinité d'états intermédiaires différents d'état d'équilibre (état quasi-statiques).

Les transformations **naturelles** spontanées sont irréversibles : elle ne peuvent évoluées que dans un seule sens

(exemple : la détente d'un gaz des haute pression vers basse pression, l'écoulement de la chaleur des haute température vers basse température.....)

Une transformation est dite **quasi statique** si tous les 'états intermédiaires du système thermodynamique au cours de la transformation sont des états définis, proches d'états d'équilibre. Cela implique que le déséquilibre des variables d'état, responsable de la transformation, soit infiniment petit.

d-Autres transformations

1-Transformations isothermes

La transformation isotherme est une transformation au cours de la quelle la température T est constante.

Au cours de la transformation isotherme qui ramène le système de l'état initial

$A (P_A, V_A, T_A)$ à l'état final $B (P_B, V_B, T_B)$. On a :

$T = T_A = T_B = \text{Constant}$, alors $dT = 0$, la variation élémentaire de la température est nulle au cours d'une transformation isotherme.

2-Transformations isobares

La transformation isobare est une transformation au cours de laquelle la pression P est constante : $P = P_A = P_B = \text{Constante}$

Alors on aura : $dP = 0$, la variation de la pression est nulle au cours d'une transformation isobare.

3-Transformations isochores

La transformation isochore est une transformation au cours de la quelle le volume est constant : $V = V_A = V_B = \text{Constante}$

Pour une transformation isochore. On a : $V = \text{cte}$ alors $dV = 0$, la variation du volume au cours d'une transformation isochore est nulle.

4-Transformation adiabatique

La transformation adiabatique est une transformation au cours de laquelle, il n'y a pas d'échange de la chaleur Q entre le système thermodynamique et le milieu extérieur.

Pour les transformations adiabatiques, on a : $Q = 0$.

5-Transformation cyclique

Un système décrit une transformation cyclique si après une suite de transformation, il revient à son état initial.

II-Forme différentielle

II.-Rappels mathématiques

a-Définition d'une fonction à deux variables

Soit $f(x, y)$ fonction à deux variables x et y , est une application de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & f(x, y) \end{array}$$

Exemple :

- 1- $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$
- 2- $f(x, y) = \text{Exp}(x \ln y)$

b-Dérivées partielles

La dérivée partielle par rapport au variable x , notée par : $(\frac{\partial f}{\partial x})_y$ et la fonction dérivée normale de f par rapport au variable x en supposant que la variable y est constante.

La dérivée partielle par rapport au variable y , notée par : $(\frac{\partial f}{\partial y})_x$

la fonction dérivée normale de f par rapport au variable y , en supposant que la variable x est constante.

Les dérivées partielles $(\frac{\partial f}{\partial x})_y$ et $(\frac{\partial f}{\partial y})_x$ sont appelées dérivées partielles de première ordre.

Exemple :

Soit $f(x,y)$ est donnée par : $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$

$$1-(\frac{\partial f}{\partial x})_y = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + xy) = 2x + y$$

$$2-(\frac{\partial y f}{\partial y})_x = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + xy) = 2y + x$$

On peut également faire la dérivée partielle par rapport au variable x ou par rapport au variable y des nouvelles fonctions $(\frac{\partial f}{\partial x})_y$ et $(\frac{\partial f}{\partial y})_x$.

On a alors :

$$1-(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})_y = (\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})_y)_y = \frac{\partial}{\partial x}(2x + y)_y = 2$$

$$2-(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})_x = (\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})_x)_x = \frac{\partial}{\partial y}(2y + x)_x = 2$$

$$3-(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})_{x,y} = (\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})_x)_y = \frac{\partial}{\partial x}(2y + y)_y = 1$$

$$4-(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x})_{y,x} = (\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})_y)_x = \frac{\partial}{\partial y}(2x + y)_x = 1$$

Ces dérivées sont des dérivées partielles de seconde ordre.

C-Différentielle totale

Soit $f(x,y)$ la fonction à deux variables x et y , on lui associe l'application différentielle linéaire, notée df , appelée différentielle totale, donnée par la relation suivante :

$$df = (\frac{\partial f}{\partial x})_y dx + (\frac{\partial f}{\partial y})_x dy$$

Où dx et dy sont des variations élémentaires des variables x et y .

Exemple :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$$

Sa différentielle totale est :

$$df = (2x + y)dx + (2y + x)dy$$

D-Différentielle totale exacte (notée : D.T.E)

Soit $f(x,y)$ fonction à deux variables x et y admet des dérivées partielles de première et de seconde ordre.
 df est une différentielle totale exacte si et seulement si, la fonction $f(x,y)$ satisfait la relation suivante :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{y,x} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_{y,x}$$

Exemple :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$$

On a :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{y,x} = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_{y,x} = 1$$

Alors on aura :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{y,x} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_{y,x}$$

Donc f admet une forme différentielle totale exacte.

II.2-Le vecteur gradient : $\vec{\text{grad}}f$

On considère un point M de l'espace

A trois coordonnées x , y et z .

Soit (i, j, k) une base cartésienne

orthonormée.

-Le vecteur gradient noté $\text{grad}f$

Est donné par :

$$\overrightarrow{\text{grad}f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{k}.$$

Pour un déplacement élémentaire:

$$\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$

Où : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\overrightarrow{OM'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

Alors : $\overrightarrow{dOM} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} + (z' - z)\vec{k}$.

Or : $dx = x' - x$, $dy = y' - y$ et $dz = z' - z$.

D'où : $\overrightarrow{dOM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

La différentielle totale df de la fonction $f(x, y, z)$ est donnée par :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}f} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

$$df = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \vec{k} \right] \cdot [dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}]$$

$$df = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz \right]$$

II.3-Identité de Reeche

Les variables d'état (P, V, T) d'un fluide homogène sont deux à deux indépendantes, reliés entre eux par l'équation d'état : $f(P, V, P) = 0$.

D'où : $P(V, T)$, $V(P, T)$ et $T(P, V)$ sont des fonctions d'état à deux variables admettant des différentielles totales suivantes :

$$dP = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT \right] \quad (1)$$

-11-

$$dV = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT \right] \quad (2)$$

$$dT = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP \right] \quad (3)$$

-20-

L'Identité de Reche et détermine par les équations (1) , (2) et (3).

En effet :

L'équation (2) donne :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP = dV - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$$

Alors :

$$dP = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} dV - \left[\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} \right] dT \quad (4)$$

On identifié l'éq(1) et l'éq(4),(c-à-d : l'éq(1) = l'éq(4)), on aura alors:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = - \left[\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} \right]$$

Alors :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

Or on a :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P}$$

D'où, on aura :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = - \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P}$$

D'où l'Identité de Reche :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -1$$

III-Coefficients thermo élastiques

La variation relative du volume et de pression s'écrit :

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP \quad (1)$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dT + \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) s'écrivent aussi comme suit :

$$\frac{dV}{V} = \alpha dT - \chi dP \quad (3)$$

$$\frac{dP}{P} = \beta dT - \epsilon dV \quad (4)$$

Où α , β , χ et ϵ sont appelés coefficients thermo élastiques.

-On identifié l'éq(1) et l'éq(3) on aura :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

α étant le coefficient de dilatation isobare du fluide. Elle représente la variation relative du volume du fluide par degré de variation de température. Son unité est K^{-1} .

$$\chi = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

χ est le coefficient de compressibilité isotherme. Son unité est le Pa^{-1}

-On identifié l'éq(2) et l'éq(4), on aura :

$$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

β c'est le coefficient d'augmentation de pression à volume constant. Son unité est K^{-1} .

$$\epsilon = - \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$$

Son unité est m^{-3} .

Chapitre II

GAZ PARFAITS ET GAZ REELS

I-Gaz parfait

I.1-Définition d'un gaz parfait

a-Loi de Boyle-Mariotte

Si on fait varier la pression d'un gaz donné à une température constante, on aura alors :

$$PV = \text{constante}$$

b-Loi de Gay-Lussac

Si on fait varier la température d'un gaz donné à pression constante, on aura :

$$\frac{V}{T} = \text{constante}$$

c-Loi de Charles-Amontton

Si on fait varier la température d'un gaz donné à volume constant, on aura :

$$\frac{P}{T} = \text{constante}$$

Un gaz est dit parfait s'il suit deux de ces trois lois à toutes pressions et à toutes températures.

I.2-Equation d'état d'un gaz parfait

L'équation d'état de n moles d'un gaz parfait est donnée par :

$$PV = nRT$$

n étant le nombre de moles du gaz parfait :

$$n = \frac{m}{M}$$

m étant la masse du gaz parfait

M étant la masse molaire du gaz parfait, c'est la masse de N particules du gaz

(N est le nombre d'Avogadro).

$R = 8,314 \text{ J/mole K}$ c'est la constante du gaz parfait.

Dans la condition normale $P_0 = 1 \text{ atm}$, $T_0 = 273,15 \text{ K}$ et le volume d'une mole du gaz parfait est $V_0 = 22,414 \text{ l}$.

1.3-Coefficients thermo élastiques d'un gaz parfait

Pour un gaz parfait, l'équation d'état est donnée par :

$$PV = nRT$$

i-Le coefficient α de dilatation isobare

On a :
$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

D'après l'équation d'état du gaz parfaits :

$PV = nRT$, alors on aura : $V = \frac{nRT}{P}$, d'où :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{nRT}{P} \right)_P = \frac{nR}{P}$$

Or d'après l'équation d'état du gaz parfait, on aura : $\frac{nR}{P} = \frac{V}{T}$.

Donc :
$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{V}{T} \right) = \frac{1}{T}$$

ii-Le coefficient β d'augmentation de pression isochore

on a :
$$\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

D'après l'équation d'état du gaz par fait : $PV = nRT$, on aura :

$P = \frac{nRT}{V}$, D'où $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{nRT}{V} \right) = \frac{nR}{V} = \frac{P}{T}$, d'après l'équation d'état du gaz parfait,

donc on aura :
$$\beta = \frac{1}{T}$$

iii-Le coefficient χ de compressibilité isotherme

On a :
$$\chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

D'après l'équation d'état du gaz parfait, on aura $V = \frac{nRT}{P}$, doù on aura :

$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{nRT}{P} \right)_T = -\frac{nRT}{P^2} = -\frac{1}{P} \left(\frac{nRT}{P} \right)$, d'où :

$X = \frac{1}{p} \left(\frac{nRT}{PV} \right)$, d'après l'équation d'état du gaz parfait, on a : $\frac{nRT}{PV} = 1$;

Donc : $X = \frac{1}{p}$

I.4-Energie interne d'un gaz parfait

L'énergie interne d'un gaz parfait est donnée par :

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

Première loi de Joule

L'énergie interne d'un gaz parfait dépend que de sa température T, $U = U(T)$.

Pour les transformations isothermes (T = constante), on aura :

$$U(T = ct^0) = ct^0$$

II-Gaz réels

Les gaz réels sont des gaz caractérisés par l'existence des interactions à distance entre ces particules. Il en résulte des forces intermoléculaires. Ces forces sont attractives et répulsives.

II.1-Forces moléculaires

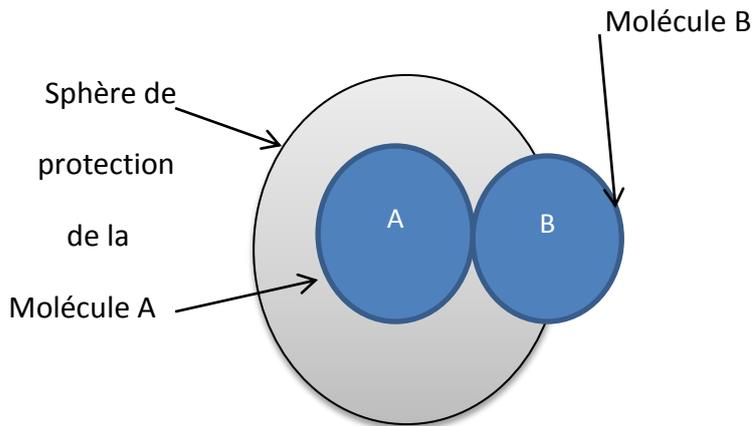
II.1.1-Forces attractives

Il existe une attraction résiduelle entre les molécules (Force de Vander waal).

Ces forces attractives sont de courte portée. Par conséquent, une molécule est pratiquement influencée par celle qui se trouve à son voisinage.

II.1.2-Forces répulsives

Les atomes moléculaires électroniques ne peuvent se couvrir que pour une faible distance. C'est une répulsion qui existe, il en résulte des sphères de protection autour de chaque molécule.



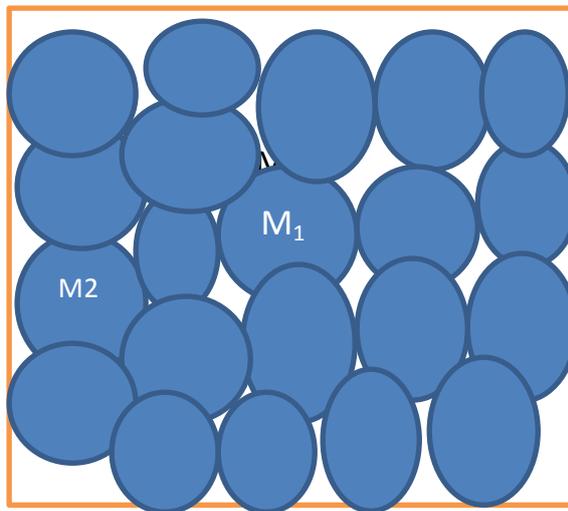
Le rayon de la sphère de protection est égale au diamètre de la molécule A.

II.2-Equation d'état d'un gaz réel

II.2.1-Correction de pression (Pression interne).

(on considère les forces attractives)

Considérons un gaz réel de n moles contenu dans un récipient de volume V .



Récipient de volume V

Soit M_1 et M_2 deux molécules où M_1 situé à l'intérieur du récipient et M_2 est à cote de la paroi du récipient.

La molécule M_1 est entourée par des molécules semblables. Comme la densité des molécules est uniforme, la résultante des forces appliquées à M_1 est alors nulle ($\sum F = 0$). Ce n'est pas le cas pour la molécule M_2 qui se trouve à cote de la paroi, car elle n'est pas entourée par le meme nombre de molécules. Par conséquent, il y aura une force de pression, s'appelle pression interne, cette force entraine la molécule M_2 de la paroi vers l'intérieur du récipient.

Où la pression interne, notée P_i , lié à la force de pression est donnée par :

$$P_i = \frac{a}{V} \quad (1)$$

Où a étant une constante.

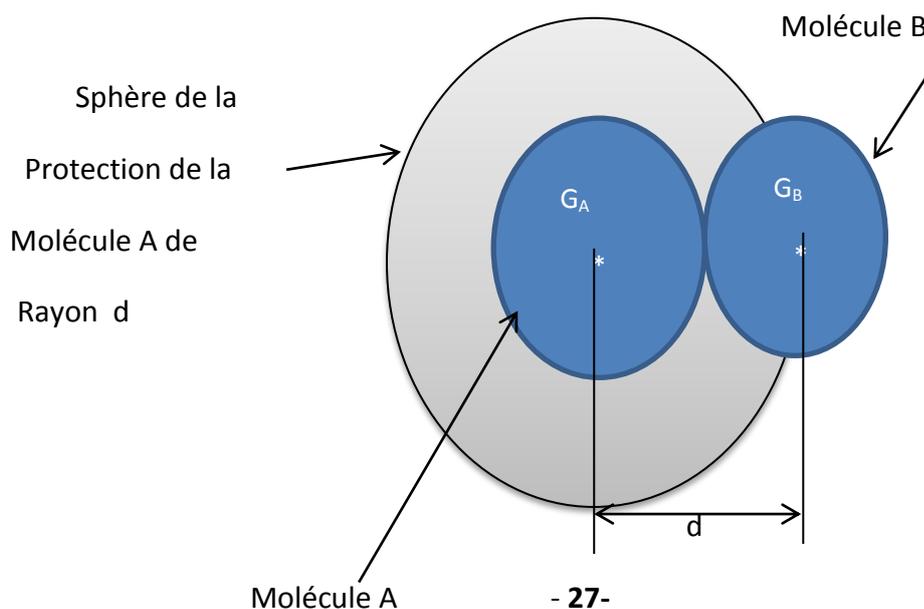
Soit P la pression exercée par la paroi, l'expression totale de la pression du gaz est alors :

$$P_0 = P + P_i \quad (2)$$

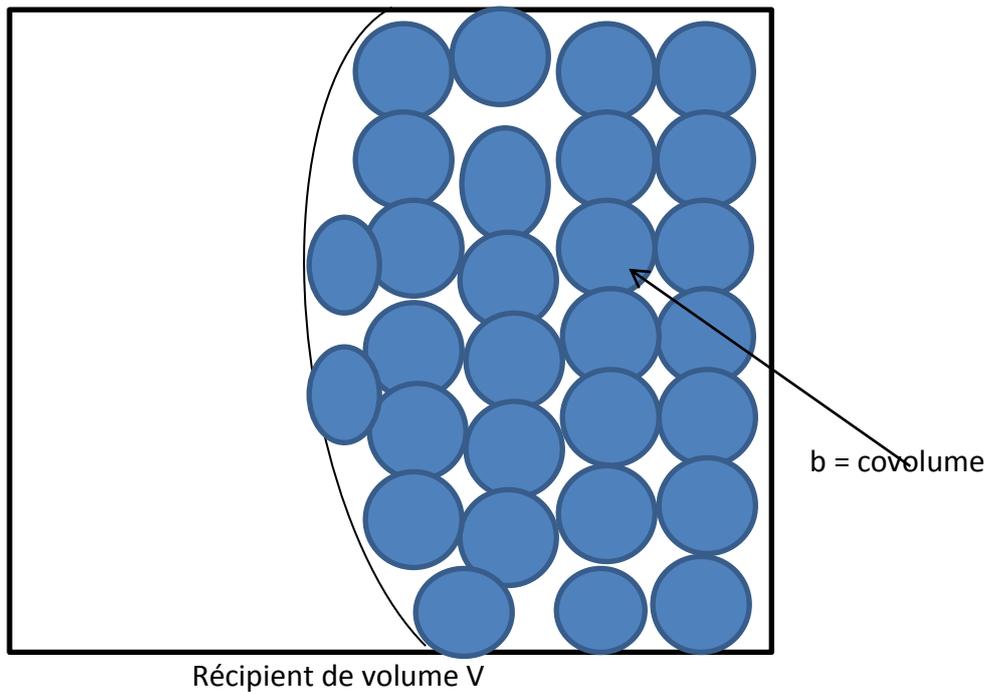
II.2.2-Correction de covolume

(on considère les forces de répulsions)

On suppose que les molécules du gaz réel sont rigides, de forme sphérique et de diamètre d .



Le centre de masse G_B de la molécule B ne peut s'approcher du centre G_A de la molécule A à moins de d . G_B ne peut en aucun cas se trouver à l'intérieur d'une sphère de protection de centre G_A et de rayon d . Ce raisonnement s'étant aux autres molécules.



Le covolume b étant le volume occupé par les molécules du gaz réel lorsqu'elles sont serrées les unes contre les autres.

En raison de la sphère de protection chaque molécule ne peut plus se déplacer dans le volume V du réceptif, mais elle se déplace dans le volume V_0 , d'où :

$$V_0 = V - b \quad (3)$$

Où $b = \text{constante}$

Par analogie à un gaz parfait considéré formé par des molécules sphériques (sphères de protection).

