Chapitre II: Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Soient $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un K-espace vectoriel.

1-Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Definition 1.1.
1) On appelle **forme bilinéaire (fb)** sur E toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ telle que, pour tout $x, x', y, y' \in E$ et pour tout $\alpha, \beta \in K$, on a
a) $\varphi(\alpha x + \beta x', y) = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x', y)$.
b) $\varphi(x, \alpha y + \beta y') = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x, y')$.
2) Une application $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ est appelée une **forme bilinéaire symétrique (fbs)** si φ est une fb qui est de plus symétrique, c'est à dire, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$, $\forall x, y \in E$.
3) Soit φ est une fbs sur E. On appelle **forme quadratique** associée à φ l'application $q : E \longrightarrow K$ definie par

$$q(x) = \varphi(x, x), \forall x \in E.$$

4) On note $\mathcal{L}(E, E, K)$ l'ensemble des fb, $\mathcal{S}(E, K)$ l'ensemble des fbs et $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des fq.

Exemples 1.2.
1) Soient $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \text{ et } q(x, y) = x^2 + y^2.$$

Alors φ est une fbs et q est la fq associée à φ.
2) Soit $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application definie par $\varphi(A, B) =$tr(AB) la trace de AB et $q : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par $q(A) =$tr(A^2). Alors φ est une fbs et q est la fq associée à φ.

Proposition 1.3.
$\mathcal{L}(E,E,K)$, $\mathcal{S}(E,K)$ et $\mathcal{Q}(E)$ sont des K-espaces vectoriels.

Remarque.
Soit φ une fb sur E.
1) Soit $y \in E$ fixé. Soit $\varphi_y = \varphi(-,y) : E \longrightarrow K$ l'application telle que $\varphi_y(x) = \varphi(x,y)$. Alors φ_y est une forme linéaire sur E, i.e., $\varphi_y \in E^*$.
2) Soit $x \in E$ fixé. Soit $\varphi_x = \varphi(x,-) : E \longrightarrow K$ l'application telle que $\varphi_x(y) = \varphi(x,y)$. Alors φ_x est une forme linéaire sur E, i.e., $\varphi_x \in E^*$.

Definition 1.4.
Soit $q : E \longrightarrow K$ une application. On dit que q est une forme quadratique si il existe une fbs $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ telle que $q(x) = \varphi(x,x), \forall x \in E$. φ s'appelle une forme polaire de q.

Voici quelques propriétés des formes quadratiques.

Proposition 1.5.
Soit $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique. Alors:
1) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, $\forall x \in E, \forall \lambda \in K$.
2) $q(-x) = q(x), \forall x \in E$.
3) $q(0_E) = 0_K$.

Démonstration.
1) Soit φ une forme polaire de q. Soient $\lambda \in K$ et $x \in E$.
On a
$$q(\lambda x) = \varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \varphi(x,x) = \lambda^2 q(x).$$
2) $q(-x) = (-1)^2 q(x) = q(x)$.
3) $q(0_E) = q(0_k 0_E) = 0_K^2 q(0_E) = 0_K q(0_E) = 0_K$.

Proposition 1.6.
Soit $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique. Alors l'application $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ definie par

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

est l'unique forme polaire de q appelée la forme polaire de q.

Démonstration.
Soit ψ une fp arbitraire de q. D'où

$$\psi(x+y, x+y) = q(x) + q(y) + 2\psi(x,y) = q(x+y).$$

Ce qui donne $\psi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \varphi(x,y)$, $\forall x, y \in E$. Par suite $\psi = \varphi$.

Proposition 1.7.
Soit $q : E \longrightarrow K$ une application. Alors q est une forme quadratique sur E si et seulement si

1) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x), \forall x \in E, \forall \lambda \in K$.
2) L'application $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ definie par

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

est une forme bilinéaire sur E.

Démonstration.
Supposons que (1) et (2) sont vérifiés. D'où $\forall x \in E$,

$$\varphi(x,x) = \frac{1}{2}(q(2x) - 2q(x)) = \frac{1}{2}(4q(x) - 2q(x)) = q(x).$$

Alors q est une fq.

Proposition 1.8.
L'application $\psi : \mathcal{S}(E,K) \longrightarrow \mathcal{Q}(E)$ definie par $\psi(\varphi) = q$ pour

toute fbs φ, avec q est la forme quadratique associée à φ, est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur K.

