UNIVERSITE MOULAY ISMAIL **A.U. 2019-2020**

FACULTE DES SCIENCES **SMP-S4**

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEKNES

CORRIGE DE L'EXAMEN DE L'EXAMEN D'ELECTRICITE III

SESSION ORDINAIRE TENUE EN SEPTEMBRE 2020

==

1)

En raison de la symétrie sphérique de la distribution de charge ρ_0, le champ électrique $\vec{E}_0(M)$ créé par la charge réelle Q_0 est radial et son module ne dépend que la coordonnée **r** du point $M(r,\theta,\varphi)$ M :

$$\vec{E}_0(M) = E_0(r).\vec{e}_r$$

Puisque les deux milieux diélectriques sont parfaits, les polarisations $\vec{P}_I(M)$ et $\vec{P}_{II}(M)$ induites par le champ électrique $\vec{E}_0(M)$ sont également de la forme :

$$\vec{P}_I(M) = \vec{P}_I(r).\vec{e}_r \qquad \text{et} \qquad \vec{P}_{II}(M) = \vec{P}_{II}(r).\vec{e}_r$$

Une fois les milieux diélectriques sont polarisés, le champ électrique dépolarisant $\vec{E}_d(M)$ créé par chaque milieu est également de la forme :

$$\vec{E}_d(M) = E_d(r).\vec{e}_r$$

D'où le champ total :

$$\vec{E}_{tot}(M) = E_0(r).\vec{e}_r + E_d(r).\vec{e}_r) = E_{tot}(r).\vec{e}_r$$

Il s'en suit :

$$\vec{D}_{tot}(M) = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}_{tot}(M) = \varepsilon_0\varepsilon_r E_{tot}(r).\vec{e}_r$$

2)

Par définition de la charge volumique, une charge Q_0 répartie avec une densité volumique ρ_0 dans un volume sphérique V, s'exprime par :

$$Q_0 = \rho_0.V = \rho_0.\frac{4\pi.R^3}{3}$$

d'où l'expression de ρ_0 :

$$\rho_0 = \frac{3Q_0}{4\pi.R^3}$$

3) Expression du théorème de Gauss généralisé :

Elle est donnée par l'intégrale suivante

$$\oiint_S \vec{D}(M).d\vec{S} = Q_{tot}^{réelle}$$

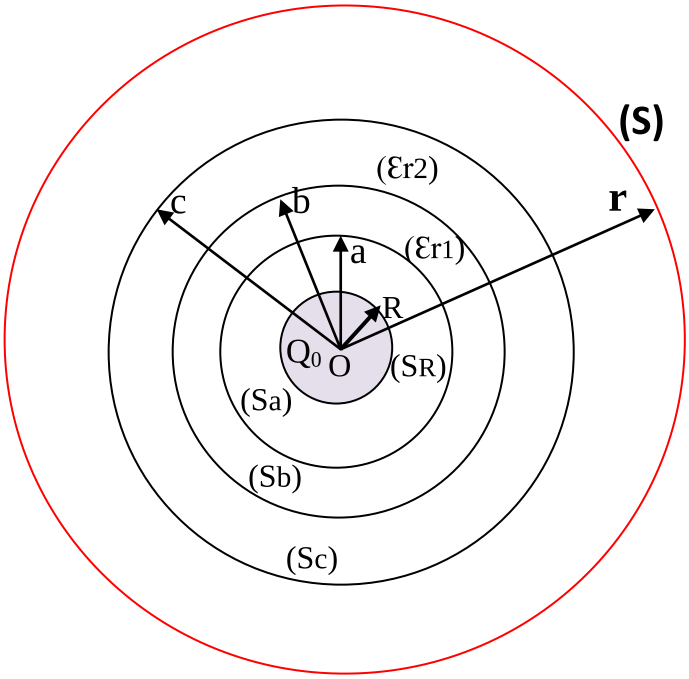
Où :

▪ (S) est une surface fermée

▪ $Q_{tot}^{réelle}$ est la charge électrique réelle totale située à l'intérieur de la surface fermée (S)

4) Expressions de l'induction électrique $\vec{D}(M)$ et du champ électrique $\vec{E}(M)$:

On applique le théorème de Gauss généralisé à une surface sphérique de centre O et de rayon r (surface représentée en couleur rouge dans la figure ci-dessous).