On aura alors l'équation d'état d'une mole du gaz parfait suivante :

$$P_0V_0 = RT \quad (4)$$

En tenant compte la correction de pression eq(1) et eq(2) ainsi que la correction de covolume eq(3) apportées à l'eq(4), on aura alors :

$$(P + a/V^2)(V - b) = RT$$

C'est l'équation d'état de Vander Waals d'une mole d'un gaz réel.

Pour n moles d'un gaz réel, l'équation de Vander Waals (où équation d'état de n moles d'un gaz réel s'écrit :

$$(P + an^2/V^2)(V - nb) = nRT$$

II.3-Autres équation d'état

L'équation de Vander Waal ne vérifie qu'approximativement le comportement des gaz réels. En effet, il y a d'autres équations caractéristique qui sont liées aux données expérimentales. On cite parmi elles les équations suivantes :

i-Equation de Clausius

Pour n moles d'un gaz réel l'équation d'état s'écrit :

$$(P + an^2/T(V+nC)^2)(V - nb) = nRT$$

-L'introduction de coefficient C a pour but d'être mieux en accord avec l'expérience.

-Le terme de la pression interne $P_i = \frac{an^2}{T(V+nC)}$ dépend de la température T du gaz réel.

ii-Equation de Berthelot

Elle se déduit à partir de celle de Clausius en négligeant le coefficient C :

$$(P + an^2/TV^2)(V - nb) = nRT$$

iii-Equation de Dieterici

Elle est donnée par :

$$P(V - nb) = nRTe^{-\frac{an}{RTV}}$$

Chapitre III

PREMIERE PRINCIPE

(Principe de la conservation d'énergie)

Le but de thermodynamique est d'étudier **les propriétés** des systèmes et **leurs évolutions** en fonction des échanges d'énergie avec le milieu extérieur. Un système peut échanger de la masse et de l'énergie avec le milieu extérieur, alors son **état change** par gain ou perte de masse ou d'énergie. On dit que le système subit une transformation qui entraîne une variation des variables d'état.

Chaque système a **un certain contenu en énergie** sous diverses formes, telles :

*L'énergie mécanique (cinétique ou potentielle)

*L'énergie chimique dégage sous forme de chaleur lors des réactions chimiques

*L'énergie nucléaire ($E = mc^2$) résultat d'une variation de la masse du noyau.

On considère en générale que au cours d'une transformation peuvent se produire soit séparément, soit simultanément des échanges d'énergie.

-Les échanges d'énergie mécanique appelé travail, noté W.

-Les échanges d'énergie thermique appelé chaleur, noté Q.

Par convention, on dit que toute énergie reçue par le système thermodynamique est positive et toute énergie cédée par le système thermodynamique au milieu extérieur est négative.

I-Travail d'une force de pression

Le travail est ne autre forme de l'énergie (énergie mécanique) :

*C'est une énergie exprimée e [J] ou [kcal]

*A l'échelle microscopique c'une énergie échangée de façon ordonnée (grace

Au déplacement du piston qui implique une certaine direction aux atomes)

***Ce n'est pas une fonction d'état**

On distingue entre travail volumique, travail technique et travail de frottement.

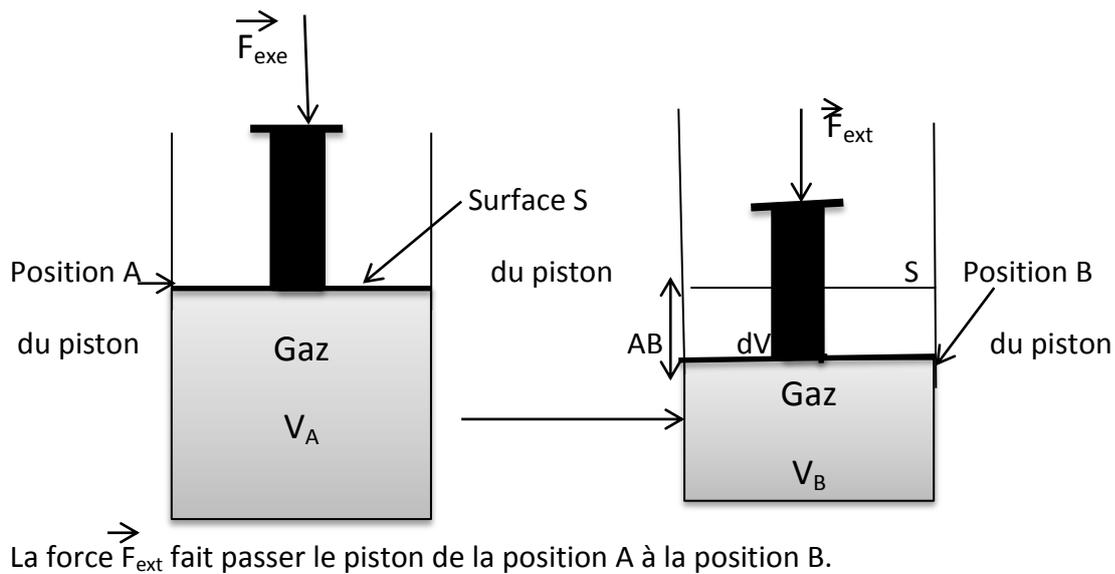
Travail volumique

Soit un gaz contenu à l'intérieur d'un cylindre fermé par un piston de surface S.

On applique sur le piston une force extérieure :

$$F_{\text{ext}} = P_{\text{ext}} S$$

P_{ext} pression du à la force extérieur F_{ext} .



Le volume balayé par le piston au cours de son déplacement AB est alors :

$$dV = S \cdot AB$$

Le gaz est alors comprimé et le travail mis en jeu au cours de cette déplacement

s'écrit :

$$\delta W = F_{\text{ext}} AB = P_{\text{ext}} S \cdot AB$$

Notons que au cours d'une compression, le gaz reçoit du travail du milieu extérieur,

donc on aura :

$$\delta W > 0$$

et :

$$dV < 0$$

Car au cours d'une compression d'un gaz, on aura diminution de volume :

Soit :

$$\Delta V = \int_{V_A}^{V_B} dV = V_B - V_A < 0$$

Car :

$$V_B < V_A$$

Pour avoir le travail positif, on écrit alors :

$$\delta W = - P_{\text{ext}} dV \quad (1)$$

En général on a : $P_{\text{ext}} = P_{\text{int}}$, où P_{int} étant la pression intérieure.

Pour le cas d'une transformation réversible on aura : $P_{\text{ext}} = P_{\text{int}} = P$.

Le travail élémentaire s'écrit alors :

$$\delta W = - P dV \quad (2)$$

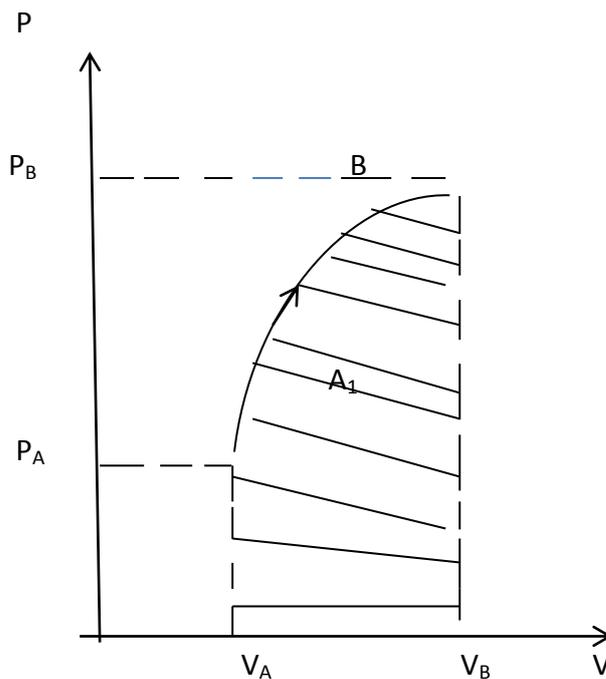
Dans ce type de transformation (Transformation réversible), la pression P et le volume V sont définies à n'importe quelle moment, d'où le travail total donné par :

$$W = \int \delta W = - \int_{V_A}^{V_B} P dV \quad (3)$$

On distingue alors plusieurs cas :

a- Transformation ouverte

On part de l'état d'équilibre initiale A (P_A, V_A, T_A) pour arriver à l'état d'équilibre finale B (P_B, V_B, T_B)



Le travail total s'écrit :

$$W = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = - A1$$

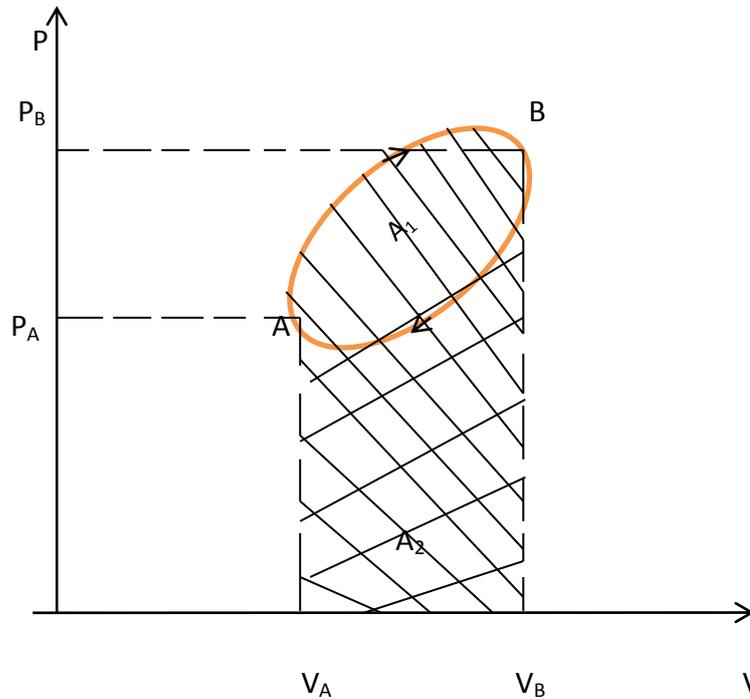
Où : $\int_{V_A}^{V_B} PdV = A_1$ étant la surface hachurée.

On a : $V_B > V_A$ alors $A_1 > 0$, d'où $W < 0$.

Le système fournit alors du travail au milieu extérieur.

b-Transformation cyclique

Dans une transformation cyclique, l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre initial final sont les memes.



Pour simplifier le problème, on va considérer les points A et A' tangents à la courbe et parallèles à l'axe de la pression.

Soit :

Cycle = transformation (1) AB + transformation (2) BA.

i-Transformation (1) AB

On a :
$$W_1 = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = - A_1$$

Où :
$$\int_V^V P dV = A_1$$

Or la surface hachure A_1 est positive, car $V_B > V_A$.

Danc : $W_1 < 0$.

ii-Transformation (2) 'BA

On a :
$$W_2 = = - \int_{V_B}^{V_A} P dV = A_2$$

Or la surface hachurée A_2 est positive, car $V_B > V_A$.

Dù:
$$W_2 > 0$$
.

Danc :
$$W_{cycle} = W_1 + W_2 = A_2 - A_1 < 0, \text{ car } A_1 > A_2.$$

c)Transformation isobare($P=C^{ste}$).

Alors,
$$W_{12} = -P \int_1^2 dV = -P(V_2 - V_1)$$

d)Transformation isotherme ($T=C^{ste}$).

$$W_{12} = - \int_1^2 P dV \quad \text{or } PV = nRT$$

Alors,
$$W_{12} = - \int_1^2 nRT \frac{dV}{V} = -nRT \int_1^2 \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} = nRT \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$W_{12} = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} = nRT \ln \frac{P_2}{P_1}$$

e)Transformation isochore ($V=C^{ste}$)

Alors, $dV=0$ et le travail est nul, $W_{12}=0$

II-Interaction thermique. Notion de chaleur

Soit une mole d'un gaz parfait contenu dans une boîte métallique parfaitement rigide. On met la boîte au contact d'un thermostat à température $t_1 = 25^\circ\text{C}$, ou $T_1 = 298,15\text{ K}$, l'énergie interne du gaz parfait est :

$$U_1 = \frac{3}{2} RT_1 = 3406\text{ J}$$

On suite, on met la boîte au contact du thermostat à $t_2 = 100^\circ\text{C}$, ou $T_2 = 373,15\text{ K}$, l'énergie interne du gaz parfait devient alors :

$$U_2 = \frac{3}{2} RT_2 = 4653\text{ J}$$

Le gaz a reçu donc l'énergie : $U = 1247\text{ J}$.

Comment ce gaz a-t-il reçu cette énergie ?

A 100°C , les atomes du thermostat sont plus agités qu'à 25°C , par leur choc contre la paroi externe de la boîte métallique, elles peuvent transformer de l'énergie aux atomes du métal, qui vont prendre à leur tour une agitation de plus en plus grande, ces transferts d'énergie s'effectuent de proche en proche jusqu'à communiquer de l'énergie aux molécules du gaz. Il en résulte un flux d'énergie vers l'intérieur du système qui ne s'annulera que lorsque l'équilibre thermique sera atteint.

(on dit qu'un système en équilibre thermique, lorsque la température T est uniforme en tout point du système).

On appelle quantité de chaleur, notée Q , l'énergie transférée à un système par un processus de ce type. L'unité de la chaleur Q est le Joule (notée par J).

On a aussi comme unité de chaleur le calorie (noté cal) :

$$1\text{ cal} = 4,184\text{ J}$$

III-Première principe de la thermodynamique

III.1-Energie interne

Que le système soit solide ou fluide (Gaz) les particules qui le composent sont toujours animées de mouvement de vibration (système solide) ou de mouvement désordonné et libre (structure fluide).

On associe à l'ensemble de ces mouvements une énergie cinétique moyenne d'agitation thermique E_C . A la différence des gaz parfaits, les particules d'un gaz réel interagissent entre elles, à l'ensemble de ces interactions on associe une énergie potentielle E_p . Par définition, l'énergie interne d'un système thermodynamique est alors donnée par :

$$U = E_C + E_p = Ct^0$$

U est un invariant du système en équilibre thermodynamique. Alors l'énergie interne U est une fonction d'état définissant l'état énergétique du système.

III.1.1-Propriétés de l'énergie interne U

A l'équilibre thermique, l'énergie interne U :

- Est une énergie exprimée en Joule[J] ou [kcal]
- Elle a une valeur bien définie connue à une constante près (non connue dans l'absolu)
- C'est une fonction d'état

L'énergie interne U caractérise le contenu ou niveau énergétique du système Thermodynamique. L'énergie interne U d'un système peut varier par suite d'échanges D'énergie avec le milieu extérieur. Les énergies sont principalement échangées sous forme de chaleur (Q) et de travail (W).

III.1.2-La chaleur latente

La chaleur latente est la chaleur nécessaire à 1kg de matière pour **changer d'état** à

Température constante, elle est définie par :

$$Q = mL$$

Où, L est la chaleur massique associée à un **changement d'état**, cette chaleur est soit **Libérée** (Vapeur \longrightarrow Liquide) ou **absorbée** (Liquide \longrightarrow Vapeur). On distingue Entre chaleurs latente de fusion, de vaporisation....

III.2-Enoncé du première principe

Pour un système thermodynamique, il existe une fonction d'état appelée énergie interne, notée par U.

Au cours d'une transformation réversible quelconque, la variation ΔU de l'énergie interne est égale à la somme des travaux W et chaleur Q échangés entre les système thermodynamique et le milieu extérieur.

III.3-Expression du première principe

On considère un système thermodynamique pouvant échanger avec le milieu extérieur du travail W et de la chaleur Q au cours d'une transformation quelconque.

La variation de l'énergie interne s'écrit alors :

$$\Delta U = W + Q \quad (4)$$

Au cours d'une transformation réversible élémentaire (Transformation réversible infiniment petite), on a :

$$dU = \delta W + \delta Q \quad (5)$$

Où, dU étant la variation élémentaire (la variation infiniment petite) de l'énergie interne, W le travail élémentaire échangé au cours de la transformation élémentaire considérée.

et δQ la chaleur élémentaire échangée au cours de la transformation élémentaire considérée.

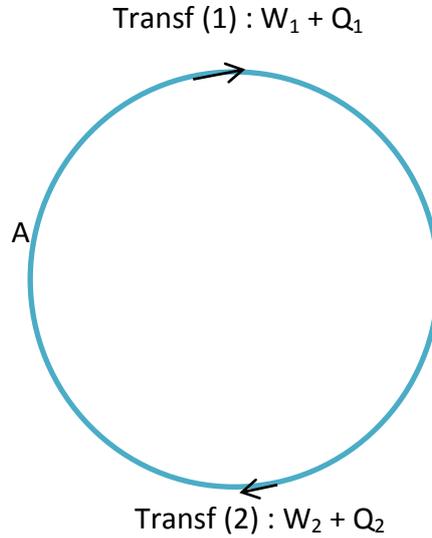
Puisque U est une fonction d'état, alors dU est une forme différentielle

Totale exacte, on a alors :

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} \right)_{V,T} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} \right)_{T,V}$$

-Transformation cyclique

On considère un système thermodynamique soumis à une transformation cyclique suivante :



Où : W_1 , W_2 , Q_1 et Q_2 les travaux et les chaleurs échangés respectivement au cours la transformation (1) et la transformation (2).

On a : le cycle = Transf (1) + Transf (2), alors on écrit:

$$\Delta U_{\text{cycle}} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BA}$$

Où :

$$\Delta U_{AB} = \int_{U_A}^{U_B} dU = U_B - U_A$$

$$\Delta U_{BA} = \int_{U_B}^{U_A} dU = U_A - U_B$$

Alors:

$$\Delta U_{\text{cycle}} = U_B - U_A + U_A - U_B = 0$$

Or on a d'après le première principe :

$$\Delta U_{AB} = W_1 + Q_1$$

$$\Delta U_{BA} = W_2 + Q_2$$

D'où :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = (W_1 + W_2) + (Q_1 + Q_2) = 0$$

Donc, au cours d'une transformation cyclique, on a :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0 \quad (6)$$

et : $W = - Q$

$W = W_1 + W_2$ travail total échangé au cours de la transformation cyclique.

$Q = Q_1 + Q_2$ chaleur totale échangée au cours la transformation cyclique.

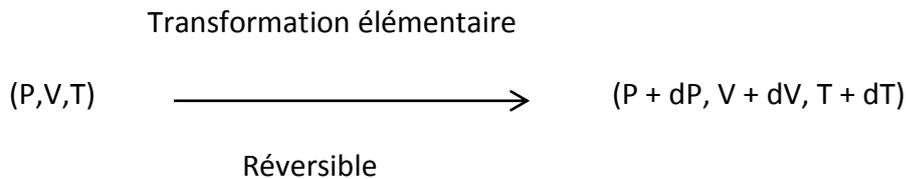
IV-Coefficients Calorimétriques

IV.1-Définition

Considérons un fluide homogène défini par les variables d'état P, V et T reliées par l'équation d'état : $f(P, V, T) = 0$.

Alors on aura deux variables d'état indépendantes.

Soit un système thermodynamique de variables d'état (P,V,T) subit la transformation élémentaire réversible suivante :



D'après le première principe On a: $dU = \delta W + \delta Q$

Avec : $\delta W = - PdV$

Il vient alors : $dU = - PdV + \delta Q$

$$\delta Q = dU + PdV$$

(7)

i-Variables d'état indépendantes (T,V)

(Coefficients Calorifiques : C_V, C_{Mv}, C_{mv} et I)

L'énergie interne est une fonction d'état à deux variables T et V :

$U = U(T, V)$. La différentielle totale de U s'écrit alors :

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

L'équation (7) devient :

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \right] dV \quad (8)$$

Par définition, la chaleur élémentaire Q échangée au cours de la transformation réversible élémentaire considérée s'écrit comme suit :

$$\delta Q = C_V dT + l dV \quad (9)$$

On identifie l'équation (8) et l'équation (9), (équation (8) = équation (9)),

on aura : $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ et $l = P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$

l : étant la chaleur latente de la dilatation, son unité est le Pascal (Pa).

