

Corrigé de l'examen de rattrapage – effectué en octobre 2020

1) Question de cours (réponse (d)) :

Dans un milieu aimanté parfait les courants électriques réels et d'aimantation existent simultanément, c'est-à-dire la présence de l'un des courants entraîne la présence de l'autre.

2) L'expression du théorème d'Ampère généralisé appliqué à un contour fermé (Γ) est donnée par :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{tot}}^{\text{réel}}$$

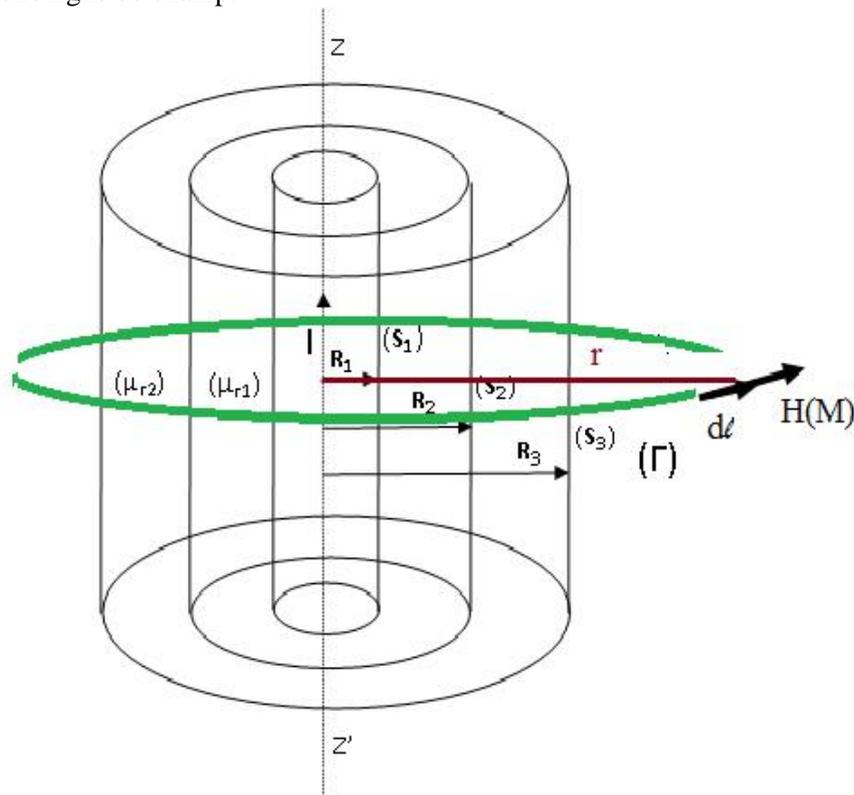
3) Déterminer l'excitation magnétique $\vec{H}(\mathbf{M})$, puis le champ d'induction magnétique $\vec{B}(\mathbf{M})$ dans les régions $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ et $R_2 < r < R_3$.

En raison de la symétrie cylindrique et de l'invariance de la distribution du courant, en tout point $\mathbf{M}(r, \theta, z)$ on a :

$$\vec{H}(\mathbf{M}) = H(r) \cdot \vec{e}_{\theta} \quad \text{et} \quad \vec{B}(\mathbf{M}) = \vec{B}(r) \cdot \vec{e}_{\theta}$$

Où \vec{e}_{θ} est le vecteur de la base en coordonnées cylindriques ($\vec{e}_r, \vec{e}_{\theta}, \vec{e}_z$)

Ces deux expressions montrent que les lignes de champ magnétique sont des cercles d'axe $z'z$, ce qui conduit à choisir comme courbe fermée d'Ampère un cercle, de centre situé sur l'axe $z'z$ et de rayon r , confondu avec une ligne de champ.



L'application du théorème d'Ampère généralisé permet d'écrire :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H}(M) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\Gamma} H(r) \cdot \vec{e}_r \cdot d\ell \cdot \vec{e}_r = \oint_{\Gamma} H(r) \cdot d\ell = H(r) \oint_{\Gamma} d\ell = H(r) \cdot 2\pi r = I_{\text{tot}}^{\text{réel}}$$

Car en tout point M de la courbe d'Ampère de rayon r fixé, on a :

$$\begin{cases} \vec{H}(M) = H(r) \cdot \vec{e}_r \\ d\vec{\ell} = d\ell \cdot \vec{e}_r \\ H(r) \text{ est constant} \end{cases}$$

D'où l'expression de $\vec{H}(M)$ à appliquer dans les régions de l'espace :

$$\vec{H}(M) = \frac{I_{\text{tot}}^{\text{réel}}}{2\pi r} \vec{e}_r$$

Le champ d'induction magnétique $\vec{B}(M)$ se déduit à partir de la relation : $\vec{B}(M) = \mu_0 \vec{H}(M)$

