Département des Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Moulay Ismail
Année Universitaire 2021-2022

S4 : Mathématiques
Module: Algèbre 5

Série 1

Exercice 1.

1) Déterminer la forme linéaire $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ telle que $f(1,1,1) = 0$, $f(2,0,1) = 1$ et $f(1,2,3) = 4$.
2) Donner une base de l'hyperplan $H = \ker(f)$.

Exercice 2.

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants: $v_1 = (1,0,-1), v_2 = (-1,-1,2), v_3 = (-2,1,-2)$.
1) Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner la base duale de $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Exercice 3.

Soient $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications telles que $f_1(x,y,z) = 2x + y + 3z$, $f_2(x,y,z) = 3x - 5y + z$ et $f_3(x,y,z) = 4x - 7y + z$.
1) Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
2) Donner la base préduale de $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soient $1 \leq p \leq n$ des entiers et $f_1, f_2, \cdots, f_p$ des formes linéaires sur E.
1) Montrer que $\dim(\ker(f_1) \cap \ker(f_2) \cap \cdots \cap \ker(f_p)) \geq n - p$.
2) Montrer que la famille $f_1, f_2, \cdots, f_n$ est liée si et seulement si

$$\ker(f_1) \cap \ker(f_2) \cap \cdots \cap \ker(f_n) \neq \{0\}.$$

Exercice 5.

1) Soient $n \geq 1$ un entier et $f, f_1, f_2, \cdots, f_p$ des formes linéaires sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n avec $2 \leq p \leq n$. Montrer que les conditions suivantes sont equivalentes:

a) $f \in \text{vect}\{f_1, f_2, \cdots, f_p\}$;
b) $\ker(f_1) \cap \ker(f_2) \cap \cdots \cap \ker(f_p) \subseteq \ker(f)$.