C_V : étant la capacité calorifique à volume constant, son unité est JK^{-1} (J/K).

C_V c'est la chaleur apportée à volume constant à un fluide (Gaz) pour augmenter sa température T de 1 K.

Pour n moles du fluide, on a : $C_V = nC_{MV}$

Alors :

$$\delta Q = nC_{MV} dT + l dV \quad (10)$$

Pour une masse m du fluide, on a : $C_V = mC_{mV}$

Alors : $\delta Q = mC_{mV} dT + l dV \quad (11)$

C_{MV} : étant la capacité calorifique molaire à volume constant.

Son unité est le $\text{Jk}^{-1}\text{mole}^{-1}$ (c-à-d : J/Kmole).

C_{mV} : étant la chaleur massique à volume constant, son unité est le $\text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$.

Au cours de la transformation élémentaire réversible considérée la variation élémentaire

de l'énergie interne s'écrit alors :

$$dU = nC_{MV} dT + (1 - P) dV \quad (12)$$

Remarque :

Pour une transformation réversible isochore (volume constant), on aura :

$$V = Ct^0, \text{ Transformation isochore : } dV = 0$$

$$\text{Alors :} \quad \delta Q = nC_{MV} dT \quad (13)$$

$$\delta Q = mC_{mv} dT \quad (14)$$

$$dU = nC_{MV} dT \quad (15)$$

ii-Variables indépendantes (T,P)

(Coefficients Calorifiques : C_p , C_{MP} , C_{mP} et h)

Maintenant l'énergie interne $U = U(T,P)$ est une fonction d'état à deux variables T et P ,

sa différentielle totale s'écrit :

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T dP$$

Ainsi que le volume $V = V(T,P)$ est une fonction d'état à deux variables d'état T et P ,

son différentielle totale est :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$$

On remplace alors les expressions de dU et de dV dans l'équation (7), On aura :

$$\delta Q = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + P \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \right] dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T + P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \right] dP \quad (16)$$

Par définition, la chaleur élémentaire échangée au cours de la transformation

élémentaire considérée est donnée par :

$$\delta Q = C_p dT + h dP \quad (17)$$

On identifie l'équation (16) et l'équation (17), on aura alors :

$$C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + P \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$h = \left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_T + P \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

h : étant la chaleur latente de compression, Son unité est le m^3 .

C_p ; étant la capacité calorifique à pression constante, son unité est le JK^{-1}

Pour n moles du fluide, on a : $C_p = nC_{MP}$

Alors :
$$\delta Q = nC_{MP} dT + h dP \quad (18)$$

Pour une masse m du fluide, on a : $C_p = mC_{mp}$

Alors :
$$\delta Q = mC_{mp} dT + h dP \quad (19)$$

C_{MP} : étant la capacité calorifique molaire à pression constant. Son unité est le $JK^{-1}mole^{-1}$.

C_{mp} : étant la chaleur massique à pression constante, son unité est le $JK^{-1}Kg^{-1}$

Remarque

Pour une transformation élémentaire réversible isobare.

$P = ct^0$, Transformation isobare : $dP = 0$

Alors :
$$\delta Q = nC_{MP} dT \quad (20)$$

$$\delta Q = mC_{mp} dT \quad (21)$$

iii-Variables d'état indépendantes (P,V)

(Coefficients μ et ν)

Ici l'énergie interne est une fonction d'état à deux variables P et V.

$U = U(P,V)$ de différentielle totale suivante :

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_V dP + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_P dV$$

L'équation (7) devient alors :

$$\delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_V dP + \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_P \right] dV$$

Par définition, on a :

$$\delta Q = \aleph dP + \mu dV$$

On identifie ces deux équation, on aura alors :

$$\aleph = \left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_V$$

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{P+P}$$

\aleph : étant la chaleur isochore de compression d'unité m^3

μ : étant la chaleur isobare de dilatation d'unité Pa.

V-Fonction Enthalpie

Définissons une nouvelle fonction d'état, noté H, appelée enthalpie par la relation

suivante :
$$H = U + P_0V \quad (22)$$

i-Cas d'une transformation réversible isobare

Au cours d'une transformation réversible isobare la pression ne varie pas.

On aura : $P = P_0 = \text{Ct}^0$

L'enthalpie H devient alors : $H = U + P_0V$

La variation élémentaire dH de l'enthalpie s'écrit : $dH = dU + P_0dV$

On considère une transformation réversible isobare d'un système thermodynamique, qui ramène le système de l'état initial (1) de variables

d'état (P_1, V_1, T_1) , d'énergie interne U_1 et d'enthalpie H_1 , à l'état final (2) de variables

d'état (P_2, V_2, T_2) , d'énergie interne U_2 et d'enthalpie H_2 .

On a transformation réversible isobare, d'où on aura : $P_1 = P_2 = P = P_0 = \text{Ct}^0$

La variation totale de l'enthalpie s'écrit :

$$\Delta H = \int_{Etat(1)}^{Etat(2)} dH = \int_{(1)}^{(2)} (dU + PdV)$$

$$\Delta H = \int_{Etat (1)}^{Etat (2)} dU + P_0 \int_{V_1}^{V_2} dV$$

Où :

$$\Delta H = \int_{Etat (1)}^{Etat (2)} dH = \int_{H_1}^{H_2} dH = H_2 - H_1$$

$$\Delta U = \int_{Etat (1)}^{Etat (2)} dU = \int_{U_1}^{U_2} dU = U_2 - U_1$$

$$\Delta V = \int_{(1)}^{(2)} dV = \int_{V_1}^{V_2} dV = V_2 - V_1$$

Donc :

$$\Delta H = \Delta U + P_0 \Delta V \quad (23)$$

D'après le première principe, on a :

$$\Delta U = W + Q$$

Où W étant le travail total échangé entre le système et le milieu extérieur au cours de la transformation réversible isobare, d'où :

$$W = \int_{Etat (1)}^{Etat (2)} \delta W$$

Où :

$$\delta W = - PdV = - P_0 dV$$

Il vient alors :

$$W = -P_0 \int_{V_1}^{V_2} dV = - P_0 (V_2 - V_1)$$

Donc :

$$W = - P_0 \Delta V$$

et :

$$\Delta U = - P_0 \Delta V + Q$$

L'équation (23) devient alors:

$$H = - P_0 \Delta V + Q + P_0 \Delta V$$

$$H = Q \quad (24)$$

Donc, au cours d'une transformation réversible isobare d' un système thermodynamique , la variation H de l'enthalpie du système est égale à la chaleur Q échangée entre le milieu extérieur et le système au cours de cette transformation.

VI-Application du première principe aux Gaz parfaits

VI.1-Enthalpie d'un Gaz parfait

Considérons n moles d'un gaz parfait d'équation d'état : PV = nRT

Son enthalpie s'écrit : $H = U + PV = U + nRT$

Or, d'après la première loi de Joule, l'énergie interne d'un gaz parfait dépend uniquement de la température T, on a : $U = U(T)$.

D'où, la deuxième loi de Joule : $H = H(T) = U(T) + nRT$

L'enthalpie des gaz parfaits dépend que de la température T.

i-L'expression de dU : La variation élémentaire de l'énergie interne d'un gaz parfait

D'après le premier principe, on a : $dU = \delta W + \delta Q$

Où : $\delta W = -PdV$

et : $\delta Q = C_v dT + l dV$

D'où : $dU = C_v dT + (l - P) dV$

D'autre part l'énergie interne est une fonction d'état à deux variables T et V.

La différentielle totale dU s'écrit alors :

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

On identifie les deux équations de dU, on aura alors : $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$

et : $l - P = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$

Or, on a : $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$

Car $U = U(T)$, d'après la première loi de Joule, l'énergie interne du gaz parfait dépend que de la température T. Elle ne dépend pas du volume V.

Donc : $l = P$

On effectue alors le changement de la notation de la dérivée, on écrit :

$$C_v = \frac{dU}{dT}$$

$$dU = C_v dT$$

-Pour n moles d'un gaz parfait, dU s'écrit alors :

$$dU = nC_{MV} dT \quad (25)$$

-Pour une masse m d'un gaz parfait, dU devient :

$$dU = mC_{mv} dT \quad (26)$$

ii-L'expression de dH : La variation élémentaire de l'enthalpie d'un gaz parfait

On a : $H = U + PV$

D'où : $dH = dU + d(PV)$

Où : d(PV) étant la variation du produit de deux fonctions, alors :

$$d(PV) = VdP + PdV$$

D'après le première principe : $dU = \delta W + \delta Q$

Où : $\delta W = - PdV$

Et : $\delta Q = C_p dT + hdP$

Il vient alors : $dH = -Pdv + C_p dT + hdP + VdP + PdV$

Donc : $dH = C_p dT + (h + V)dP$

L'enthalpie est une fonction d'état à deux variables T et P. La différentielle totale

dH de l'enthalpie s'écrit alors :

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP$$

Par identification des deux expressions de dH, on aura : $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$

et : $h + V = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T$

D'après le deuxième loi de Joule, on a : $H = H(T)$.

L'enthalpie d'un gaz parfait dépend uniquement de la température T. Elle ne dépend

pas de la pression P. Alors on aura : $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = 0$

Donc : $h = - V$

Par changement de notation de la dérivée, on écrit alors :

$$\frac{dH}{dT} = C_p \quad \text{Alors :} \quad dH = C_p dT$$

-Pour n moles d'un gaz parfait, on aura :

$$dH = nC_{MP} dT \quad (27)$$

Pour une masse m d'un gaz parfait :

$$dH = mC_{mP} dT \quad (28)$$

VI.2-Relation de Mayer

L'enthalpie de n moles d'un gaz parfait est donnée par : $H = U + nRT$

Soit : $dH = dU + nRdT \quad (29)$

Or pour n moles d'un gaz parfait, on a : $dH = nC_{MP} dT$ et $dU = nC_{MV} dT$

On remplace dans l'équation (29), on aura :

$$nC_{MP} dT = nC_{MV} dT + nRdT$$

On divise par $n dT$, on aura alors la relation de Mayer suivante :

$$C_{MP} - C_{MV} = R \quad (30)$$

On introduit en suite le paramètre γ , étant le rapport entre les coefficients

calorifiques molaires C_{MP} et C_{MV} : $\gamma = C_{MP} / C_{MV}$

γ est considérée généralement comme une constante. Elle ne dépend pas de la température.

-L'expression de C_{MV} et C_{MP} en fonction de γ et R

D'après la relation de Mayer : $C_{MP} - C_{MV} = R$

On aura : $C_{MV} (C_{MP} / C_{MV} - 1) = R$

D'où : $C_{MV} (\gamma - 1) = R$

Donc :

$$C_{MV} = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (31)$$

D'après la relation de Mayer, on aura :

$$C_{MP} (1 - C_{MV} / C_{MP}) = R$$

Or on a : $\gamma = C_{MP} / C_{MV}$. D'où: $\frac{1}{\gamma} = C_{MV} / C_{MP}$ et $C_{MP} (1 - \frac{1}{\gamma}) = R$

Donc :

$$C_{MP} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (32)$$

VI.3-Bilan énergétique de quelque transformation d'un gaz parfait

Soit n moles d'un gaz parfait subit une transformation réversible qui le ramène de l'état initial $A_1 (P_1, V_1, T_1)$, d'énergie interne U_1 , à l'état final $A_2 (P_2, V_2, T_2)$, d'énergie interne U_2 .

VI.3.1-Transformation réversible isotherme

a-Calcul du travail $W_{A_1 A_2}$ échangé au cours de la transformation isotherme du gaz parfait

Par définition, on a : $\delta W_{A_1 A_2} = - PdV$

Le gaz considéré est parfait, d'équation d'état : $PV = nRT$

Alors la pression est donnée par l'équation d'état du gaz parfait : $P = \frac{nRT}{V}$

Le travail élémentaire devient alors :

$$\delta W_{A_1 A_2} = - nRT \frac{dV}{V}$$

D'où le travail total :

$$W_{A_1 A_2} = \int_{A_1}^{A_2} \delta W$$

$$W_{A_1 A_2} = - nR \int_{V_1}^{V_2} T \frac{dV}{V}$$

Or, on a : $T = T_1 = T_2 = T^0$, car la transformation réversible considérée est isotherme.

Il vient alors :

$$W_{A_1 A_2} = - nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

Donc :

$$W_{A_1 A_2} = - nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

-L'expression du travail total en fonction de pression :

D'après l'équation d'état du gaz parfait de :

-L'état initial A_1 : $P_1 V_1 = nRT_1$

-L'état final A_2 : $P_2 V_2 = nRT_2$

Or, on a : $T_1 = T_2$, Transformation $A_1 A_2$ est isotherme.

D'où : $P_1 V_1 = P_2 V_2$

et : $\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$

Donc : $W_{A_1 A_2} = - nRT_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$

b-Calcul de la chaleur totale $Q_{A_1 A_2}$ échangée au cours de la transformation i

sotherme du gaz parfait

On a un gaz parfait, on utilise :

i-La première loi de Joule.

$U = U(T)$, l'énergie interne d'un gaz parfait dépend uniquement de la température T .

Le gaz subit une transformation isotherme ($T = T_1 = T_2 = Ct^0$).

Alors : $U(T = T_1) = U(T = T_2) = U(T = Ct^0) = Ct^0$, au cours de la transformation isotherme, l'énergie interne du gaz parfait ne varie pas.

Alors : $dU = 0$ et $U = \int_{U_1}^{U_2} dU = U_2 - U_1 = 0$

Où : $U_1 = U(T = T_1)$ et $U_2 = U(T = T_2)$

ii-Le premier principe de la thermodynamique

$$U = W_{A_1 A_2} + Q_{A_1 A_2} = 0$$

Donc : $Q_{A_1 A_2} = - W_{A_1 A_2}$

et : $Q_{A_1 A_2} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nRT_1 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$

VI.3.2-Transformation réversible adiabatique

Au cours de la transformation réversible adiabatique, le gaz passe de l'état initial $A_1(P_1, V_1, T_1)$ à l'état final $A_2(P_2, V_2, T_2)$.

-Equation de Laplace

D'après le première principe de la thermodynamique :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

Où : $\delta W = - PdV$

Pour n moles d'un gaz parfait, on a : $dU = nC_{MV} dT$

D'où : $\delta Q = dU - \delta W = nC_{MV} dT + PdV$ (33)

D'après l'équation d'état de n moles du gaz parfait, on aura :

$$T = \frac{PV}{nR}$$

D'où : $dT = \frac{1}{nR} d(PV) = \frac{1}{nR} (VdP + PdV)$

L'équation (33) devient alors :

$$\delta Q = \frac{nC}{nR} (VdP + PdV) + PdV$$

D'après la relation de Mayer, on a : $C_{MV} = \frac{R}{\gamma-1}$

D'où Q devient : $\delta Q = \frac{V}{\gamma-1} dP + \left(\frac{1}{\gamma-1} + 1 \right) PdV$

Donc : $\delta Q = \frac{V}{\gamma-1} dP + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) PdV$ (34)

L'équation (34) étant la formule générale de la chaleur élémentaire Q pour un gaz parfait subit une transformation réversible quelconque.

-Cas de la transformation réversible adiabatique

Au cours d'une transformation réversible adiabatique, il n'y a pas d'échange de la chaleur entre le gaz parfait et le milieu extérieur. Alors :

Q = 0 et l'équation (34) devient :

$$VdP + \gamma PdV = 0$$

Divisons cette équation par PV, on obtient alors :

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad (35)$$

L'équation (35) étant l'équation de Laplace pour les transformations réversibles adiabatiques des gaz parfaits.

i-Equation de l'adiabatique entre les variables P et V

On a l'équation (35) : $\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$

Or on a : $\frac{d \ln P}{dP} = \frac{1}{P}$, alors : $d \ln P = \frac{dP}{P}$

De meme : $d \ln V = \frac{dV}{V}$

L'équation (35) devient alors : $d \ln P + \gamma d \ln V = 0$

Or $\gamma = C_t^0$, elle ne dépend pas de la température.

D'où on aura : $d(\ln P + \gamma \ln V) = 0$

$$d(\ln P + \ln V^\gamma) = 0$$

$$d \ln(PV^\gamma) = 0$$

Donc : $\ln(PV^\gamma) = C_t^0$

Il vient alors :

$$\text{Exp}(\ln(PV^\gamma)) = \text{Exp}(C_t^0) = C_t^0$$

$$PV^\gamma = C_t^0$$

C'est l'équation de l'adiabatique entre les variables d'état P et V.

S'écrit aussi : $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma = PV^\gamma \quad (36)$

ii-Equation de l'adiabatique entre les variables d'état P et T

D'après l'équation d'état de n moles du gaz parfait : $PV = nRT$

On aura : $V = \frac{nRT}{P}$

Et l'équation (36) devient alors :

$$P \left(\frac{nRT}{P} \right)^\gamma = Ct^0$$

D'où :

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = \frac{Ct}{nR} = Ct^0$$

S'écrit aussi:

$$T_1^\gamma P_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma P_2^{1-\gamma} = T^\gamma P^{1-\gamma} = Ct^0 \quad (37)$$

C'est l'équation de l'adiabatique entre les variables d'état P et T.

iii-Equation de l'adiabatique entre les variables d'état V et T

De meme d'après l'équation d'état de n moles du gaz parfait, on aura :

$$P = \frac{nRT}{V}$$

L'équation (36) devient alors :

$$\frac{nRT}{V} V^\gamma = Ct^0$$

$$TV^{\gamma-1} = \frac{Ct}{nR} = Ct^0$$

D'où l'équation de l'adiabatique entre le variables d'état V et T :

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} = TV^{\gamma-1} = Ct^0 \quad (38)$$

VII-Calorimétrie

a-Capacité Calorifique C_K du Calorimètre

Le calorimètre est initialement vide, on relève sa température initiale T_1 à l'aide du thermomètre.

On verse ensuite, dans le calorimètre, une masse m_e d'eau chauffé à une température T_2 . La chaleur apportée par l'eau chaude va absorbée par le calorimètre. L'équilibre thermique sera atteint lorsque la température à l'intérieur du calorimètre se stabilise à une température d'équilibre finale T_m du mélange (eau + calorimètre).

A pression constante, on a : $H_m = Q$

H_m étant la variation de l'enthalpie du mélange (eau + calorimètre) :

$$\Delta H_m = \Delta H_{\text{eau + calorimètre}} = Q \quad (39)$$

Q étant la chaleur échangée entre le mélange (eau + calorimètre) et le milieu extérieur :

$Q = 0$ car le calorimètre est adiabatique (pas d'échange de chaleur entre le calorimètre et le milieu extérieur).

$$\Delta H_{\text{eau + cal}} = \Delta H_{\text{eau}} + \Delta H_{\text{cal}}$$

Avec :

$$\Delta H_{\text{eau}} = \int_{\text{état initial}}^{\text{état final}} dH_{\text{eau}}$$

$-dH_{\text{eau}}$ étant la variation élémentaire de l'enthalpie de l'eau, donnée par :

$$dH_{\text{eau}} = m_e C_e dT$$

C_e c'est la chaleur massique de l'eau.