En tout point M de la surface (S) de Gauss on a : $\begin{cases} \vec{D}(M) = D(r).\vec{e}_r \\ d\vec{S}(M) = dS.\vec{e}_r \end{cases}$

L'induction électrique D(M), qui ne dépend que de **r**, est donc constante en tout point M de la surface sphérique de Gauss de rayon **r**. Dans ce cas l'intégrale du théorème de Gauss généralisé s'écrit :

$$\oiint_S \vec{D}(M).d\vec{S} = \oiint_S D(M).dS = D(M)\oiint_S dS = D(M).4\pi.r^2 = Q_{tot}^{réelle}$$

L'expression de l'induction est donc :

$$D(M) = \frac{Q_{tot}^{réelle}}{4\pi.r^2}$$

Soit en notation vectorielle:

$$\vec{D}(M) = \frac{Q_{tot}^{réelle}}{4\pi.r^2}.\vec{e}_r$$

• à l'intérieur de la sphère de rayon R, contenant la charge Q_0 **(** $r < R$):

$$Q_{tot}^{réelle} = \rho_0.V = \rho_0.\frac{4\pi.r^3}{3} = \frac{r^3}{R^3}Q_0$$

R étant le rayon de la sphère de Gauss et $\rho_0 = \dfrac{3Q_0}{4\pi.R^3}$ (déterminé dans la question **2)**, d'où :

$$\vec{D}(M) = \frac{Q_0}{4\pi.R^3}.r.\vec{e}_r$$

Le champ électrique correspondant s'obtient à partir de la relation $\vec{D}(M) = \varepsilon_0\vec{E}(M)$ **:**

$$\vec{E}(M) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0.R^3}.r.\vec{e}_r$$

• à l'intérieur du milieu diélectrique I ($a < r < b$**):** $Q_{tot}^{réelle} = Q_0$

$$\vec{D}_I(M) = \frac{Q_0}{4\pi.r^2}\vec{e}_r$$

Le champ électrique correspondant est :

$$\vec{E}_I(M) = \frac{\vec{D}_I(M)}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}.r^2}\vec{e}_r$$

• à l'intérieur du milieu diélectrique II ($b < r < c$ **)** : $Q_{tot}^{réelle} = Q_0$

$$\vec{D}_{II}(M) = \frac{Q_0}{4\pi.r^2}\vec{e}_r$$

Le champ électrique correspondant est :

$$\vec{E}_{II}(M) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}.r^2}\vec{e}_r$$

5) Les deux milieux diélectriques sont parfaits, donc le vecteur polarisation est donné par l'expression suivante :

$$\vec{P}_i(M) = \varepsilon_0(\varepsilon_{ri} - 1)\vec{E}_i$$

avec i=I pour le milieu I et i=II pour le milieu II

•dans le milieu diélectrique I :

$$\vec{P}_I(M) = \frac{(\varepsilon_{r1} - 1)Q_0}{4\pi\varepsilon_{r1}r^2}\vec{e}_r$$

• dans le milieu diélectrique II :

$$\vec{P}_{II}(M) = \frac{(\varepsilon_{r2} - 1)Q_0}{4\pi\varepsilon_{r2}.r^2}\vec{e}_r$$

6) Densité volumique de charge fictive :

Par définition, la densité volumique de charge fictive est donnée par :

$$\rho_P(M) = -div.\vec{P}(M)$$

On utilise l'expression de la divergence en coordonnées sphériques suivante:

$$div.\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(P_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_\varphi}{\partial\varphi}$$