Dans la région $r < R_1$ (milieu vide) : $I_{\text{tot}}^{\text{réel}} = I$

$$\vec{H}(M) = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_r$$

$$\mu_r = 1 : \quad \vec{B}(M) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_r$$

Dans la région $R_1 < r < R_2$ (milieu aimanté I) : $I_{\text{tot}}^{\text{réel}} = I$

$$\vec{H}(M) = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_r$$

$$\mu_r = \mu_{r1} : \quad \vec{B}(M) = \mu_0 \mu_{r1} \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_r$$

Dans la région $R_2 < r < R_3$ (milieu aimanté II) : $I_{\text{tot}}^{\text{réel}} = I$

$$\vec{H}(M) = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_r$$

$$\mu_r = \mu_{r2} : \quad \vec{B}(M) = \mu_0 \mu_{r2} \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_r$$

4) L'expression de l'aimantation dans un milieu aimanté parfait est :

$$\vec{J}(M) = (\mu_r - 1) \vec{H}(M)$$

Dans le milieu I, $R_1 < r < R_2$: $\vec{J}_1(M) = (\mu_{r1} - 1) \vec{H}_1(M) = (\mu_{r1} - 1) \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_r$

Dans le milieu II, $R_2 < r < R_3$: $\vec{J}_2(M) = (\mu_{r2} - 1) \vec{H}_1(M) = (\mu_{r2} - 1) \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_r$

5) Expressions des densités du courant d'aimantation :

Densité volumique du courant fictif : $\vec{j}_a = \vec{\nabla} \wedge \vec{J}(M)$

On appliquera l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Densité surfacique du courant fictif : $\vec{k}_{aS} (M \in S) = \vec{J}(M \in S) \wedge \vec{n}_{ext}$

6) Densités du courant fictif équivalent aux deux milieux aimantés :

Densité volumique du courant fictif dans le milieu I, $R_1 < r < R_2$:

$$\vec{j}_{a1}(M) = \vec{0}$$

Densité volumique du courant fictif dans le milieu II, $R_2 < r < R_3$:

$$\vec{j}_{a2}(M) = \vec{0}$$

Densité surfacique du courant fictif à la surface S_1 : $\vec{n}_{ext}(M) = -\vec{e}_r$

$$\vec{k}_{aS1}(M \in S_1) = \vec{J}_1(M \in S_1) \wedge (-\vec{e}_r) = \frac{(\tilde{r}_1 - 1) \cdot I}{2fR_1} \vec{e}_\theta \wedge (-\vec{e}_r) = \frac{(\tilde{r}_1 - 1) \cdot I}{2fR_1} \vec{e}_z$$

Densité surfacique du courant fictif à la surface S_2 :

$$\begin{aligned} \vec{k}_{aS2}(M \in S_2) &= \vec{J}_1(M \in S_2) \wedge \vec{e}_r + \vec{J}_2(M \in S_2) \wedge (-\vec{e}_r) = \frac{(\tilde{r}_1 - 1) \cdot I}{2fR_2} \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r + \frac{(\tilde{r}_2 - 1) \cdot I}{2fR_2} \vec{e}_\theta \wedge (-\vec{e}_r) \\ &= \frac{(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) \cdot I}{2fR_2} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Densité surfacique du courant fictif à la surface S_3 :

$$\vec{k}_{aS3}(M \in S_3) = \vec{J}_2(M \in S_3) \wedge \vec{e}_r = \frac{(\tilde{r}_2 - 1) \cdot I}{2fR_3} \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = \frac{(\tilde{r}_2 - 1) \cdot I}{2fR_3} \vec{e}_z$$

7) Densité volumique d'énergie magnétique en présence d'un champ magnétique, dans le cas d'un milieu parfait :

$$\tilde{S}_m(M) = \frac{1}{2} \frac{B^2(M)}{\tilde{\mu}_0 \tilde{\mu}_r}$$

8) Energie magnétique emmagasinée dans chacun des milieux aimantés :

$$W_m = \iiint_V \tilde{S}_m(M) \cdot dV = \frac{1}{2 \tilde{\mu}_0 \tilde{\mu}_r} \iiint_V B^2(M) \cdot dV$$

On utilisera l'élément de volume en coordonnées cylindriques : $dV = r dr \cdot d\theta \cdot dz$

Dans le milieu I : $R_1 < r < R_2, 0 < \theta < 2\pi, 0 < z < \ell$

$$W_{m1} = \frac{\tilde{0} \tilde{r}_1 \cdot \ell \cdot I^2}{4f} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Dans le milieu II : $R_2 < r < R_3, 0 < u < 2f, 0 < z < \ell$

$$W_{m2} = \frac{\tilde{0} \tilde{r}_2 \cdot \ell \cdot I^2}{4f} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)$$

=====