D'où la variation totale de l'enthalpie de l'eau :

$$\Delta H_{\text{eau}} = m_e C_e \int_{T_2}^{T_m} dT = m_e C_e (T_m - T_2)$$

-La variation totale de l'enthalpie du calorimètre est :

$$\Delta H_{\text{cal}} = \int_{\text{état initial}}^{\text{état final}} dH_{\text{cal}}$$

Où : dH_{cal} étant la variation élémentaire de l'enthalpie du calorimètre, donnée par :

$$dH_{\text{cal}} = C_k dT$$

La variation totale de l'enthalpie du calorimètre est alors :

$$\Delta H_{\text{cal}} = C_k \int_{T_1}^{T_m} dT = C_k (T_m - T_1)$$

L'équation (39) devient alors:

$$m_e C_e (T_m - T_2) + C_k (T_m - T_1) = 0$$

Donc :

$$C_k = m_e C_e \frac{(T_2 - T_m)}{(T_m - T_1)} \quad (40)$$

b-Chaleur massique C_m d'un solide

On se propose de déterminer la chaleur massique C_m d'un solide par la méthode des mélanges. Cette méthode consiste à introduire un solide chauffé à la température d'ébullition T_2 , dans le calorimètre rempli d'une masse m_e d'eau froide, de température T_1 . La quantité de chaleur apportée par le solide sert à chauffer l'eau du calorimètre d'où augmentation rapide de la température. Au bout d'un certain temps (quelques minutes),

il s'établit l'équilibre thermique ; la température du mélange à l'intérieur du calorimètre atteint la température d'équilibre finale T_m .

A pression constante, on a : $H_m = Q$

Q étant la chaleur échangée entre le mélange (calorimètre + eau + solide) et le milieu extérieur. On a $Q = 0$ car le calorimètre est adiabatique, il n'y a pas d'échange de la chaleur entre le mélange (eau + calorimètre + solide) et le milieu extérieur.

La variation totale de l'enthalpie du mélange s'écrit :

$$\Delta H_m = \Delta H_{\text{eau} + \text{cal} + \text{sol}} = \Delta H_{\text{eau}} + \Delta H_{\text{cal}} + \Delta H_{\text{sol}} = Q \quad (41)$$

- ΔH_{eau} la variation totale de l'enthalpie de l'eau, donnée par :

$$\Delta H_{\text{eau}} = \int_{\text{état initial}}^{\text{état final}} dH_{\text{eau}}$$

Avec :

$$dH_{\text{eau}} = m_e C_e dT$$

D'où :

$$\Delta H_{\text{eau}} = m_e C_e \int_{T_1}^{T_m} dT = m_e C_e (T_m - T_1)$$

- ΔH_{cal} la variation totale de l'enthalpie du calorimètre , donnée par :

$$\Delta H_{\text{cal}} = \int_{\text{état initial}}^{\text{état final}} dH_{\text{cal}} \cdot \text{Avec: } dH_{\text{cal}} = C_K dT$$

D'où:
$$\Delta H_{\text{cal}} = C_K \int_{T_1}^{T_m} dT = C_K (T_m - T_1)$$

- ΔH_{sol} la variation totale de l'enthalpie du solide, donnée par :

$$\Delta H_{\text{sol}} = \int_{\text{état initial}}^{\text{état final}} dH_{\text{sol}} \cdot \text{ Avec : } dH_{\text{sol}} = m_p C_m dT$$

-43-

D'où :
$$\Delta H_{\text{sol}} = m_p C_m \int_{T_2}^{T_m} dT = m_p C_e (T_m - T_2)$$

Où : m_p étant la masse du solide.

L'équation (41) devient alors :

$$m_e C_e (T_m - T_1) + C_K (T_m - T_1) + m_p C_m (T_m - T_2) = 0$$

D'où la chaleur massique C_m du solide :

$$C_m = \left(\frac{m_e C_e + C_K}{m_p} \right) \left(\frac{T_m - T_1}{T_2 - T_m} \right) \quad (42)$$

Dans le polycopie de TP :

On remplace : T_1 par Θ_e ou Θ_1 , T_2 par Θ_2 et T_m par Θ_m , on aura alors :

$$C_K = m_e C_e \frac{(\Theta_e - \Theta_m)}{(\Theta_m - \Theta_1)}$$

et
$$C_m = \left(\frac{m_e C_e + C_K}{m_p} \right) \left(\frac{\Theta_m - T\Theta_1}{\Theta_2 - \Theta_m} \right)$$

Chapitre IV

DEUXIEME PRINCIPE - ENTROPIE (*Principe de l'évolution*)

I-LE Deuxième Principe

I.1 Nécessité d'un deuxième principe

Le **première principe** qui stipule la conservation de l'énergie permet de faire le **bilan d'énergie** des systèmes, sans imposer des conditions sur les types d'échanges possibles. Mais, ce bilan énergétique **ne permet pas de prévoir le sens d'évolution des systèmes**.

Exemple : sens des réactions chimiques ou des transformations naturelles, ou
Le transfert spontané de la chaleur du chaud vers le froid.

Le première principe par son bilan **n'exclut pas** le transfert de la chaleur du froid vers le chaud (ce qui est impossible) et il n'explique pas l'irréversibilité de certaines transformations spontanées ou naturelles.

Il faut donc introduire **un deuxième principe** dit aussi **principe d'évolution**, déduit des faits expérimentaux, qui permettra de prévoir l'évolution des systèmes.

Le deuxième principe introduit une nouvelle fonction d'état dite **entropie S** qui décrit le comportement des systèmes par la **maximisation** de leur entropie :

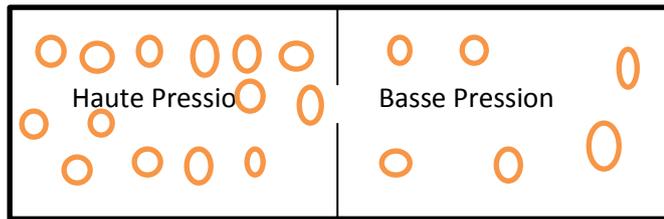
*L'entropie S d'un système **croit** si le système tend vers son équilibre : $\Delta S > 0$

*L'entropie S est **maximum** si le système est en équilibre.

I.2-Transformtion irréversibles

Certaines transformations naturelles sont irréversibles : elles n'évoluent que dans un
Seul sens.

Exemple (1) : la détente d'un gaz, caractérisée par :



Détente irréversible d'un gaz

-L'écoulement brusque du gaz d'une haute température vers basse température

-La détente est spontanée et irréversible

On remarque que :

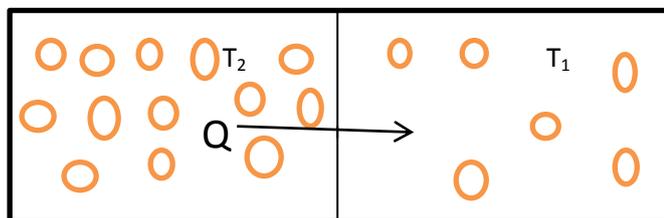
*L'état initial **1** (les deux gaz séparés par un cloison) est relativement **ordonné**, car presque toutes les molécules sont concentrées du côté haute température : cet état est hautement instable.

*Dans l'état final **2**, en perçant un trou dans la cloison, un grand nombre de molécules passent du côté basse température, jusqu'à l'état d'équilibre caractérisé par une Répartition homogène des molécules des deux côtés.

Cet état final **2** est plus **désordonné** (mélange homogène) et surtout cet état est **stable**.

Exemple (2) : le transfert spontané de la chaleur, caractérisé par :

$$T_2 > T_1$$



Transfert de chaleur

-L'écoulement de la chaleur de haute température vers basse température.

-Ce transfert est spontané et irréversible.

*Dans l'état initial (cloison en place), les molécules les plus agitées, sont situées du Côté gauche et les molécules moins agitées, sont situées du côté droit : ceci Correspond à un certain ordre où les molécules de gauche sont séparées des molécules de droite ; c'est un état hors équilibre

*Dans l'état final (cloison enlevée), les molécules plus chaudes (gauche) diffusion vers la droite et communiquent par chocs une partie de leur énergie aux molécules plus froides (droite), pour atteindre finalement un état d'équilibre où les deux régions sont à la même température

*Dans cet état final d'équilibre, les molécules ont en moyenne la même énergie cinétique et le système est caractérisé par un plus **grand désordre**.

Ces **processus naturels** sont **irréversibles** et respectent le premier principe (énergie conservée), comme d'ailleurs les processus inverses qui sont impossibles. Le premier principe n'exclut donc pas ces transformations inverses ; mais, il n'explique pas leur sens privilégié et donc leur irréversibilité.

On a vu dans les deux exemples précédents que les **systèmes évoluent** vers un **plus grand** désordre pour atteindre un état final stable ou état d'équilibre :

⇒ **Les transformations irréversibles** sont **spontanées** et elles **satisfont à la Règle d'augmentation de l'entropie** des systèmes, qui prend sa valeur maximale à l'équilibre.

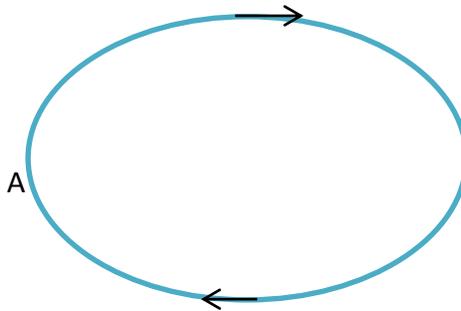
***Le premier principe** considère toutes les transformations comme possibles : il ne Tient pas compte du caractère irréversible d'une transformation et ne se prononce pas sur la **notion d'irréversibilité** des transformations spontanées. Il **exclut le mouvement perpétuel de première espèce** c'est-à-dire qu'on ne peut

Indéfiniment Fournir que de l'énergie sous une certaine forme sans en consommer ailleurs sous une autre forme.

*Le deuxième principe va définir le sens privilégié suivant lequel les transformations peuvent se dérouler et préciser les conditions d'équilibre du système. C'est un postulat basé sur des observations expérimentales.

1.3-Enoncé de Kelvin

Avec une seule source de chaleur, un système thermodynamique qui effectue un cycle de transformations (cycle monotherme) se trouve incapable de céder du travail au milieu extérieur. Il en résulte qu'il est impossible de réaliser une machine motrice monotherme.



Cycle monotherme (en présence d'une seule source de Chaleur).

Alors on aura : $W > 0$.

D'après le première principe : $\Delta U_{\text{Cycle}} = W + Q = 0$

Donc : $Q = -W$ et $Q < 0$.

Par conséquent, au cours d'un cycle monotherme, il n'est possible que la transformation du travail en chaleur.

I.4-Enoncé de Carnot

La production du travail cyclique s'accompagne nécessairement du passage d'une certaine quantité de chaleur d'une source chaude vers une source froide, par l'intermédiaire d'un agent thermique.

Donc, pour produire du travail, il est nécessaire de disposer deux sources de chaleur.

I.5-Enoncé de Clausius

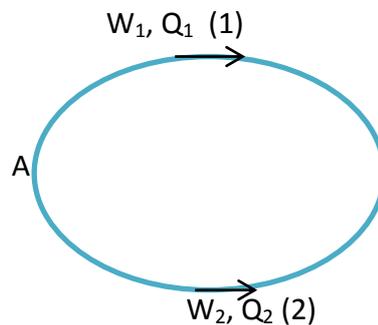
La chaleur ne peut passer spontanément d'un corps froid à un corps chaud.

Cela veut dire que le passage de la chaleur d'un corps froid à un corps chaud nécessite une dépense de travail.

II-Cycle monotherme

II.1-Cycle monotherme réversible

Considérons un système thermodynamique effectue un cycle de transformations réversibles en présence d'une seule source de chaleur.



-Transformation (1) : Cycle monotherme

Enoncé de Kelvin : $W_1 > 0$, $Q_1 < 0$

-Transformation (2) : Cycle monotherme

Enoncé de Kelvin : $W_2 > 0$, $Q_2 < 0$

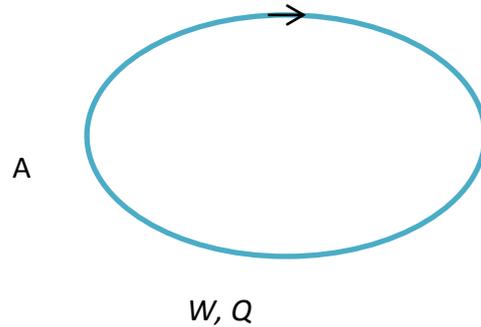
Or pour le cycle réversible, on a : $W_1 = - W_2$ et $Q_1 = - Q_2$

Donc pour un cycle monotherme réversible on aura : $W_1 = W_2$ et $Q_1 = Q_2$

II.2-Cycle monotherme irréversible

Puisque c'est un cycle monotherme, d'où l'énoncé de Kelvin : $W > 0$ et $Q < 0$

L'égalité est satisfaite pour un cycle réversible monotherme . Donc pour un cycle monotherme irréversible, on a : $W > 0$ et $Q < 0$



III-Cycle ditherme

C'est un cycle au cours de quel, le système thermodynamique en évolution, Echange de la chaleur avec deux sources de chaleur distinctes.

Une chaude, notée S.C (Source Chaude), de température T_1 , l'autre froide, notée S.F (Source Froide), de température T_2 , ($T_2 < T_1$).

Le cycle diatherme peut être moteur ou récepteur, produisant ou recevant du travail.

III.1-Cycle de Carnot d'un gaz parfait

(cycle réversible)

On dit qu'un système thermodynamique parcourant un cycle de Carnot (cycle diatherme) lorsqu'il n'échange de la chaleur qu'avec deux sources de la chaleur et que toutes les transformations sont réversibles.

Supposons qu'un gaz parfait parcourant un tel cycle de transformations réversibles dans le sens de l'aiguille d'une montre. Ce gaz est en contact avec une à la température T_1 et une source froide (S.F) à la température T_2 .

-Le cycle de Carnot est constitué de quatre transformations suivantes :

a-Transformation AB : Détente isotherme qui ramène le gaz de l'état initial

$A(P_A, V_A, T_A = T_1)$ à l'état $B(P_B, V_B, T_B = T_A = T_1)$.

-b-Transformation BC : Détente adiabatique ramène le gaz de l'état B à l'état

$$C(P_C, V_C, T_C = T_2).$$

c-Transformation CD : Compression isotherme ramène le gaz de l'état C à l'état

$$D(P_D, V_D, T_D = T_C = T_2).$$

d-Transformation DA : Compression adiabatique ramène le gaz de l'état D à l'état initial A.

1-Diagramme de Clapyron du cycle de Carnot

Le diagramme de Clapyron c'est la représentation graphique du cycle de transformations dans le plan (P,V).

a-Transformation AB : Détente isotherme de l'état A($P_A, V_A, T_A = T_1$) à l'état

$$B(P_B, V_B, T_B = T_A = T_1).$$

Notons que : Au cours d'une détente, on aura :

i-Augmentation de volume : $V_B > V_A$

ii-Diminution de pression : $P_B < P_A$

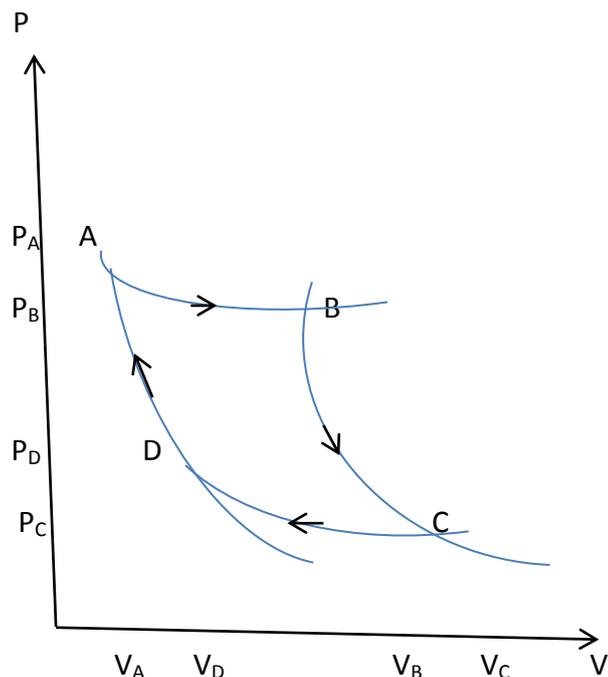
b-Transformation BC : Détente adiabatique, d'où : $V_C > V_B$ et $P_C < P_B$

c-Transformation CD : Compression isotherme. Au cours d'une compression, on aura :

i-Augmentation de pression : $P_D > P_C$

ii-Diminution de volume : $V_D < V_C$.

D(où le diagramme de Clapyron :



2-Calcul du travail total W et chaleur échangés entre le gaz parfait et le milieu

extérieur au cours du cycle

a-Transformation AB : Détente isotherme du gaz parfait :

$$(T = T_A = T_B = T_1 = Ct^0).$$

I-le travail W_{AB} échangé au cours la transformation AB

On a : $W_{AB} = - PdV$

Alors : $W_{AB} = \int_A^B \delta W = - \int_{V_A}^{V_B} P dV$

La pression P est donnée par l'équation d'état du gaz parfait : $PV = nRT$.

$$P = \frac{nRT}{V}$$

Or on a : $T = T_A = T_B = T_1 = Ct^0$, Transformation considérée est isotherme.

D'où : $W_{AB} = - nRT_1 \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = - nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

-L'expression du travail en fonction de pression :

On utilise l'équation d'état du gaz parfait de :

-L'état A : $P_A V_A = nRT_A$

-L'état B : $P_B V_B = nRT_B$

Or, on a : $T_A = T_B = T_1 = Ct^0$, D'où : $P_A V_A = P_B V_B$ et $\frac{V_B}{V_A} = \frac{P_A}{P_B}$

Donc : $W_{AB} = - nRT_1 \ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right)$ (1)

ii-la chaleur $Q_1 = Q_{AB}$ échangée au cours la transformation AB

D'après le première principe de la thermodynamique, on a :

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB}$$

Et le première loi du Joule du gaz parfait: $U = U(T)$, l'énergie interne d'un gaz parfait dépend uniquement de la température T .

Alors, si $T = T^0$, on aura : $U(T = T^0) = U(T^0)$

c-à-d : $U_A = U_B$, où : $U_A = U(T = T_A)$ et $U_B = U(T = T_B)$

U_A, U_B sont respectivement l'énergie interne de l'état A et B.

D'où, on aura : $\Delta U_{AB} = \int_{U_A}^{U_B} dU = U_B - U_A = 0$

Donc : $Q_1 = Q_{AB} = -W_{AB} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT_1 \ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right)$ (2)

Or, on a : $P_A > P_B$.