Démonstration.
Il est facile de voir que ψ est linéaire. Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$. D'où il existe une unique $f \in \mathcal{S}(E,K)$ qui soit la forme polaire de q, c'est à dire que, $\psi(f) = q$. Alors ψ est un isomorphisme.

Application
Montrer que $q : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par $q(A) = \det(A)$ est une forme quadratique.
D'abord, $q(\alpha A) = \det(\alpha A) = \alpha^2 \det(A) = \alpha^2 q(A), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$. Soient $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ deux éléments de $M_2(\mathbb{R})$. Alors,

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix} =$$

$$a_1a_4 + a_1b_4 + b_1a_4 + b_1b_4 - a_2a_3 - a_2b_3 - b_2a_3 - b_2b_3$$

Par suite,

$$\varphi(A,B) = \frac{1}{2}(\det(A+B) - \det(A) - \det(B)) = \frac{1}{2}(a_1b_4 + b_1a_4 - (a_2b_3 + a_3b_2))$$

definie une fb sur $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$. Par conséquent, q est une fq sur $M_2(\mathbb{R})$.

Remarque.
L'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas une forme quadratique lorsque $n \neq 2$.

Definition 1.9.
Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ une fbs.

Soeint $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$. Alors

$$\varphi(x,y) = \sum_{i,j} x_iy_j\varphi(e_i,e_j).$$

1) La matrice de φ dans la base B est definie par

$$M(\varphi,B) = (\varphi(e_i,e_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \varphi(e_1,e_2) & \cdots & \varphi(e_1,e_n) \\ \varphi(e_2,e_1) & \varphi(e_2,e_2) & \cdots & \varphi(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi(e_n,e_1) & \varphi(e_n,e_2) & \cdots & \varphi(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

2) La matrice d'une forme quadratique q dans B est la matrice de sa forme polaire φ dans B, c'est à dire que $M(q,B) = M(\varphi,B)$.

Remarque.

La matrice d'une forme bilinéaire symetrique est une matrice symetrique.

Proposition 1.10.

Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ une fbs avec E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soient B une base de E et $A = M(\varphi,B)$.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors

$$\varphi(x,y) = {}^tX.A.Y = (x_1x_2\cdots x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Soit $A = (a_{ij})_{i,j}$. On a $A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{pmatrix}$.

D'où

$$ {}^t XAY = (a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n) + (a_{21}x_2y_1 + $$

$$ a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{2n}x_2y_n) + \cdots + (a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n) $$

$$ = \varphi(x,y). $$

Remarque.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et soit B une base de E.

1) Soit φ une fbs sur E. Si $\varphi(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j, \forall x,y \in E$, alors

$$ M(\varphi, B) = (a_{ij})_{i,j}. $$

2) Soit q une fq sur E. Si $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j$, alors

$$ M(q,B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{21} & a_{22} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{n1} & \frac{1}{2}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} $$

Exemple

Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique telle que

$$ q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz - 6yz. $$

1) Donner la matrice $M(q,B)$ de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la forme polaire φ de q.

Proposition 1.11.

Soient E un espace vectoriel sur K et $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Soit $\mathcal{S}_n(K)$ l'espace vectoriel des matrices symétriques sur K de degré n. Alors l'application

$$\psi : \mathcal{S}(E,K) \longrightarrow \mathcal{S}_n(K)$$

telle que $\psi(\varphi) = M(\varphi, B)$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur K avec $\psi^{-1}(A) = \varphi$ telle que $\varphi(X,Y) = {}^tXAY$ pour toute matrice symetrique A et tout $X,Y \in K^n$.

Démonstration.
Il est facile de voir que ψ est linéaire. Soit $A \in \mathcal{S}_n(K)$. Alors $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ definie par $\varphi(x,y) = {}^tXAY$ est une fbs sur E, $\psi(\varphi) = A$ et $\varphi \in \mathcal{S}(E,K)$ est l'unique fbs telle que $M(\varphi, B) = A$. D'où ψ est bijective. Par suite $\mathcal{S}(E,K) \overset{\psi}{\cong} \mathcal{S}_n(K)$.

