Département des Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Moulay Ismail
Année Universitaire 2021-2022

S4 : Mathématiques
Module: Algèbre 5

Série 2

Exercice 1.

Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Soit g une forme bilinéaire (non nécessairement symétrique) sur E.
1) Montrer que l'application $q : E \longrightarrow K$ définie par $q(x) = g(x,x), \forall x \in E$ est une forme quadratique sur E.
2) Donner la forme polaire de q.

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Soient u_1, u_2 deux formes linéaires sur E.
1) Montrer que l'application $q : E \longrightarrow K$ définie par $q(x) = u_1(x)u_2(x), \forall x \in E$, est une forme quadratique sur E.
2) Donner la forme polaire de q.

Exercice 3.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inferieure ou egale à n avec $n \geq 2$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt, \forall P,Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
1) Montrer que φ est une forme bilinéaire. Est-elle symetrique? Est-elle antisymetrique?
2) Soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $q(P) = \varphi(P,P), \forall P \in E$. Montrer que q est une forme quadratique. Est-elle définie? Sinon chercher le cône isotrope de q.
3) Déterminer la signature de q dans le cas où $n = 2$. q est-elle positive? négative?
4) Donner une base orthogonale de q lorsque $n = 2$.

Exercice 4.

On considère la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par

$$q(x,y,z) = y^2 - 2xz, \forall x,y,z \in \mathbb{R}.$$

1) Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner le noyau de q.
3) Donner la signature de q ainsi que son rang. q est-elle non dégénérée?
4) Soient $e_1 = (1,1,0), e_2 = (0,1,1)$ et $e_3 = (1,1,1)$ et soit $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$.
   a) Vérifier que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Donner la matrice de q dans B'.

Exercice 5.

Soit la forme quadratique q definie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3.$$

1) Calculer le noyau de q.
2) Montrer que le cone isotrope pour q est la reunion de deux plans vectoriels dont on déterminera les equations.
3) Déterminer l'orthogonal du vecteur $v = (1\ 1\ 1)$ pour q.
4) Donner la signature de q.

Exercice 6.

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ definie par

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 - x_3x_4.$$

Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ d'equation $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$.
1) Quel est le rang et la signature de q?
2) Donner une base et la dimension de $H^\perp$ pour q.
3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a,b,c,d pour que la restriction $q_{/H}$ de q à H soit dégénérée. Quel est alors le rang de $q_{/H}$?