D'où : $\frac{P_A}{P_B} > 1$ et $\ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right) > 0$

Donc : $Q_1 > 0$, c'est la chaleur cédée, au cours du cycle, au gaz parfait par la source chaude, de température T_1 .

b-Transformation BC : Détente adiabatique du gaz parfait

i-La chaleur Q_{BC} échangée au cours de la transformation BC

La transformation BC est adiabatique, alors on aura : $Q_{BC} = 0$. Pas d'échange de la chaleur entre le gaz et le milieu extérieur au cours d'une transformation adiabatique.

ii-Le travail W_{BC} échangé au cours de la transformation BC

D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC}$$

Où : $Q_{BC} = 0$

D'où : $W_{BC} = \Delta U_{BC} = \int_B^C dU$, avec : $dU = nC_{MV} dT$

Il vient alors :

$$W_{BC} = nC_{MV} \int_{T_B=T_1}^{T_C=T_2} dT = nC_{MV} (T_2 - T_1)$$
 (3)

c-Transformation CD : Compression isotherme du gaz parfait

i-Travail W_{CD} et la chaleur $Q_2 = Q_{CD}$ échangé au cours la transformation CD isotherme

D'où, par le meme calcul, on aura :

$$W_{CD} = - nRT_2 \int_{V_C}^{V_D} \frac{dV}{V} = - nRT_2 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = - nRT_2 \ln\left(\frac{P_C}{P_D}\right) \quad (4)$$

$$Q_2 = Q_{CD} = - W_{CD} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = nRT_2 \ln\left(\frac{P_C}{P_D}\right) \quad (5)$$

Or, on a : $P_C < P_D$

D'où on aura : $\frac{P_C}{P_D} < 1$ et $\ln\left(\frac{P_C}{P_D}\right) < 0$

Donc, on aura : $Q_2 < 0$, c'est la chaleur cédée, au cours du cycle, par le gaz parfait à la source froide de température T_2 .

d-Transformation DA : Compression adiabatique du gaz parfait.

D'où : $Q_{DA} = 0$

D'après le première principe de la thermodynamique, on aura :

$$\Delta U_{DA} = W_{DA} + Q_{DA} = W_{DA}$$

Où : $W_{DA} = \Delta U_{DA} = \int_D^A dU$, avec : $dU = nC_{MV} dT$

$$\text{Donc : } W_{DA} = nC_{MV} \int_{T_D=T_2}^{T_A=T_1} dT = nC_{MV} (T_1 - T_2) \quad (6)$$

-L'expression du travail total W échangé au cours du cycle

On a : Le cycle = Transf AB + Transf BC + Transf CD + Transf DA

D'où : $W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$

On remplace les équations (1), (3), (4) et (6), on aura :

$$W = -nRT_1 \ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right) + nC_{MV}(T_2 - T_1) - nRT_2 \ln\left(\frac{P_C}{P_D}\right) + nC_{MV}(T_1 - T_2)$$

$$\text{Donc : } W = - nR \left[T_1 \ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right) + T_2 \ln\left(\frac{P_C}{P_D}\right) \right] \quad (7)$$

-Etudiant le signe de W

On utilise l'équation de l'adiabatique entre les variables d'état P et T suivantes :

i-Transformation BC adiabatique

$$\begin{aligned}
 T_B^\gamma P_B^{1-\gamma} &= T_C^\gamma P_C^{1-\gamma} \\
 T_1^\gamma P_B^{1-\gamma} &= T_2^\gamma P_C^{1-\gamma} \quad (8)
 \end{aligned}$$

ii-Transformation DA adiabatique

$$\begin{aligned}
 T_A^\gamma P_A^{1-\gamma} &= T_D^\gamma P_D^{1-\gamma} \\
 T_1^\gamma P_A^{1-\gamma} &= T_2^\gamma P_D^{1-\gamma} \quad (9)
 \end{aligned}$$

On divise membre à membre les équation (8) et (9), on aura :

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{P_D}{P_C}, \text{ alors : } \frac{P_C}{P_D} = \frac{P_B}{P_A} \quad (10)$$

Donc l'équation (7) devient :

$$W = - nR \left[T_1 \ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right) + T_2 \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right) \right]$$

$$W = - nR \ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right) (T_1 - T_2)$$

$$\text{Or, on a : } P_A > P_B, \frac{P_A}{P_B} > 1, \ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right) > 0 \text{ et } T_1 > T_2$$

D'où : $W < 0$

Donc, au cours du cycle, le gaz parfait cède du travail au milieu extérieur.

Par conséquent :

-La chaleur totale Q échangée, au cours du cycle, entre le gaz parfait et le milieu extérieur est donnée par :

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

D'après le première principe de la thermodynamique, on a :

$$\Delta U_{\text{Cycle}} = W + Q$$

Où : $U_{\text{Cycle}} = 0$

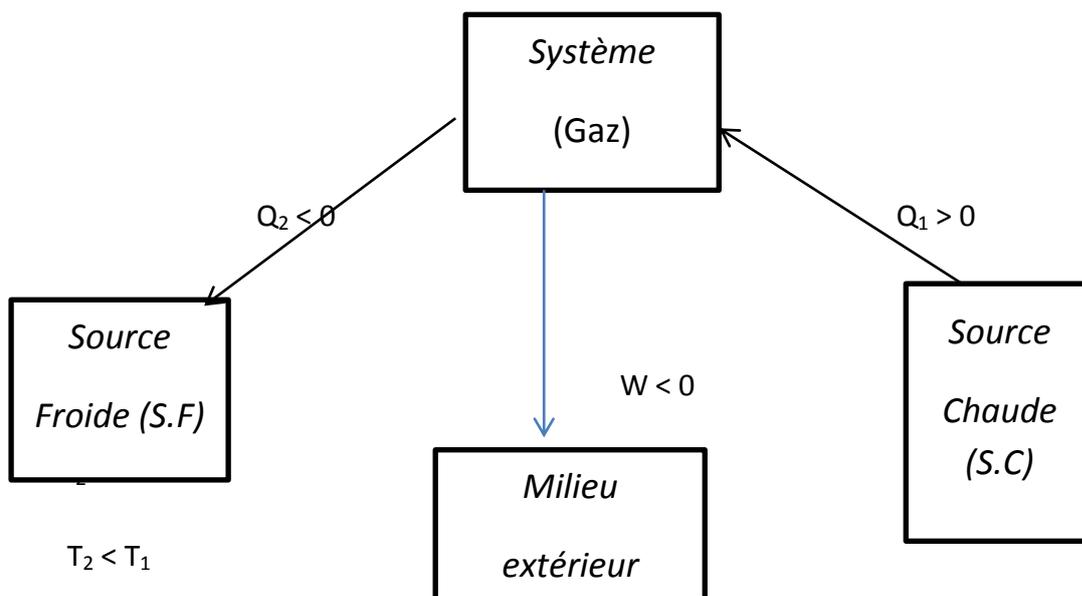
Donc, on aura : $W = -Q = -(Q_1 + Q_2)$

Où : $W < 0$, $Q_1 > 0$ et $Q_2 < 0$

Un tel système thermodynamique fonctionnant suivant ce cycle de Carnot constitue un moteur. Le cycle est appelé cycle moteur ditherme. En effet, au cours du cycle moteur ditherme, le gaz parfait transforme une partie de la chaleur $Q_1 > 0$, reçue de part de la source chaude, en travail $W < 0$ fournit au milieu extérieur et cède le reste à la source froide sous forme de chaleur

$$Q_2 < 0.$$

-Schéma de fonctionnement du cycle moteur



- Il existe un autre type de cycle diatherme appelé cycle diatherme récepteur.

Exemples : -Réfrigérateur

-Pompe à chaleur

-Identité de Carnot

D'après les équations de l'adiabatique entre les variables P et T, on a l'équation(10) :

$$\frac{PC}{PD} = \frac{PB}{PA}$$

D'autre part, on a : $Q_1 = nRT_1 \ln\left(\frac{PA}{PB}\right)$ et $Q_2 = nRT_2 \ln\left(\frac{PC}{PD}\right)$

D'où : $\frac{Q_2}{T_2} = nR \ln\left(\frac{PC}{PD}\right)$

D'après l'équation(10), on aura alors :

$$\frac{Q_2}{T_2} = nR \ln\left(\frac{PB}{PA}\right) = -nR \ln\left(\frac{PA}{PB}\right)$$

Or : $nR \ln\left(\frac{PA}{PB}\right) = \frac{Q_1}{T_1}$

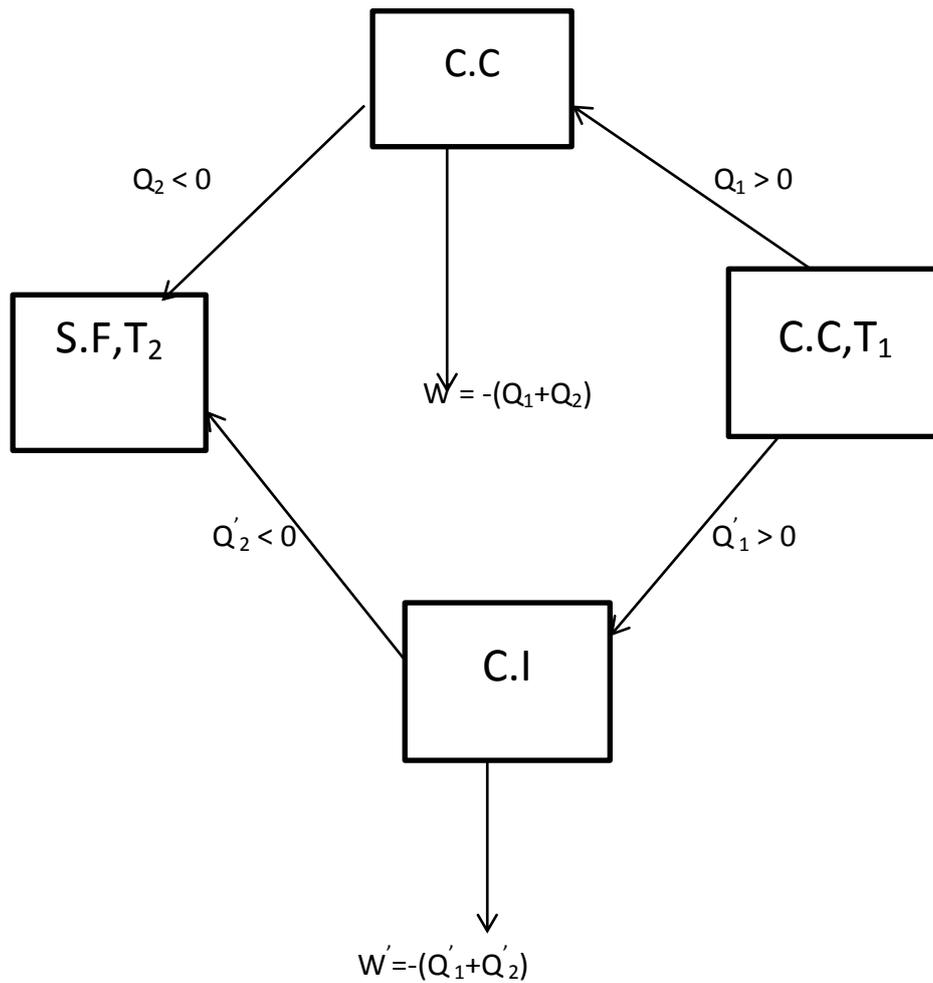
Donc, aura : $\frac{Q_2}{T_2} = -\frac{Q_1}{T_1}$

D'où l'Identité de Carnot suivante : $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = 0$ (11)

III.2-Cas d'un cycle irréversible

-L'inégalité de Clausius

Considérons deux cycles moteur diatherme, l'un est le cycle de Carnot, noté C.C et l'autre est un cycle de transformations irréversibles, noté C.I, fonctionnant tous les deux entre les mêmes sources de la chaleur. La S.C de température T_1 et la S.F de température T_2 .



Notons que l'ensemble de ces deux cycles constitue un système (C.C + C.I).

-Le système (C.C + C.I) échange avec la source froide la quantité de chaleur :

$$Q_2 = Q_2 + Q'_2$$

Et avec la source chaude la quantité de chaleur :

$$Q_1 = Q_1 + Q'_1$$

D'après le première principe, on a :

$$\Delta U_{\text{Cycle}} = W_{\text{Total}} + Q_1 + Q_2$$

C'est la variation de l'énergie interne du système au cours du cycle et W_{Total} est le travail total échangé entre le système et le milieu extérieur.

Comme C.C est cycle réversible, on l'inverse en un cycle tel que :

$$Q_2 = - Q'_2$$

Donc, la chaleur totale $Q_2 = Q_2 + Q'_2$ s'annule : $Q_2 = 0$.

Tous se passe, comme si le système (C.C+C.I) étant en contact thermique avec une seule source de chaleur. Alors le système (C.C+C.I) effectué un cycle montherme irréversible.

D'après l'énoncé de Kelvin, on aura :

$$W_{\text{Total}} > 0 \quad \text{et} \quad Q_1 < 0$$

D'où :

$$Q_1 = Q_1 + Q'_1 < 0 \quad (12)$$

Comme :

$$Q_2 = - Q'_2$$

L'Identité de Carnot :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Donne :

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q'_2}{T_2} = 0$$

Donc :

$$Q_1 = \frac{T_1}{T_2} Q'_2 \quad (13)$$

En remplaçant l'équation (13) dans l'équation (12), on obtient alors :

$$\frac{T_1}{T_2} Q'_2 + Q'_1 < 0$$

-60-

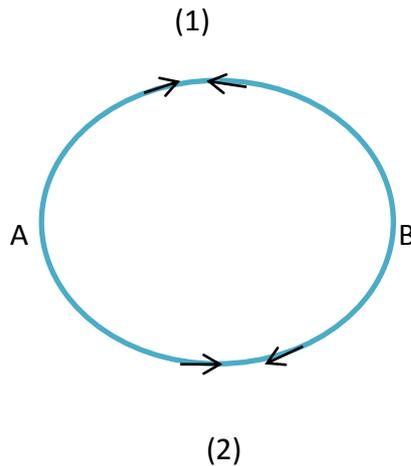
D'où, l'Inégalité de Clausius pour un cycle irréversible :

$$\frac{Q'_1}{T_1} + \frac{Q'_2}{T_2} < 0 \quad (14)$$

IV-Entropie d'un système thermodynamique

IV.1-Cas d'une transformation réversible

Soit un système thermodynamique pouvant passer de l'état initial A à l'état final B par deux différents chemins réversibles (1) et (2)



D'où : A1B2A est un cycle réversible.

Supposons que ce système thermodynamique échange la quantité de la chaleur élémentaire δQ avec la source de la chaleur de température T variable d'une façon continue et que ce système thermodynamique décrit un cycle de transformations réversibles.

Alors, l'identité généralisée de Carnot s'écrit :

$$\int_{A1B2A} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

D'où :

$$\int_{A1}^B \frac{\delta Q}{T} + \int_{B2}^A \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Il vient alors :

$$\int_{A1}^B \frac{\delta Q}{T} = - \int_{B2}^A \frac{\delta Q}{T}$$

Donc, on aura :

$$\int_{A1}^B \frac{\delta Q}{T} = \int_A^{2B} \frac{\delta Q}{T}$$

Ce qui montre que la quantité $\int \frac{\delta Q}{T}$ est une fonction d'état, car elle ne dépend pas du chemin suivi pour passer de l'état initial A à l'état final B.

Définition

L'entropie, notée S , d'un système thermodynamique est une fonction d'état définie à une constante près pour une transformation réversible par :

$$\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$$

Où, ΔS étant la variation de l'entropie du système thermodynamique au cours de la transformation réversible considérée.

L'entropie mesure le désordre du système thermodynamique.

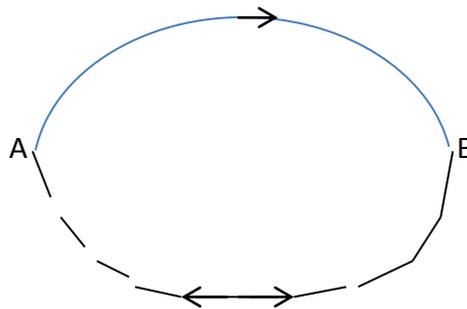
-Pour une transformation réversible élémentaire, la variation élémentaire de l'entropie s'écrit :

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Son unité est le J/K.

IV.2-Cas d'une transformation irréversible

Soit un système thermodynamique passe de l'état initial A à l'état final B par une transformation irréversible. (1)



(2)

On forme un cycle irréversible A1B2A par une transformation réversible A2B.

L'Inégalité généralisée de Clausius s'écrit :

$$\int_{A1B2A} \frac{\delta Q}{T} < 0$$

Alors :

$$\left(\int_{A1}^B \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{Irréversible}} + \left(\int_{B2}^A \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{Réversible}} < 0$$

Il vient :

$$\left(\int_{A1}^B \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{Irréversible}} < - \left(\int_{B2}^A \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{Réversible}}$$

Donc :
$$\left(\int_{A1}^B \frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{Irréversible}} < \left(\int_A^{2B} \frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{Réversible}}$$

Où :
$$\left(\int_A^{2B} \frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{Réversible}} = \Delta S = S_B - S_A$$

Donc :
$$\Delta S = S_B - S_A > \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$$

-58-

S étant la variation de l'entropie d'un système thermodynamique subit une transformation irréversible.

-Pour une transformation irréversible élémentaire, la variation élémentaire de

l'entropie est :
$$dS > \frac{\delta Q}{T}$$

IV.3-Entropie d'un gaz parfait

Considérons un gaz parfait subit une transformation réversible. Son entropie élémentaire s'écrit :
$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Où :
$$\delta Q = nC_{MV}dT + PdV$$

Pour un gaz parfait, on a : $P = P$

D'où :
$$\delta Q = nC_{MV}dT + PdV$$

Donc, on aura :
$$dS = nC_{MV} \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV$$

D'après l'équation d'état du gaz parfait : $PV = nRT$

Alors :
$$\frac{P}{T} = \frac{nR}{V}$$

Il vient alors :
$$dS = nC_{MV} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

On a deux cas :

-Première cas : C_{MV} dépend de la température T, $C_{MV} = C_{MV}(T)$.

D'où :
$$\Delta S = \int dS = \int C_{MV} \frac{dT}{T} + nR \int \frac{dV}{V} + Ct^0$$

Donc :
$$\Delta S = \int dS = \int C_{MV} \frac{dT}{T} + nR \ln(V) + Ct^0$$

-75-

-Deuxième cas: C_{MV} ne dépend pas de la température, $C_{MV} = C^0$.

On aura alors :
$$\Delta S = nC_{MV} \int \frac{dT}{T} + nR \int \frac{dV}{V} + C^0$$

Donc :
$$\Delta S = nC_{MV} \ln(T) + nR \ln(V) + C^0$$

Or, d'après la relation de Mayer :

$C_{MP} - C_{MV} = R$, alors : $R = C_{MV} (C_{MP}/C_{MV} - 1) = C_{MV}(\gamma - 1)$

D'où, on aura :
$$\Delta S = nC_{MV} \ln(T) + nC_{MV}(\gamma - 1) \ln(V) + C^0$$

$$\Delta S = nC_{MV} [\ln(T) + \ln(V^{\gamma-1})] + C^0$$

Donc :
$$\Delta S = nC_{MV} \ln(TV^{\gamma-1}) + C^0$$

V-Rendement d'une machine thermique

V-1-Rendement d'un moteur

a-Définition

On appelle rendement d'un moteur le rapport de la valeur absolue du travail W fournit par le système thermodynamique et la chaleur Q_1 reçue par le système de la part de la source chaude.

$$r = \frac{|W|}{Q_1} \quad (15)$$

-L'expression de du rendement r en fonction de la chaleur Q_1 et Q_2

Considérons un système thermodynamique fonctionne suivant un cycle diatherme , échange la quantité de chaleur Q_1 avec la source chaude , de température T_1 et la quantité de chaleur Q_2 avec la source froide, de température T_2 .

D'après le première principe, on a: $\Delta U_{\text{Cycle}} = W + Q_1 + Q_2$

Où : $\Delta U_{\text{Cycle}} = 0$

D'où : $W = - (Q_1 + Q_2)$

Le rendement devient alors :

$$r = \frac{|W|}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}$$

Donc :

$$r = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \quad (16)$$

Où : $Q_1 > 0$ étant la chaleur reçue par le système thermodynamique de la part de la source chaude.