Corollaire 1.13.
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Alors

$$\dim_K(\mathcal{S}(E,K)) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration.
On a $\dim_K(\mathcal{S}_n(K)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Par suite, puisque $\mathcal{S}(E,K) \cong \mathcal{S}_n(K)$, on obtient, $\dim_K(\mathcal{S}(E,K)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Corollaire 1.14.
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(K)$ telles que pour tout $X, Y \in K^n$,

$${}^tXAY = {}^tXBY$$

Alors $A = B$.

Démonstration.
Supposons que ${}^tXAY = {}^tXBY$, $\forall X, Y \in K^n$. Donc

$$\psi^{-1}(A)(X,Y) = \psi^{-1}(B)(X,Y), \forall X, Y \in K^n.$$

Par suite $\psi^{-1}(A) = \psi^{-1}(B)$. Comme ψ est bijective, on obtient $A = B$.

Corollaire 1.15.
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(K)$ telles que pour tout $X \in K^n$,

$$ {}^tXAX = {}^tXBX $$

Alors $A = B$.

Démonstration.
Soient $\varphi_A = \psi^{-1}(A)$ et $\varphi_B = \psi^{-1}(B)$. D'où $\varphi_A(X,X) = \varphi_B(X,X), \forall X$.
Par suite, $q_A(X) = q_B(X), \forall X$. Ce qui implique que $q_A = q_B$.
On obtient alors $A = M(q_A, \mathcal{B}) = M(q_B, \mathcal{B}) = B$.

Application.
Soit $q : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par $q(A) = \det(A)$. Soit $\mathcal{B} = \left\{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Donner la matrice et la forme polaire de q.

Soit $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = xE_{11} + yE_{12} + zE_{21} + tE_{22}$ un élément de $M_2(\mathbb{R})$. Alors $q(A) = \det(A) = xt - yz$. Par suite

$$ M(q, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

Soient $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(A,A') &= (x\ y\ z\ t)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(x\ y\ z\ t)\begin{pmatrix} t' \\ -z' \\ -y' \\ x' \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(xt' - yz' - zy' + tx').
\end{aligned}$$

2- Changement de bases

Proposition 2.1.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soient $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ et $B' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ deux bases de E et P la matrice de passage de B à B'. Soient φ une fbs sur E, $A = M(\varphi, B)$ et $A' = M(\varphi, B')$. Alors

$$A' = {}^tPAP.$$

Démonstration.

Soient $x, y \in E$ et X la matrice colonne de x dans B, Y la matrice colonne de y dans B. Soient X' la matrice colonne de x dans B' et Y' la matrice colonne de y dans B'. Alors $X = PX'$ et $Y = PY'$. Par suite

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) = {}^tXAY = {}^t(PX')A(PY') &= {}^tX'({}^tPAP)Y' \\
&= {}^tX'A'Y'.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $A' = {}^tPAP$.

3-Orthogonalité pour les fbs

Definition 3.1.
Soit E un espace vectoriel sur K et soit φ une fbs sur E.
1) Soient $x, y \in E$. On dit que x est orthogonal à y pour φ si $\varphi(x,y) = 0$.
2) Soient $x \in E$ et $A \subseteq E$. On dit que x est orthogonal à A pour φ si $\varphi(x,a) = 0, \forall a \in A$.
3) Soit $A \subseteq E$. On définit l'orthogonal de A pour φ, noté $A^\perp$, l'ensemble $A^\perp = \{x \in E : \varphi(x,a) = 0, \forall a \in A\}$.
4) Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite orthogonale pour φ, si $\varphi(x_i, x_j) = 0, \forall i \neq j$.

Proposition 3.2.
Soit E un espace vectoriel sur K et soit φ une fbs sur E.
1) $\forall A \subseteq E$, $A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.
2) Soient $A, B \subseteq E$. $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
3) $\forall A \subseteq E$, $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.
4) $0^\perp = E$.
5) $\forall A \subseteq E$, $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