Remarque : Dans les deux milieux diélectriques, les composantes P_θ et P_φ du vecteur polarisation sont nulles (voir question 5) et que seules les composantes Pr sont non nulles :

$$\vec{P}_I = \begin{cases} P_{I_r} = \dfrac{(\varepsilon_{r1}-1)Q_0}{4\pi\varepsilon_{r1}.r^2} \\ P_{I\theta} = 0 \\ P_{I\varphi} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{P}_{II} = \begin{cases} P_{II_r} = \dfrac{(\varepsilon_{r2}-1)Q_0}{4\pi\varepsilon_{r2}.r^2} \\ P_{II\theta} = 0 \\ P_{II\varphi} = 0 \end{cases}$$

• dans le milieu diélectrique I :

$$\rho_{PI}(M) = -div.\vec{P}_I(M) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_{Ir}\right) = 0$$

• dans le milieu diélectrique II :

$$\rho_{PII}(M) = -div.\vec{P}_{II}(M) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_{IIr}\right) = 0$$

7) Densités surfaciques de charge fictive au niveau des surfaces délimitant les deux milieux diélectriques :

Par définition, la densité surfacique de charge fictive est :

$$\sigma_P(M) = \vec{P}(M \in S).\vec{n}_{ext}(M \in S)$$

• au niveau de la surface (Sa) de rayon a :

$$\sigma_a(M) = \vec{P}_I(r = a).(-\vec{e}_r) = -\frac{(\varepsilon_{r1}-1)Q_0}{4\pi\varepsilon_{r1}.a^2}$$

• au niveau de la surface (Sb) de rayon b :

$$\sigma_b(M) = \vec{P}_I(r = b).\vec{e}_r + \vec{P}_{II}(r = b).(-\vec{e}_r) = \frac{(\varepsilon_{r1}-1)Q_0}{4\pi\varepsilon_{r1}.b^2} - \frac{(\varepsilon_{r2}-1)Q_0}{4\pi\varepsilon_{r2}.b^2}$$

• au niveau de la surface (Sc) de rayon c :

$$\sigma_c(M) = \vec{P}_{II}(r = c).\vec{e}_r = \frac{(\varepsilon_{r2}-1)Q_0}{4\pi\varepsilon_{r2}.c^2}$$

8) La densité volumique d'énergie électrostatique est donnée par :

$$\omega_{ei} = \frac{dWei}{dv} = \frac{1}{2.}\varepsilon_0\varepsilon_{ri}Ei^2(M)$$

L'énergie électrostatique est :

$$Wei = \iiint_v \omega_{ei}.dv = \frac{1}{2.}\varepsilon_0\varepsilon_{ri}\iiint_v Ei^2(M).dv$$

Où i=I pour le milieu I et i=II pour le milieu II, et $dv = r^2\sin\theta dr d\theta\, d\varphi$ l'élément de volume en coordonnées sphériques.

• dans le milieu diélectrique I :

$$\mathrm{WeI} = \frac{1}{2.}\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\iiint_{v} E_I^2(M).dv = \frac{1}{2.}\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\iiint_{v}\left(\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}.r^2}\right)^2.dv = \varepsilon_0\varepsilon_{r1}\frac{Q_0^2}{32\pi^2(\varepsilon_0\varepsilon_{r1})^2}\int_a^b\frac{dr}{r^2}\int_0^{\pi}\sin^2\theta.d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$= \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}.}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

• dans le milieu diélectrique II est :

$$\mathrm{WeII} = \frac{1}{2.}\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\iiint_{v} E_{II}^2(M).dv = \frac{1}{2.}\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\iiint_{v}\left(\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}.r^2}\right)^2.dv = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}\frac{Q_0^2}{32\pi^2(\varepsilon_0\varepsilon_{r2})^2}\int_b^c\frac{dr}{r^2}\int_0^{\pi}\sin^2\theta.d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$= \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}.}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$$

===