$Q_2 < 0$ La chaleur fournit par le système à la source froide.

b-Cas d'un cycle moteur réversible (Cycle de Carnot)

-L'expression de r en fonction des températures T_1 et T_2

Comme le cycle fonctionne suivant le cycle de Carnot, on utilise alors l'identité de

Carnot suivante :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

D'où, on aura :

$$\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}$$

Donc, le rendement devient :

$$r = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (17)$$

c-Cas d'un cycle irréversible

Dans ce cas le système thermodynamique fonctionne suivant le cycle diatherme de façon irréversible. D'après l'Inégalité de Clausius suivante :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$$

D'où, on aura :

$$\frac{Q_2}{Q_1} < -\frac{T_2}{T_1}$$

et :

$$1 + \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Or, on a : $r_{\text{réversible}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ Rendement d'un moteur réversible.

et : $r_{\text{irréversible}} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$ Rendement d'un moteur irréversible.

Donc : $r_{\text{irréversible}} < r_{\text{réversible}}$

Théorème de Carnot

Le rendement d'un moteur fonctionne de façon irréversible entre deux sources de chaleur est inférieur à celui d'un moteur réversible fonctionne entre ces deux même sources de chaleur.

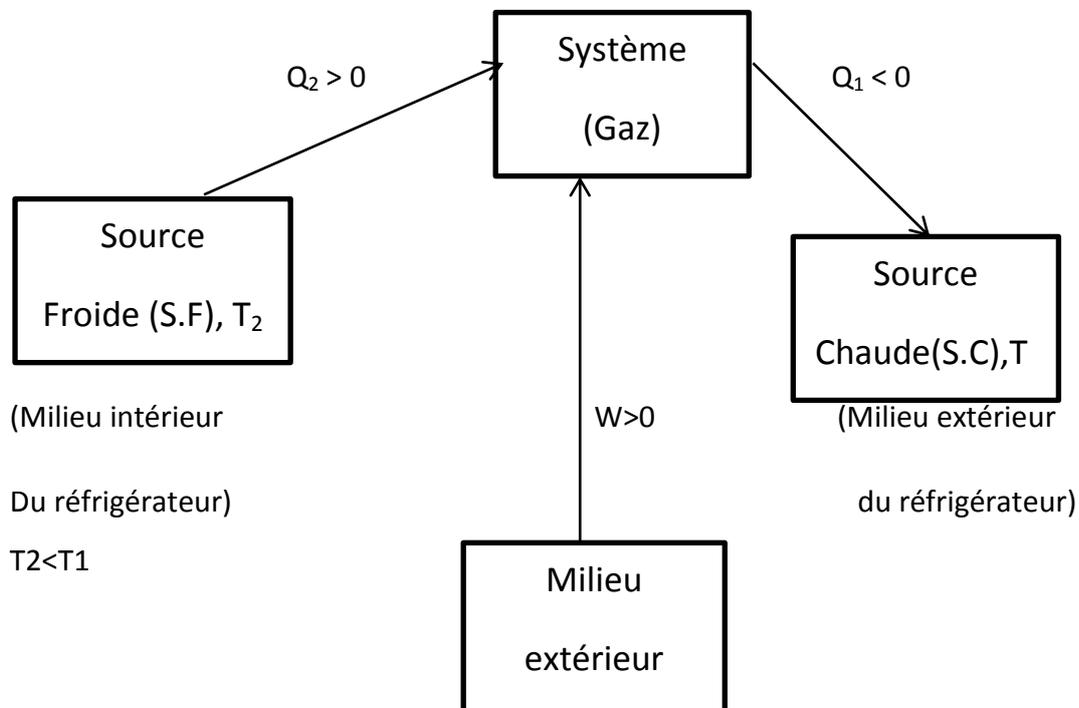
V.2-Efficacité d'une machine réceptrice

V.2.1-Réfrigérateur

a-Définition

Un réfrigérateur est une machine réceptrice, reçoit du milieu extérieur le travail W , pour faire passer la chaleur de la source froide (Milieu intérieur du réfrigérateur) à la source chaude (Milieu extérieur du réfrigérateur).

b-Schéma de fonctionnement d' un réfrigérateur



c-Efficacité d'un réfrigérateur

Par définition, l'efficacité du réfrigérateur, notée e_F , est le rapport entre la quantité de chaleur Q_2 , reçue par le système thermodynamique de la part de la source froide et le travail W fournit par le milieu extérieur (Compresseur) au système thermodynamique.

$$e_F = \frac{Q_2}{W} \quad (18)$$

-Expression de e_F en fonction de Q_1 et Q_2

D'après le première principe, on a : $\Delta U_{\text{Cycle}} = W + Q_1 + Q_2$

Or : $\Delta U_{\text{Cycle}} = 0$

D'où : $W = - (Q_1 + Q_2)$

Donc, l'efficacité devient : $e_F = - \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2}$

et : $\frac{1}{e} = - 1 - \frac{Q_1}{Q_2} \quad (19)$

-62-

-Cas d'un réfrigérateur réversible

(Cycle de Carnot)

On utilise l'identité de Carnot suivante : $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$

Alors : $\frac{Q_1}{Q_2} = - \frac{T_1}{T_2}$

L'équation (19) devient alors : $\frac{1}{e} = - 1 + \frac{T_1}{T_2}$

Donc : $e_{F,,\text{Réversible}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (20)$

Pour un cycle réversible, l'efficacité est maximale.

-79-

ii-Cas d'un réfrigérateur irréversible

Le système thermodynamique considéré fonctionne suivant le cycle diatherme récepteur irréversible entre les mêmes sources de chaleur.

D'après l'Inégalité de Clausius suivante : $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$

On aura : $\frac{Q_1}{Q_2} > -\frac{T_1}{T_2}$

Il vient alors : $\frac{1}{e} = -1 - \frac{Q_1}{Q_2} > -1 + \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{e}$

Donc : $e_{F, \text{Irréversible}} < e_{F, \text{Réversible}}$

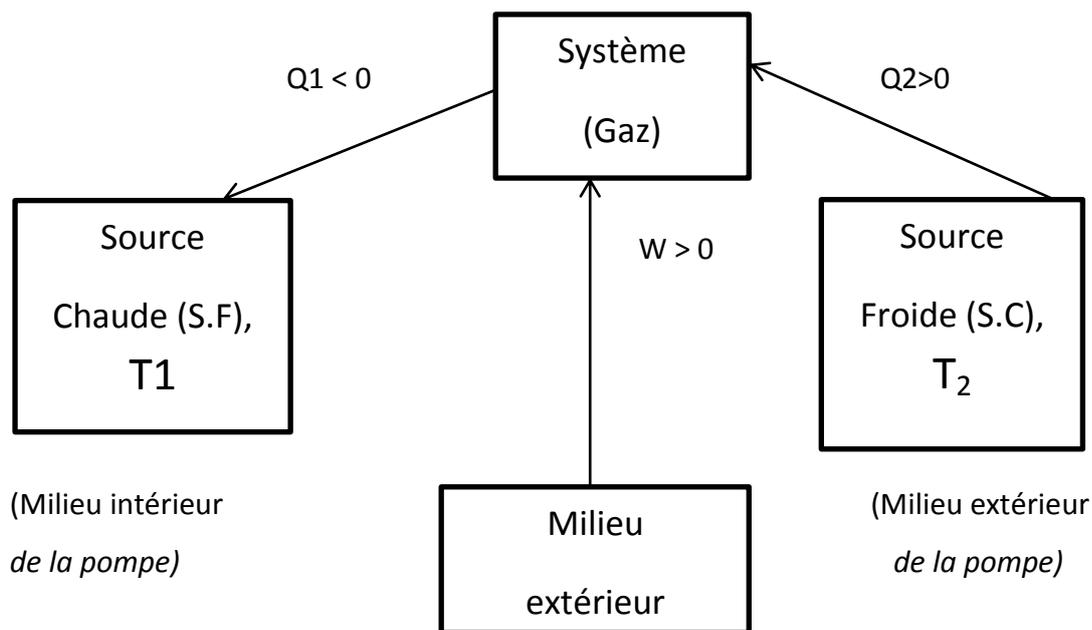
V.2.2-Pompe à chaleur

a-Définition

La pompe à chaleur est machine réceptrice , utilise le travail W reçu du milieu extérieur pour apporter la chaleur de la source froide (Milieu extérieur de la pompe à chaleur) à la source chaude (Milieu intérieur de la pompe à chaleur).

-68-

b-Schéma de fonctionnement de la pompe à chaleur



-80-

c-Efficacité de la pompe à chaleur

L'efficacité de la pompe à chaleur est le rapport entre la quantité de chaleur Q_1 ,
cédée par la pompe à chaleur à la source chaude et le travail W reçu par système
thermodynamique du milieu extérieur.

$$e_p = - \frac{Q_1}{W} \quad (21)$$

i-Expression de e_p en fonction de Q_1 et Q_2

D'après le première principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_{\text{Cycle}} = W + Q_1 + Q_2$$

On aura : $W = - (Q_1 + Q_2)$

L'efficacité devient alors : $e_p = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2}$

Alors : $\frac{1}{e} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \quad (22)$

i-Cas d'une pompe à chaleur réversible

(Cycle de Carnot)

D'après l'Identité de Carnot : $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$

On aura : $\frac{Q_2}{Q_1} = - \frac{T_2}{T_1}$

Il vient alors : $\frac{1}{e} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

Donc : $e_p = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (23)$

L'efficacité est maximale pour les cycles de Carnot (Cycle de transformations réversibles).

ii-Cas d'une pompe à chaleur irréversible

Le système thermodynamique considéré fonctionne suivant le cycle ditherme récepteur
irréversible entre les mêmes sources de chaleur.

D'après l'Inégalité de Clausius suivante : $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$

On aura : $\frac{Q_2}{Q_1} > - \frac{T_2}{T_1}$

Il vient alors : $\frac{1}{e} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} > 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{e}$

Donc : $e_{p, \text{Irréversible}} < e_{p, \text{Réversible}}$

II-MECANIQUE DES FLUIDES

CHAPITRE-I-

STATIQUE DES FLUIDES

Ce chapitre est consacré à l'étude des fluides au repos. Les lois et théorèmes fondamentaux en statique des fluides y sont énoncés. La notion de la pression, la relation fondamentale de l'hydrostatique, la résultante volumique des forces de pression et l'équation fondamentale de la statique des fluides sont expliqués.

I-Définitions

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formée d'un grand nombre de particules matérielles, Très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres, C'est donc un milieu continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Les forces de cohésion entre particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient, par exemple : les métaux en fusion sont des fluides qui permettent par moulage d'obtenir des pièces brutes de formes complexes.

I.1 Fluides parfait

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait, s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement.

I.2-Fluides incompressibles

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse Donnée du fluide ne varié pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés des fluides incompressibles (Eau, huile,...)

I.3-Masse volumique

La masse volumique, notée ρ , donnée par la relation suivante :

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (1)$$

Où : dV C'est l'élément de volume du fluide incompressible homogène
 dm étant la masse élémentaire du fluide occupant l'élément de volume.

L'unité de la masse volumique est le Kg/m^3 .

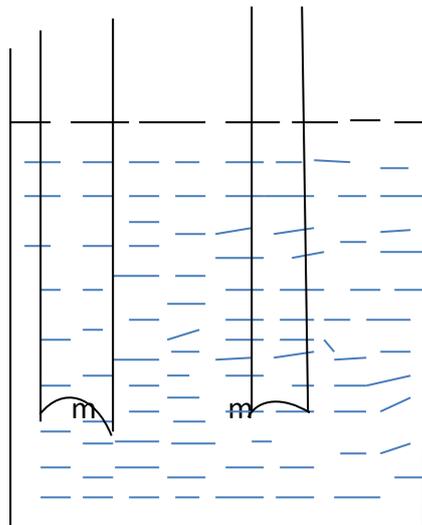
Pour un fluide incompressible, on a :

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{m}{V} = \text{Ct}^0 \quad (2)$$

m c'est la masse totale du fluide occupant le volume V.

1.4-Pression dans un fluide au repos

A l'aide d'une capsule dite monomètre, comme le montre la figure ci-contre, il est aisé de mettre en évidence l'action du fluide sur la membrane (m). Il en résulte une déformation de la membrane. La déformation de la membrane augmente avec la profondeur.



De façon macroscopique, on constate qu'un fluide au repos exerce une force dF_p perpendiculaire à chaque élément de surface dS du récipient. Cette force est appelée

force de pression, définit par la relation suivante :

$$\vec{dF}_p = - P d\vec{S}$$

Si on définit le vecteur unitaire normal \vec{n} à l'élément de surface dS orienté vers le fluide,

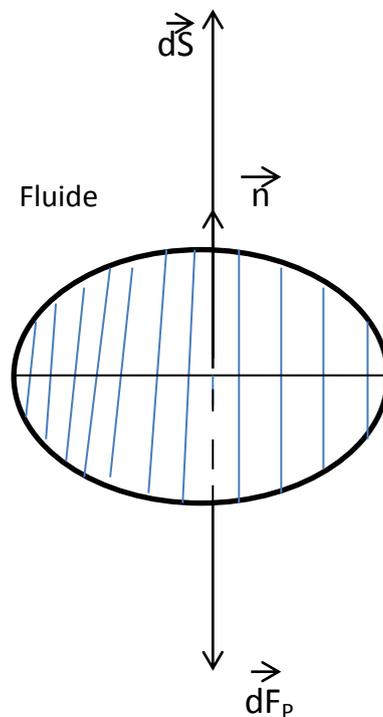
on aura : $\vec{dS} = dS \vec{n}$

\vec{dS} étant le vecteur élément de surface.

D'où, la force de pression devient :

$$\vec{dF}_p = - PdS \vec{n} \quad (3)$$

la relation (3) indique que l'effort exercé par le fluide est dirigé selon le vecteur normal \vec{n} et le signe « moins » montre qu'il est compressif (c'est-à-dire que le fluide « appuie » sur l'élément de surface dS).



P étant la pression au point $M(x,y,z)$ de coordonnées x,y et z , définit par la

Relation suivante :

$$P(x, y, z) = \frac{dF}{dS} \quad (4)$$

II-Relation Fondamentale de l'Hydrostatique(R.F.H)

Considérons un élément de volume dV d'un fluide incompressible, homogène de masse volumique constante ρ . Cet élément de volume est considéré à la forme d'un cylindre d'axe (G, u) , où G étant le centre du cylindre et u le vecteur unitaire porté par l'axe du cylindre. L'axe du cylindre fait un angle α avec l'axe vertical (OZ) d'un repère $R(OXYZ)$.

On désigne par h la hauteur du cylindre et dS sa section droite.

Soient G_1 d'altitude Z_1 (Z_1 étant la coordonnée du centre G_1 sur l'axe OZ)

et G_2 d'altitude Z_2 (Z_2 étant la coordonnée du centre G_2 sur l'axe OZ) les centres

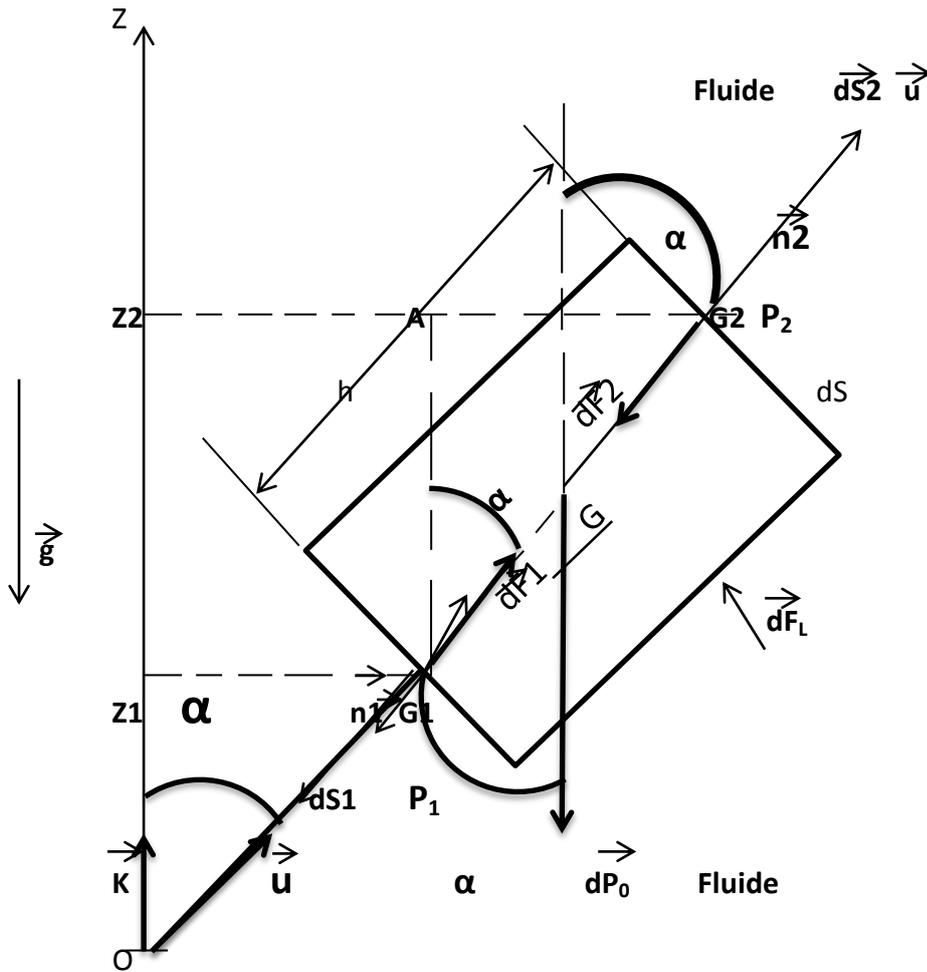
respectives des sections droites dS_1 et dS_2 , telle que $dS_1 = dS_2 = dS$

-Étudions l'équilibre du cylindre élémentaire.

Le cylindre élémentaire étant en équilibre dans le fluide au repos, alors la résultante

(la somme) des forces extérieures appliquées sur le cylindre élémentaire est nulle :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}.$$



Bilan des forces

Le cylindre élémentaire est soumis à :

i- L'action à distance : Son poids $\vec{dP}_0 = dm\vec{g}$

Où : \vec{g} étant l'accélération de pesanteur dirigée vers le bas : $\vec{g} = -g\vec{k}$

dm: La masse élémentaire du cylindre élémentaire.

Or, on a : $\rho = \frac{dm}{dV}$, d'où: $dm = \rho dV$

dV : le volume élémentaire du cylindre élémentaire de hauteur h et de section

droite dS donné par : $dV = hdS$.

Le poids du cylindre élémentaire devient alors :

$$\vec{dP}_0 = - \rho h dS \vec{k} \quad (5)$$

ii- L'action de contact : Forces de pression s'exerçant par le fluide sur :

-La surface Latérale : \vec{dF}_L

La force latérale exercée par le fluide sur la surface latérale du cylindre élémentaire

est perpendiculaire à l'axe du cylindre : \vec{dF}_L est perpendiculaire à \vec{u} .

-La surface plane externe dS_1 :

Le fluide exerce la force de pression dF_1 sur la surface plane dS_1 suivante :

$$\vec{dF}_1 = - P_1 d\vec{S}_1$$

Où : $d\vec{S}_1 = dS_1 \vec{n}_1$

$\vec{n}_1 = - \vec{u}$ Vecteur unitaire normal à la surface plane dS_1 , dirigé vers le fluide.