Démonstration.
1) Soit $A \subseteq E$. Soient $x, y \in A^\perp$. On a, $\forall a \in A$,

$$\varphi(x+y,a) = \varphi(x,a) + \varphi(y,a) = 0.$$

D'où $x + y \in A^\perp$. De même, si $x \in A^\perp$ et $\alpha \in K$, $\varphi(\alpha x, a) = \alpha\varphi(x,a) = 0$, $\forall a \in A$, par suite $\alpha x \in A^\perp$. Par conséquent, $A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.
2) Soit $A \subseteq B$. Soit $x \in B^\perp$. D'où $\varphi(x,b) = 0, \forall b \in B$. En particulier, $\varphi(x,a) = 0, \forall a \in A$ puisque $A \subseteq B$. Par suite $x \in A^\perp$. Alors $B^\perp \subseteq A^\perp$.
3) Soit $A \subseteq E$. Alors $A \subseteq \mathrm{Vect}(A)$. D'où $\mathrm{Vect}(A)^\perp \subseteq A^\perp$. Soit, maintenant, $x \in A^\perp$. Soit $b \in \mathrm{Vect}(A)$. Alors, il existe $a_1, \cdots, a_n \in A$ et il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$, tels que $b = \alpha_1 a_1 +$

$\alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$. Par suite

$$\varphi(x,b) = \varphi(x, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n) =$$

$$= \alpha_1 \varphi(x,a_1) + \alpha_2 \varphi(x,a_2) + \cdots + \alpha_n \varphi(x,a_n) = 0$$

car $x \in A^{\perp}$. Alors $x \in \mathrm{Vect}(A)^{\perp}$. Par suite $A^{\perp} \subseteq \mathrm{Vect}(A)^{\perp}$. D'où l'égalité.
4) Il est clair.
5) Soit $x \in A$. D'où $\varphi(x,y) = 0$ pour tout $y \in A^{\perp}$. Par suite $x \in A^{\perp\perp}$. Par conséquent $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

Remarque.
Soient E un espace vectoriel et F un sous espace vectoriel de E. Soit $\{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$ une famille base (ou une famille generatrice) de F. Alors

$$F^{\perp} = e_1^{\perp} \cap e_2^{\perp} \cdots \cap e_p^{\perp}.$$

Definition 3.3.
Soit φ une fbs sur un espace vectoriel E. On appelle noyau de φ le sous espace vectoriel

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = E^{\perp} = \{x \in E : \varphi(x,y) = 0, \forall y \in E\}$$

de E.

Proposition 3.4.
Soit φ une fbs sur un espace vectoriel E. On définit l'application $\psi : E \longrightarrow E^*$ telle que $\psi(x) = \varphi_x, \forall x \in E$. Alors ψ est une application linéaire et

$$\ker(\psi) = \ker(\varphi).$$

Démonstration.
Soit $x \in E$. On a $x \in \ker(\psi)$ si et seulement si $\psi(x) = 0$ si et seulement si $\varphi_x = 0$ si et seulement si $\varphi_x(y) = \varphi(x,y) = 0, \forall y \in E$ si et seulement si $x \in \ker(\varphi)$. D'où $\ker(\psi) = \ker(\varphi)$.

Proposition 3.5.

Soit φ une fbs sur un espace vectoriel de dimension finie E et soit $A = M(\varphi, B)$, où B est une base de E. Alors, si $x \in E$,

$$x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow AX = 0$$

où X est la matrice colonne de x dans B. D'où, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(A)$.

Démonstration.

On a $x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x,y) = 0, \forall y \in E \Leftrightarrow {}^tXAY = 0, \forall Y \Leftrightarrow {}^t({}^tAX)Y = 0, \forall Y \Leftrightarrow {}^t(AX)Y = 0, \forall Y \Leftrightarrow AX = 0.$

Exemple.

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$q(x,y) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 + xy.$$

1) Déterminer la matrice de q et la forme polaire de q.
2) Déterminer le noyau de q.

1) On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$. Alors

$$\varphi((x,y),(x',y')) = xx' + \frac{1}{4}yy' + \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{2}yx'$$

$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

2) $\mathrm{Ker}(\varphi, B) = \mathrm{Ker}(A) = \left\{(x,y) : \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$= \left\{(x,y) : \begin{cases} x + \frac{1}{2}y & = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y & = 0 \end{cases}\right\}$

$= \{(x,y) : y = -2x\} = \{(x,-2x) : x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(1,-2)\}$. Par suite $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\{(1,-2)\}$.