Donc, on aura : $\vec{dF}_1 = P_1 dS_1 \vec{u}$ (6)

P_1 c'est la pression exercée par le fluide en G_1 (centre de la section droite dS_1)

La surface plane externe dS_2

Le fluide exerce sur la surface plane externe dS_2 la force de pression suivante :

$$\vec{dF}_2 = - P_2 d\vec{S}_2$$

Où : $d\vec{S}_2 = dS_2 \vec{n}_2$

$\vec{n}_2 = \vec{u}$: Vecteur unitaire normal de la section plane dS_2

P_2 étant la pression du fluide en G_2 (centre de la section plane dS_2).

Donc, on aura : $\vec{dF}_2 = - P_2 dS_2 \vec{u}$ (7)

Le cylindre élémentaire étant en équilibre dans le fluide au repos, écrivons que

la résultante des forces extérieurs qui lui appliquées est nulle :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{dP}_0 + \vec{dF}_L + \vec{dF}_1 + \vec{dF}_2 = \vec{0} \quad (8)$$

La projection de l'équation (8) sur l'axe (G, \vec{u}) du cylindre, s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{ex}} \cdot \vec{u} \\ (\vec{dP}_0 + \vec{dF}_L + \vec{dF}_1 + \vec{dF}_2) \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{dP}_0 \cdot \vec{u} + \vec{dF}_L \cdot \vec{u} + \vec{dF}_1 \cdot \vec{u} + \vec{dF}_2 \cdot \vec{u} = 0 \end{aligned}$$

Remplçons les équations (5) , (6) et (7), on aura donc:

$$-\rho h dS g k \cdot u + P_1 dS_1 u \cdot u - P_2 dS_2 u \cdot u = 0 \quad (9)$$

Or, on a : $\vec{dF}_L \cdot \vec{u} = 0$, car: \vec{dF}_L est perpendiculaire à \vec{u}

et : $\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2 = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = k^2 = 1, dS = dS_1 = dS_2$

$$\vec{k} \cdot \vec{u} = k \cdot u \cos(\vec{k}, \vec{u})$$

Où : $\alpha = (\vec{k}, \vec{u})$ étant l'angle entre l'axe du cylindre élémentaire et l'axe (OZ) du repère R(O,XYZ).

D'où : $\cos(\alpha) = \frac{G_1 A}{G_1 G_2'}$, avec: $G_1 A = Z_2 - Z_1$ et $G_1 G_2 = h$

Donc : $\cos(\alpha) = \frac{Z_2 - Z_1}{h}$ et $k \cdot u = \cos(\alpha) = \frac{Z_2 - Z_1}{h}$

L'équation (9) devient alors :

$$-\rho h dS g \left(\frac{Z_2 - Z_1}{h} \right) + P_1 dS - P_2 dS = 0$$

On divise par dS, on aura la relation fondamentale de l'hydrostatique suivante :

$$P_1 + \rho g Z_1 = P_2 + \rho g Z_2$$

Comme G_1 et G_2 ont été choisis de façon arbitraire à l'intérieur d'un fluide au repos de masse volumique ρ , dans le champ de pesanteur g . Alors la R.F.H peut écrire en un point M quelconque d'altitude Z, où règne la pression P comme suit :

$$P + \rho g Z = P_1 + \rho g Z_1 = P_2 + \rho g Z_2 = C t^0 \quad (10)$$

III-Théorème d'Archimède

La **poussée d'Archimède** est la résultante des forces de pression exercées sur un corps par le fluide dans lequel il est immergé.

Pour déterminer cette force on étudie :

- Un objet solide de volume V complètement immergé dans un fluide (figure 1)
- et un fluide occupant le meme volume V (figure 2)

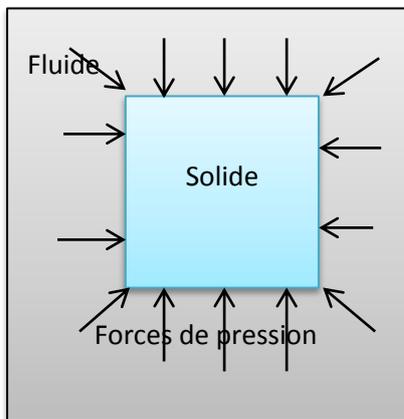


Figure 1

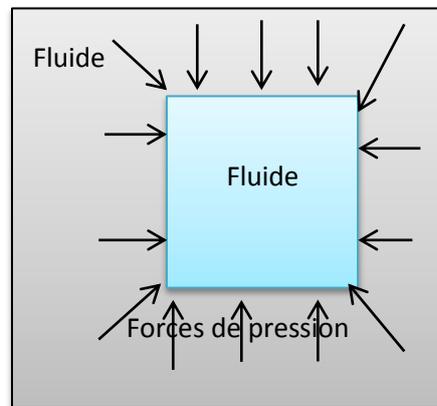


Figure 2

On a vu précédemment avec la loi de la statique des fluides que l'expression de la Pression ne dépend que du champ de pesanteur \vec{g} . Dans les deux cas des figures 1 et 2, la présence ou non de l'objet ne change pas le champ de pesanteur, Le champ de pression est lui aussi inchangé.

Ainsi, la résultante des forces de pression ou poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ est la meme dans les cas des deux figures 1 et 2.

Le volume V du fluide de la figure 2 est en équilibre sous l'action de deux forces :

-la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$.

-le poids de ce volume V de fluide, qui est l'unique force extérieure.

Par contre l'objet de la figure 1 n'est pas forcément en équilibre.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée au volume V de fluide

de masse m_f donne donc :

$$\vec{\Pi} + m_f \vec{g} = \vec{0}$$

Soit

$$\vec{\Pi} = - m_f \vec{g}$$

m_f est la masse de fluide déplacé par l'introduction de l'objet, et donc $m_f \vec{g}$ est

Le poids du volume de fluide déplacé.

Si ρ_f est la masse volumique du fluide et V le volume de l'objet totalement

Immergé, la poussée d'Archimède s'écrit :

$$\vec{\Pi} = - \rho_f V \vec{g}$$

Enoncé du théorème d'Archimède :

Les forces pressantes exercées par un fluide quelconque ou un ensemble de fluides

*Au repos dans le champ de pesanteur terrestre sur un corps **totalemtent immergé***

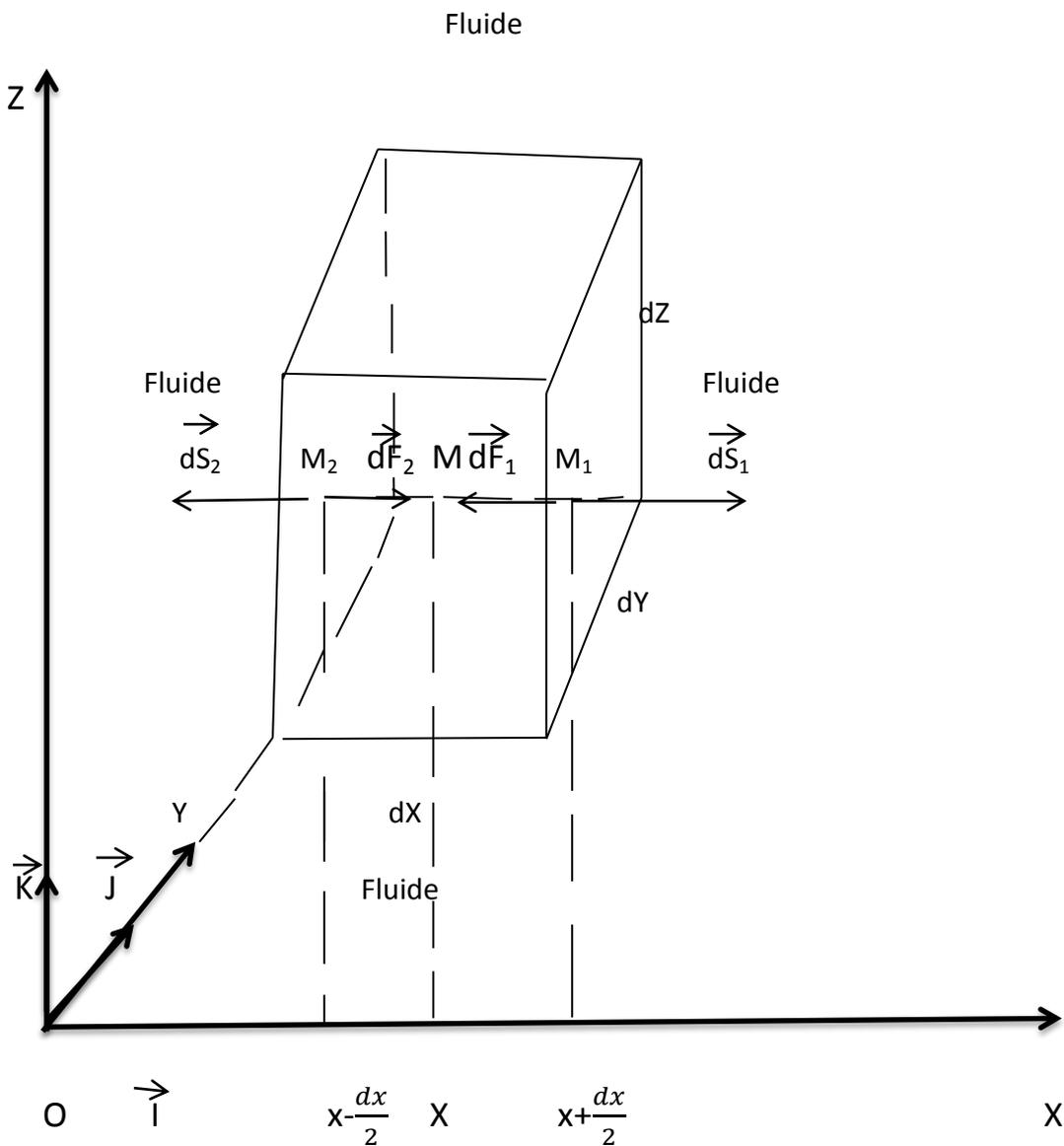
Ont une résultante appelée poussée d'Archimède qui est opposée au poids du

<<fluide déplacé>>

IV-Résultante volumique des forces de pression

Pour déterminer l'expression de la résultante volumique des forces de pression, on choisit une particule fluide de forme cubique et de volume $dV = dx dy dz$, centrée au point $M(x,y,z)$, de coordonnées x, y et z dans un repère $R(o,xyz)$.

-Ecrivons le bilan des forces de pression qui s'exerce sur la particule fluide décrite sur la figure ci-dessous.



On commence par la direction ox , où \vec{i} étant le vecteur unitaire associé à cette direction. Considérons :

-La facette dS_1 centrée au point $M_1(x+\frac{dx}{2}, y, z)$, où :

$dS_1 = dx dy$ étant aussi la surface de la facette carré, de cote dx et dy , centrée au point M_1 . et $\vec{dS}_1 = dS_1 \vec{i}$ vecteur élément de surface associé à la facette considérée.

-Le fluide exerce la force de pression $\vec{dF}_{1x}(M_1)$ sur la facette dS_1 suivant la direction ox suivante :

$$\vec{dF}_{1x}(M_1) = -P(x+\frac{x}{2}, y, z) \vec{dS}_1$$

S'écrit aussi comme suit : $dF_{1x}(M_1) = -P(x+\frac{x}{2}, y, z) dx dy \vec{i}$

Où, la pression exercée par le fluide sur la facette dS_1 , de centre M_1 , est une fonction des coordonnées $x+\frac{x}{2}, y, z$ du point M_1 .

-La facette dS_2 centrée au point $M_2(x-\frac{x}{2}, y, z)$, telle que :

$\vec{dS}_2 = -dS_2 \vec{i}$ Le vecteur élément de surface associé à cette facette.

et : $dS_2 = dS_2 = dx dy$

La force de pression exercée par le fluide sur la facette dS_2 , suivant la direction ox s'écrit, alors comme suit :

$$dF_{2x}(M_2) = -P(x-\frac{x}{2}, y, z) dS_2$$

s'écrit aussi : $dF_{2x}(M_2) = P(x-\frac{x}{2}, y, z) dx dy \vec{i}$

Où : $P(x-\frac{x}{2}, y, z)$ étant la pression appliquée par le fluide sur la facette de centre $M_2(x-\frac{x}{2}, y, z)$.

-La résultante des forces de pression appliquées sur la particule fluide suivant la direction ox est donnée par :

$$\vec{dF}_{1x}(M_1) + \vec{dF}_{2x}(M_2) = -[P(x+\frac{x}{2}, y, z) - P(x-\frac{x}{2}, y, z)] dx dy \vec{i}$$

Par définition, on a :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{y,z} = \frac{P\left(x+\frac{x}{2},y,z\right) - P\left(x-\frac{x}{2},y,z\right)}{dx}$$

C'est la définition de la dérivée.

$$D'où : P\left(x+\frac{x}{2},y,z\right) - P\left(x-\frac{x}{2},y,z\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{y,z} dx$$

Donc, on aura :

$$\vec{dF}_{1x}(M_1) + \vec{dF}_{2x}(M_2) = - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{y,z} dx dy dz \vec{i}$$

Or : $dV = dx dy dz$, c'est le volume de la particule fluide, considérée ayant une forme cubique de cotes dx, dy et dz .

$$\text{Il vient alors : } \vec{dF}_{1x}(M_1) + \vec{dF}_{2x}(M_2) = - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{y,z} dV \vec{i} \quad (11)$$

Si l'on fait de même sur les deux directions oy et oz , on aura :

$$\vec{dF}_{1y}(M_1) + \vec{dF}_{2y}(M_2) = - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{x,z} dV \vec{j} \quad (12)$$

$$\vec{dF}_{1z}(M_1) + \vec{dF}_{2z}(M_2) = - \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{x,y} dV \vec{k} \quad (13)$$

La résultante \vec{R} des forces de pression appliquées sur la particule fluide est donné

$$\text{par : } \vec{R} = \vec{dF}_1(M_1) + \vec{dF}_2(M_2)$$

$$\text{Où : } \vec{dF}_1(M_1) = \vec{dF}_{1x}(M_1) + \vec{dF}_{1y}(M_1) + \vec{dF}_{1z}(M_1)$$

$$\text{et : } \vec{dF}_2(M_2) = \vec{dF}_{2x}(M_2) + \vec{dF}_{2y}(M_2) + \vec{dF}_{2z}(M_2)$$

D'où, la résultante R devient :

$$R = [dF_{1x}(M_1) + dF_{2x}(M_2)] + [dF_{1y}(M_1) + dF_{2y}(M_2)] + [dF_{1z}(M_1) + dF_{2z}(M_2)].$$

On remplace les équation (11),(12) et (13), la résultante R s'écrit :

$$\vec{R} = - \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{x,z} \vec{j} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{k} \right] dV$$

Le terme entre croche est le gradient de la pression :

$$\vec{\text{grad}}P = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{x,z} \vec{j} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{k}$$

Ainsi, la résultante volumique des forces de pression est donnée par : $-\text{grad}P$.

Ce résultat est général et n'est pas seulement vrai en statique :

$$\vec{R} = -\vec{\text{grad}}P \cdot dV$$

D'où :

$$\frac{R}{dV} = (\text{Résultante volumique des force de pression}) = -\vec{\text{grad}}P \quad (14)$$

IV-Equation fondamentale de la statique des fluides

Considérons un fluide au repos sur lequel s'exerce une force volumique f .

Chaque particule fluide, dans le fluide considéré, est soumise à la force volumique

f et à la résultante volumique des forces de pression :

$$\sum F_{\text{ext}} = (\text{Résultante volumique des forces de pression} + f)dV$$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = (-\vec{\text{grad}}P + \vec{f})dV$$

L'équilibre de la particule fluide s'écrit donc :

$$(-\vec{\text{grad}}P + \vec{f})dV = \vec{0}$$

Soit encore, si on divise par le volume de la particule fluide :

$$-\vec{\text{grad}}P + \vec{f} = \vec{0} \quad (15)$$

-Si la force volumique f est le poids de la particule fluide : $f = \frac{dP}{dV}$

Où :

$$dP_0 = dm\vec{g}$$

D'où :

$$\vec{f} = \frac{dm}{dV}\vec{g} = \rho\vec{g}$$

Avec : $\rho = \frac{dm}{dV}$ c'est la masse volumique du fluide considéré, dm la masse élémentaire

de la particule fluide occupant le volume élémentaire dV .

En remplaçons dans l'équation(15), on obtient l'équation fondamentale de la statique

des fluides qui traduit l'équilibre d'un fluide dans le champ de pesanteur suivante :

$$-\vec{\text{grad}}P + \rho\vec{g} = 0 \quad (16)$$

Si le fluide étudié est incompressible (liquide), alors la masse volumique est constant, ne dépend pas de la pression.

En effet la projection de l'équation (16) sur les axes ox, oy et oz s'écrit :

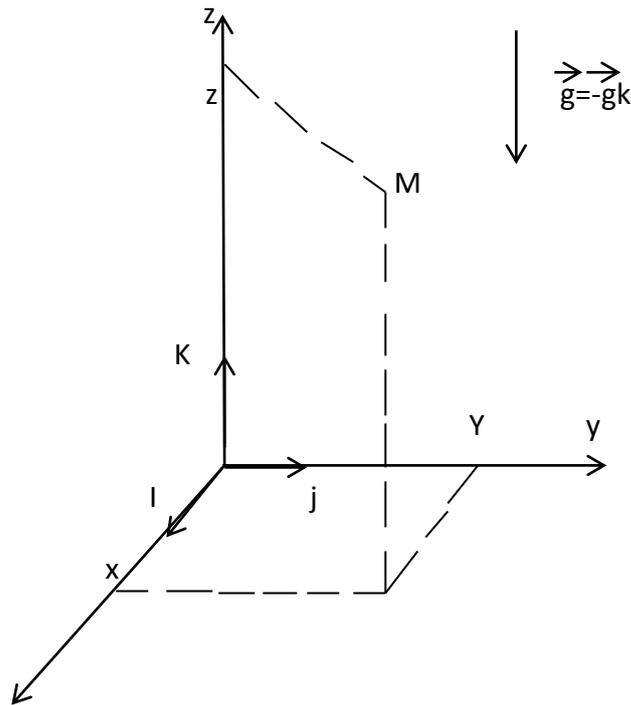
$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_y,z \vec{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_x,z \vec{j} - \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_x,y \vec{k} - \rho g \vec{k} = \vec{0}$$

On aura trois équations suivantes :

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_y,z = 0$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_x,z = 0$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_x,y - \rho g = 0$$



Les deux premières relations montrent que la pression ne dépend ni de la variable x ni de la variable y . Autrement dit, sur un même plan horizontal la pression est constante.

Dans un liquide au repos les isobares sont des plans horizontaux.

Donc, on écrit : $P = P(z)$, la pression dépend que de la variable z , l'altitude de la particule fluide considérée.

Par changement de la notation de la dérivée, on écrit :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

D'où :

$$dP = -\rho g dz$$

et :

$$P = \int dP = -\rho g \int dz + C t^0$$

Donc, on retrouve la R.F.H :

$$P + \rho g Z = C t^0$$

CHAPITRE-II-

DYNAMIQUE DES FLUIDES

INCOMPRESSIBLES PARFAITS

I-Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier, l'équation de continuité (conservation de la masse), le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) et le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie). Elles sont considérées très importantes dans plusieurs application industrielles, entre autre dans la plupart des instruments de mesures de pression et de débit qu'on peut rencontrer dans beaucoup de processus industriels de fabrication chimique.

On étudie dans ce chapitre les fluides en mouvement, contrairement aux solides, les éléments d'un fluide en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes. L'écoulement des fluides est un phénomène complexe.

On considère l'écoulement permanent d'un fluide incompressible parfait.

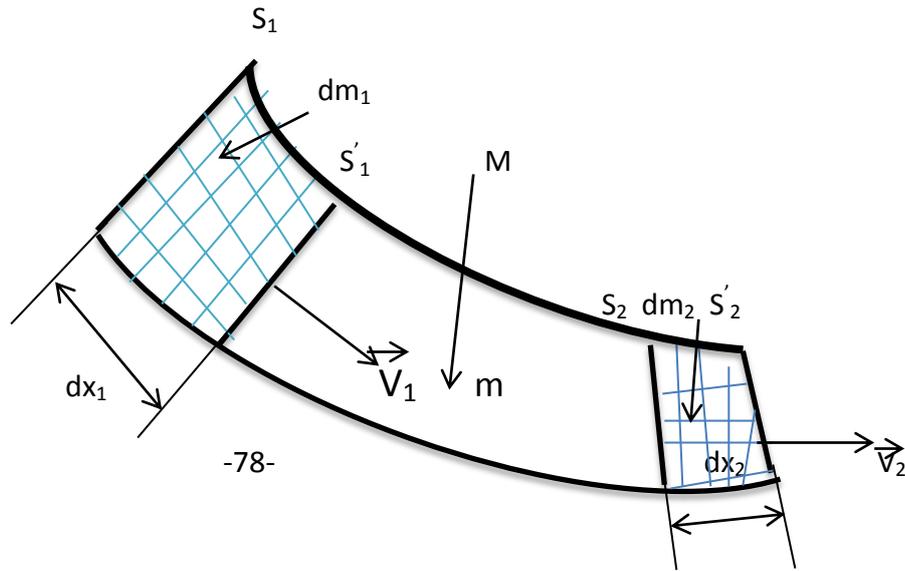
Écoulement permanent

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vitesses des particules fluides est constant dans le temps.

II-Equation de continuité

Considérons une conduite cylindrique d'un fluide incompressible parfait, de masse volumique ρ constante, animé d'un écoulement permanent

(vitesse d'écoulement constante).



S_1 et S_2 la section (surface) d'entrée et la section (surface) de sortie du fluide à l'instant t .

S'_1 et S'_2 la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant $t' = t + dt$.

v_1 et v_2 les vitesses d'écoulement respectivement à travers la section d'entrée S_1 et la section de sortie S_2 :

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} , v_2 = \frac{dx_2}{dt}$$

dx_1 et dx_2 sont respectivement les déplacements de la section d'entrée S_1 et la section de sortie S_2 pendant l'intervalle de temps dt .

dm_1 la masse élémentaire du fluide entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1 .

dm_2 la masse élémentaire du fluide sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2 .

dV_1 le volume élémentaire du fluide entrant compris entre les sections S_1 et S'_1 :

$dV_1 = S_1 dx_1$ c'est le volume du cylindre de hauteur dx_1 et de section S_1 .

dV_2 le volume élémentaire du fluide sortant compris entre les sections S_2 et S'_2 :

$dV_2 = S_2 dx_2$ c'est le volume du cylindre de hauteur dx_2 et de section S_2 .

A l'instant t , le fluide compris entre sections S_1 et S_2 a une masse égale à $m + dm_1$.

-A l'instant $t' = t + dt$, le fluide compris entre les sections S'_1 et S'_2 a une masse égale à $m + dm_2$.

Par conservation de la masse, on aura :

$$m + dm_1 = m + dm_2$$

En simplifiant par m , on obtient : $dm_1 = dm_2$

Or, on a : $Q_1 = \frac{dm_1}{dV_1}$ et $Q_2 = \frac{dm_2}{dV_2}$

D'où, on aura: $Q_1 dV_1 = Q_2 dV_2$

$$Q_1 S_1 dx_1 = Q_2 S_2 dx_2$$

En divisant par dt , on aura:

$$Q_1 S_1 \frac{dx_1}{dt} = Q_2 S_2 \frac{dx_2}{dt}$$

Où: $v_1 = \frac{dx_1}{dt}$ et $v_2 = \frac{dx_2}{dt}$

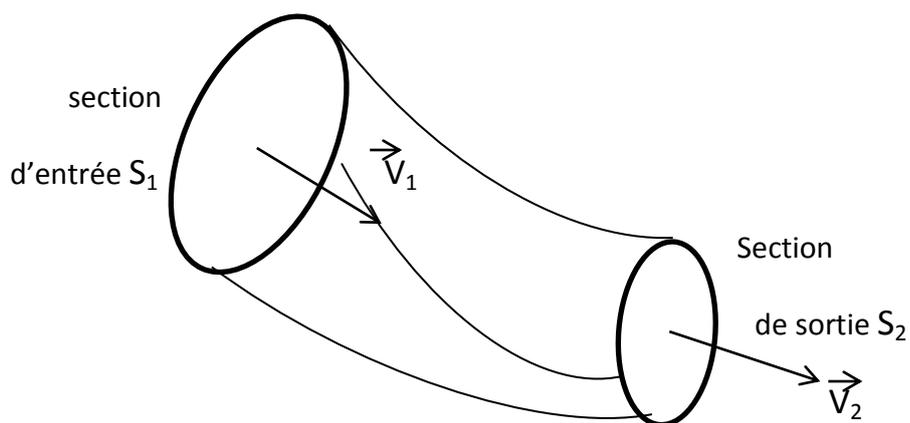
D'où, on aura: $Q_1 S_1 v_1 = Q_2 S_2 v_2$

Or, le fluide considéré est un fluide incompressible, on a alors :

$$Q_1 = Q_2 = Q = Ct^0$$

On peut simplifier et aboutira à l'équation de continuité suivante :

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (1)$$



III-Notion de Débit

a-Débit-masse : Q_m

Le débit-masse d'une conduite d'un fluide est donné par :

$$Q_m = \frac{dm}{dt}$$

Q_m étant la masse du fluide par unité de temps qui traverse une section S quelconque de la conduite.

- dm : la masse élémentaire (en Kg) traversant la section S de la conduite pendant l'intervalle de temps dt (en s).

Puis qu'on a conservation de la masse : $dm = dm_1 = dm_2$

D'après l'expression de la masse volumique :

$$\rho_1 = \frac{dm_1}{dV_1}, \text{ alors : } dm_1 = \rho_1 dV_1 = \rho_1 S_1 dx_1$$

$$\rho_2 = \frac{dm_2}{dV_2}, \text{ alors : } dm_2 = \rho_2 dV_2 = \rho_2 S_2 dx_2$$

Or, le fluide considéré est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho = Ct^0$

D'où :

- le débit-masse du fluide à travers la section (surface) d'entrée S_1 s'écrit :

$$Q_m = \frac{dm_1}{dt} = \rho S_1 \frac{dx_1}{dt}$$

Où : $v_1 = \frac{dx_1}{dt}$ vitesse moyen d'écoulement du fluide à travers la section S_1 .

D'où :

$$Q_m = \frac{dm_1}{dt} = \rho S_1 v_1$$

- le débit-masse du fluide à travers la section (surface) de sortie S_2 s'écrit :

$$Q_m = \frac{dm_2}{dt} = \rho S_2 \frac{dx_2}{dt}$$

Où : $v_2 = \frac{dx_2}{dt}$ vitesse moyen d'écoulement du fluide à travers la section S_2 .

Il vient alors :

$$Q_m = \frac{dm_2}{dt} = \rho S_2 v_2$$

Soit une section droite quelconque S (surface) d'une conduite à travers laquelle le fluide s'écoule avec une vitesse v , le débit-masse du fluide à travers cette section est donné par la relation suivante :

$$Q_m = \rho S v \quad (2)$$

L'unité de Q_m est le Kg/S

b-Débit-volume : Q_v

Le débit-volume Q_v d'un fluide à travers une conduite est donné par :

$$Q_v = \frac{dV}{dt}$$

Q_v étant le volume du fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque S d'un conduit.

- dV : Le volume élémentaire (en m^3) du fluide traversant la section S de la conduite pendant l'intervalle du temps dt .

D'après l'expression de la masse volumique, on aura : $dV = \frac{dm}{\rho}$

Le débit-volume devient alors :

$$Q_v = \left(\frac{dm}{dt}\right) \left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$Q_v = \frac{Q_m}{\rho}$$

D'après les expressions de débit-masse Q_m , le débit-volume s'écrit alors comme suit :

$$Q_v = S_1 v_1 = S_2 v_2$$

C'est-à-dire :

$$Q_v = S_1 v_1$$

Etant le débit-volume à travers la section droite S_1 (surface d'entrée), de vitesse

d'entrée v_1 .

$$Q_v = S_2 v_2$$

Etant le débit-volume à travers la section droite S_2 (surface de sortie), de vitesse de

sortie v_2 .

-Soit une section droite quelconque S (surface) d'un conduit à travers laquelle le

fluide s'écoule d'une vitesse moyenne v . Le débit-volume à travers cette

section droite s'écrit : $Q_v = S v$ (3)

L'unité de la débit-volume est le m^3/s ou Litre/S.

IV-Equation d'Euler

Considérons un fluide incompressible ($\rho = \text{Ct}^0$) parfait (On néglige la viscosité), sur le quel exerce une force volumique f . Donc, chaque particule fluide est soumise à la résultante volumique des forces de pression, (égale à $-\text{grad}P$) et à la force volumique f .

La force totale agissant sur la particule fluide, de volume dV , est donnée par :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = (\text{Résultante volumique des forces de pression} + \vec{f})dV$$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = (- \text{grad}P + \vec{f})dV$$

-Pour un fluide au repos cette expression est nulle. Alors que pour un fluide en mouvement (écoulement du fluide), cette force aura pour effet d'accélérer la particule fluide considérée.

Conformément au principe fondamental de la dynamique, on pourra écrire :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = dm \vec{\gamma}$$

Où : $\gamma = \frac{dv}{dt}$ c'est l'accélération de la particule fluide.

dm : La masse élémentaire de la particule fluide.

-82-

D'après l'expression de la masse volumique du fluide, on aura :

$$dm = \rho dV$$

L'expression de la force totale devient :

$$dm \frac{dv}{dt} = (- \text{grad}P + \vec{f})dV$$

D'où, l'équation de mouvement d'Euler suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dm}{dv}\right)\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) &= -\vec{\text{grad}}P + \vec{f} \\ \rho\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) &= -\vec{\text{grad}}P + \vec{f} \quad (6) \end{aligned}$$

V-Equation (théorème) de Bernoulli

Il s'agit de construire un théorème de conservation de l'énergie. On se limite au cas d'un fluide incompressible et non visqueux. Il va s'agir de faire travailler une force. En partant de l'équation de mouvement d'Euler suivante :

$$\rho\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = -\vec{\text{grad}}P + \vec{f}$$

On multiplie scalairement chaque membre de cette relation par le vecteur déplacement élémentaire $dr = dOM = v dt$ de la particule fluide, on obtient alors :

$$\rho\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) \cdot d\vec{r} = (-\vec{\text{grad}}P + \vec{f}) \cdot d\vec{r} \quad (7)$$

Le premier membre de la relation (7) donne la variation de l'énergie cinétique par unité de volume. Pour le second membre, on suppose que la force volumique f dérive d'une densité d'énergie potentielle U :

$$\vec{f} = -\vec{\text{grad}}U$$

Où : $U = \frac{E_p}{dv}$ Densité d'énergie potentielle.

E_p c'est l'énergie potentielle, dv le volume élémentaire occupé par la particule fluide.

Alors l'équation (7) devient :

$$\rho\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) \cdot \vec{v} dt = (-\vec{\text{grad}}P - \vec{\text{grad}}U) \cdot d\vec{r}$$

D'autre part, on a : $\frac{d}{dt}(\vec{v}^2) = 2\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) \cdot \vec{v}$

Il vient alors :

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}(\vec{v}^2)dt = -(\vec{\text{grad}}P + \vec{\text{grad}}U) \cdot d\vec{r}$$

Or on : $\vec{\text{grad}}(P+U) = \vec{\text{grad}}P + \vec{\text{grad}}U$

D'où on aura : $\frac{1}{2}\rho \frac{d}{dt} (v^2) dt = - \vec{\text{grad}}(P+U) \cdot d\vec{r}$

D'autre part, on a : $\vec{\text{grad}}(P+U) \cdot d\vec{r} = d(P+U)$

En suit, on aura : $\frac{1}{2}\rho d(v^2) + d(P+U) = 0$

Le fluide considéré est incompressible ($\rho = \text{constante}$), on obtient alors :

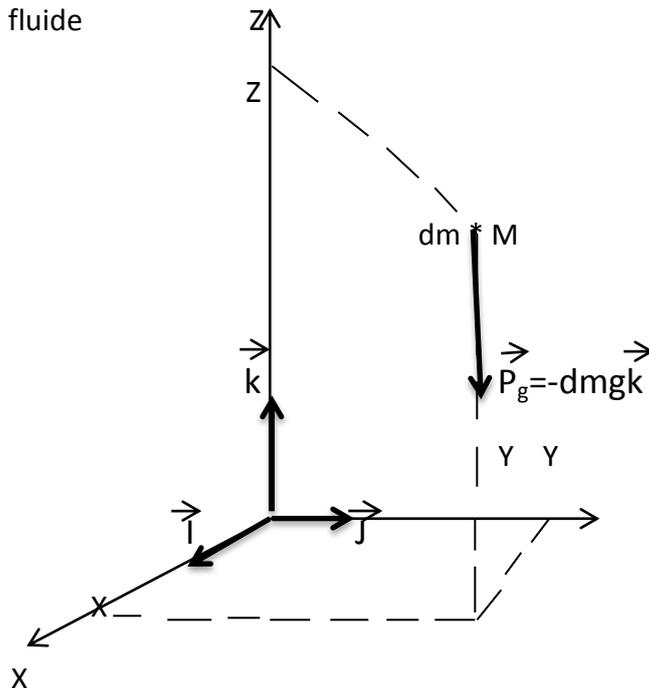
$$d\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + P + U\right) = 0$$

En intégrant cette expression, on aura :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + P + U = C t^0 \quad (8)$$

-Calculons la densité d'énergie potentielle U.

La force volumique f étant la force
de gravitation (Poids de la particule fluide
de masse dm par unité de volume)



D'où : $\vec{f} = \frac{\vec{P}_g}{dV}$, avec $\vec{P}_g = dm\vec{g}$ et $\vec{g} = -g\vec{k}$

-Le poids \vec{P}_g dérive l'énergie potentielle E_p : $\vec{P}_g = -\text{grad}E_p$

-Cherchons alors l'expression de l'énergie potentielle E_p .

On a que le poids \vec{P}_g dérive une énergie potentielle E_p :

$$\vec{P}_g = -\text{grad}E_p \quad (9)$$

Où : $\text{grad}E_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z}\vec{i} + \left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z}\vec{j} + \left(\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y}\vec{k}$

L'expression (9) devient alors :

$$-dmg\vec{k} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z}\vec{i} - \left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z}\vec{j} - \left(\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y}\vec{k}$$

On obtient alors trois équations suivantes :

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z} = 0 \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} = 0 \quad (11)$$

$$-dmg = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y} \quad (12)$$

Les équations (10) et (11) montre que l'énergie potentielle E_p ne dépend

ni de x , ni de y . Alors $E_p = E_p(z)$ dépend que de l'altitude z .

L'équation (12) s'écrit donc :

$$\frac{dE_p}{dz} = dm g$$

$$dE_p = dm g dz$$

On intègre cette équation :

$$E_p(z) = \int dE_p = dm g \int_0^z dz$$

$$E_p = dm g z$$

D'où l'expression de la densité d'énergie potentielle U :

$$U = \frac{E_p}{dV} = \frac{dm}{dV} g z$$

Donc : $U = \rho g z$ (13)

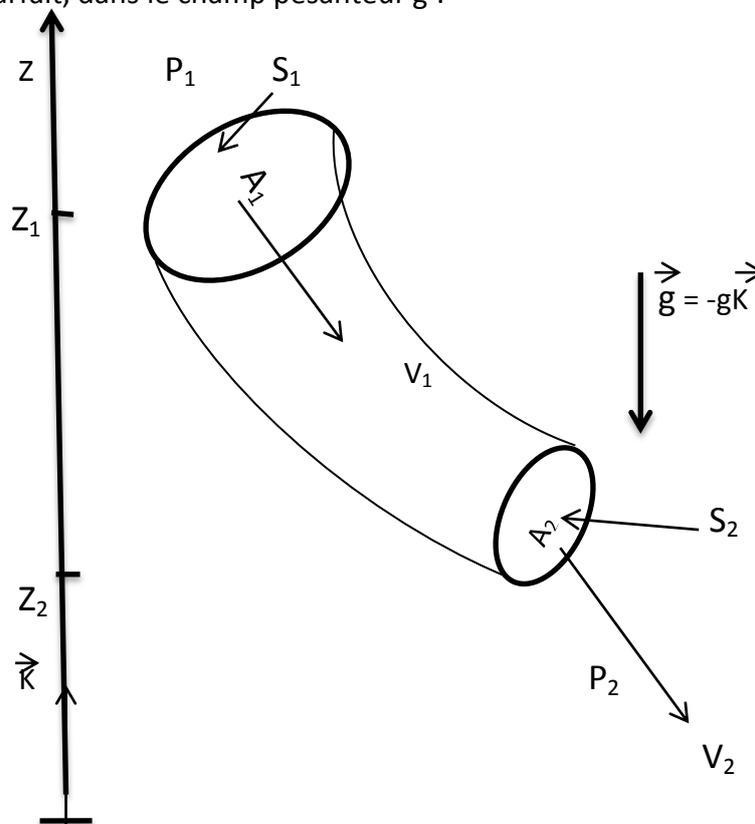
On remplace l'équation (13) dans l'équation (8), on aura alors la relation

(théorème) de Bernoulli suivante :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P = C t^0$$

-L'application du théorème de Bernoulli

On considère l'écoulement le long d'une conduite cylindrique d'un fluide incompressible parfait, dans le champ pesanteur g :



On désigne par :

- $R(o,xyz)$ un repère orthonormé d'axe vertical Oz de vecteur unitaire k , dirigé vers le haut.
- P_1 : La pression exercée sur la section S_1 (surface libre d'entrée de la conduite).
- A_1 : Le centre de la section d'entrée S_1 , d'altitude Z_1 .

- v_1 : La vitesse d'écoulement du fluide considéré à travers la section d'entrée S_1 .

- P_2 : La pression exercée sur la section S_2 (surface libre de sortie de la conduite).

- A_2 : Le centre de la section de sortie S_2 , d'altitude Z_2 .

- v_2 : La vitesse d'écoulement du fluide considéré à travers la section de sortie S_2 .

La relation de Bernoulli entre les points A_1 et A_2 est donnée par la relation suivante :

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \rho g Z_1 + P_1 = \frac{1}{2} v_2^2 + \rho g Z_2 + P_2 \quad (14)$$

Conclusion

Les lois et les équations établies dans ce chapitre en particulier l'équation de

Bernoulli ont un intérêt pratique considérable du moment où elles permettent de comprendre le principe de fonctionnement de beaucoup d'instruments de mesure

de débits réservés aux fluides incompressibles, ces lois et équations peuvent être employées dans certains cas particulier pour les fluides compressibles à faible

variation de pression. Une telle variation existe dans plusieurs cas pratiques.