Definition 3.6.
Soit E un espace vectoriel. Alors
1) Une fbs φ sur E est dite dégénérée si $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$.
2) Une fbs φ sur E est dite non dégénérée si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

Definition 3.7.
Soient E un espace vectoriel sur K. Soit φ une fbs sur E et q sa forme quadratique.
1) Un vecteur x de E est dit isotrope pour φ, si $q(x) = 0$.
2) On appelle cône isotrope de q l'ensemble

$$C(q) = \{x \in E : x \text{ est isotrope } \} = \{x \in E : q(x) = 0\}.$$

3) Soit F un sous espace vectoriel de E. F est dit totalement isotrope si $F \subseteq F^{\perp}$.

Remarque.
1) Soit F un sous espace vectoriel de E. Soit φ une fbs et q sa fq. F est totalement isotrope si et seulement si $\varphi(x,y) = 0, \forall x,y \in F$.
2) $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq C(q)$.

Démonstration.
1) F est tot isotrope $\Leftrightarrow F \subseteq F^{\perp} \Leftrightarrow \forall x \in F, \varphi(x,y) = 0, \forall y \in F \Leftrightarrow \varphi(x,y) = 0, \forall x,y \in F$.
2) Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Rightarrow x \in E^{\perp} \Rightarrow \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow q(x) = 0 \Rightarrow x \in C(q)$. D'où $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq C(q)$.

Exemple.
Déterminer le cône isotrope de la fq $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

On a $(x,y,z) \in C(q) \Leftrightarrow x^2+y^2-z^2=0 \Leftrightarrow z^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow z \in \{\sqrt{x^2+y^2}, -\sqrt{x^2+y^2}\}$. Alors

$$C(q)=\left\{(x,y,\sqrt{x^2+y^2}):x,y\in\mathbb{R}\right\}\bigcup\left\{(x,y,-\sqrt{x^2+y^2}):x,y\in\mathbb{R}\right\}.$$

Remarque.
Le cône isotrope n'est pas, en général, un sous espace vectoriel de E.

D'après l'exemple précédent, on a $(1,0,1),(1,0,-1) \in C(q)$ mais $(1,0,1)+(1,0,-1)=(2,0,0) \notin C(q)$. D'où $C(q)$ n'est pas un sev de E.

Definition 3.8.
Une forme quadratique sur un espace vectoriel E est dite définie si $\forall x \in E$,

$$q(x)=0 \Rightarrow x=0$$

c'est à dire $C(q)=\{0\}$.

Proposition 3.9.
Soit E un espace vectoriel et q une forme quadratique sur E.
1) Si q est définie, alors q est non dégénérée.
2) Soit $K=\mathbb{R}$. Si q est non dégénérée et q est positive, alors q est définie (positive).

Démonstration.
1) Supposons que q est définie. Comme $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq C(q) = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$. D'où φ est non dégénérée.
2) Supposons que $K=\mathbb{R}$, φ non dégénérée et $q(x)\geq 0, \forall x \in E$. Soit $x \in C(q)$. Soient $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $q(y+\lambda x)\geq 0$, d'où $q(y)+\lambda^2 q(x)+2\lambda\varphi(x,y)=q(y)+2\lambda\varphi(x,y)\geq 0$. Supposons qu'il existe $y \in E$ such that $\varphi(x,y)>0$. D'où,

pour $\lambda < \dfrac{-q(y)}{2\varphi(x,y)}$, on a $q(y)+2\varphi(x,y)<0$ qui est absurde.

De même, si $\varphi(x,y)<0$, pour $\lambda > \dfrac{-q(y)}{2\varphi(x,y)}$, on a $q(y)+2\lambda\varphi(x,y)<0$ qui est absurde aussi. Par suite $\varphi(x,y)=0, \forall y \in E$. Alors, $x=0$ puisque q est non dégénérée. Par suite $C(q)=\{0\}$ est donc q est définie.

4-Cas où E est un espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E et q la fq associée.

Definition 4.1.
On appelle rang de φ l'entier

$$\mathrm{rg}(\varphi)=\dim(E)-\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=\dim(E)-\dim(E^{\perp}).$$

(d'où $\dim(E)=\mathrm{rg}(\varphi)+\dim(E^{\perp})$).

Proposition 4.2.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur K et B une base de E. Soit φ une fbs sur E. Alors

$$\mathrm{rg}(\varphi)=\mathrm{rg}(M(\varphi,B)).$$

Démonstration.
On a $\mathrm{Ker}(\varphi)=\mathrm{Ker}(A)$, où $A=M(\varphi,B)$. Or

$$\dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}(A))+\dim(\mathrm{Im}(A)).$$

Alors $\dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))+\mathrm{rg}(A)=\dim(E^{\perp})+\mathrm{rg}(A)$. Comme $\dim(E)=\mathrm{rg}(\varphi)+\dim(E^{\perp})$, on obtient $\mathrm{rg}(\varphi)=\mathrm{rg}(A)$.

Corollary 4.3.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et B une base de E. Soit φ une fbs sur E. Alors φ est non

dégénérée si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$ si et seulement si A est une matrice inversible, où $A = M(\varphi, B)$.

Démonstration.

On a $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(A)$. De même

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = \dim(E) = n.$$

Alors φ est non dégénérée si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

Théorème 4.4.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et φ une fbs sur E. Alors φ admet une base orthogonale B, c'est à dire, il existe une base $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ telle que $\varphi(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j$.

Démonstration.

La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour le cas $n = 1$ le résultat est trivial. Supposons que le résultat est vrai pour $n \geq 1$. Soient E un espace vectoriel de dimension $n+1$ et $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ une fbs. Si $\varphi = 0$ le résultat est trivial puisque toute base de E est orthogonale pour φ. Supposons alors que $\varphi \neq 0$. D'où $C(q) \neq E$ (car si $C(q) = E$, alors $q = 0$ et donc $\varphi = 0$ ce qui est absurde). Soit $e_1 \in E$ tel que $q(e_1) \neq 0$. Soit $F = \{e_1\}^{\perp}$ et $\varphi_F : F \times F \longrightarrow K$ la restriction de φ à F (c'est à dire $\varphi_F(x, y) = \varphi(x, y), \forall x, y \in F$). Montrons que $E = Ke_1 \oplus F$, où $Ke_1 = \{\alpha e_1 : \alpha \in K\}$ désigne le sous espace vectoriel engendré de E par e_1. Soit $x \in Ke_1 \cap F$. D'où $x = \alpha e_1$, pour un certain $\alpha \in K$, et $\varphi(x, e_1) = 0$ puisque $x \in F$. Alors $\alpha q(e_1) = 0$ ce qui donne $\alpha = 0$ puisque $q(e_1) \neq 0$. Ceci entraine que $x = 0$ et par suite $Ke_1 \cap F = \{0\}$. Fixons $x \in E$ et cherchons $\alpha \in K$ et $y \in F$ tels que $x = \alpha e_1 + y$. D'où $\varphi(e_1, x) = \alpha\varphi(e_1, e_1) = \alpha q(e_1)$ puisque $\varphi(e_1, y) = 0$. Alors $\alpha =$

$\frac{\varphi(e_1,x)}{q(e_1)}$. On a $x = \frac{\varphi(e_1,x)}{q(e_1)}e_1 + \Big(x - \frac{\varphi(e_1,x)}{q(e_1)}e_1\Big)$. On montre que $y := x - \frac{\varphi(e_1,x)}{q(e_1)}e_1 \in F$. En effet,

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1,y) &= \varphi\Big(e_1, x - \frac{\varphi(e_1,x)}{q(e_1)}e_1\Big) \\
&= \varphi(e_1,x) - \frac{\varphi(e_1,x)}{q(e_1)}q(e_1) \\
&= \varphi(e_1,x) - \varphi(e_1,x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où $y \in F$ et par suite $x \in Ke_1 + F$. Par conséquent, $E = Ke_1 \oplus F$. En particulier, $\dim(F) = n$. Par récurrence, il existe une base orthogonale $\{e_2, \cdots, e_{n+1}\}$ de F pour φ_F. Comme $e_1 \notin F$, on obtient que $\{e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}\}$ est une famille libre de E. Par suite $\{e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}\}$ est une base de E qui est de plus orthogonale pour φ.

Corollaire 4.5.

Soit φ une fbs sur un epace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Alors il existe une base B de E telle que $M(\varphi, B)$ est diagonale.

Démonstration.

Il suffit de prendre une base orthogonale B de E pour φ. D'où $M(\varphi, B)$ est diagonale.