Chapitre IV- Espaces préhilbertiens réels

Dans tout ce chapitre, on considère que $K = \mathbb{R}$.

1 Formes quadratiques positives et définie positives

Definition 1.1.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire.
1) q est dite positive si $q(x) \geq 0$, $\forall x \in E$.
2) q est dite définie positive si $q(x) > 0$, $\forall x \in E$ tel que $x \neq 0$.
3) φ est dite positive, si q est positive.
4) φ est dite définie positive, si q est définie positive.

Proposition 1.2.
Soit E un espace vectoriel et q une forme quadratique sur E. Alors q est définie positive si et seulement si q est définie et q est positive.

Preuve.
Supposons que q est définie positive. D'ou q est positive. Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$. Si $x \neq 0$, alors $q(x) > 0$ ce qui est absurde. D'ou $x = 0$. Ce qui montre que q est définie. L'inverse est facile.

Théoreme 1.3. (Inégalité de Cauchy-Schwartz)
Soit q une forme quadratique **positive** sur un espace vectoriel E et soit φ sa forme polaire. Alors

$$\varphi(x,y)^2 \leq q(x)q(y).$$

Si de plus q est **définie positive**, alors $\varphi(x,y)^2 = q(x)q(y)$ si et seulement si x et y sont liés.

Preuve.
Soient $x, y \in E$. Supposons que $q(x) \neq 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Le réel $q(y+tx) \geq 0$. D'ou

$$q(y+tx) = t^2 q(x) + 2t\varphi(x,y) + q(y) \geq 0.$$

Par suite le déterminant réduit de l'equation de deuxième degré en t,

$$\Delta = \varphi(x,y)^2 - q(x)q(y) \leq 0$$

garde un signe constant négative et alors $\varphi(x,y)^2 \leq q(x)q(y)$. Si $q(x) = 0$, alors

$$q(y+tx) = 2t\varphi(x,y) + q(y) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

par suite $\varphi(x,y) = 0$. Par conséquent, $\varphi(x,y)^2 \leq q(x)q(y)$.
Supposons que q est définie positive. Soient $x, y \in E$. Si $x = 0$, il n y a rien à montrer. Supposons que $x \neq 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\varphi(x,y)^2 = q(x)q(y) \Leftrightarrow \Delta = \varphi(x,y)^2 - q(x)q(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{l'equation de deuxième degré en } t \text{ admet une unique solution } t_0 = -\frac{\varphi(x,y)}{q(x)}$$

$\Rightarrow q(y + t_0 x) = 0 \Rightarrow y + t_0 x = 0$ (puisque q est définie positive) $\Rightarrow x, y$ sont liés. Inversement, supposons que x, y sont liés. D'ou il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $y = tx$. D'ou

$$\varphi(x,y)^2 = \varphi(x,tx)^2 = t^2\varphi(x,x)^2 = t^2 q(x)^2 = q(x)(t^2 q(x)) = q(x)q(tx) = q(x)q(y).$$

D'ou le résultat.

Le résultat suivant est deja demontré. On le rappelle ici.

Corollaire 1.4.
Une forme quadratique q est définie positive si et seulement si q est positive et non dégénérée.

Application.
La forme quadratique suivante est-elle definie positive:

$$q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + \frac{1}{8}z^2 + 4xy + yz?$$

On a $q(x,y,z) = (x^2 + 4xy) + 6y^2 + \frac{1}{8}z^2 + yz = (x+2y)^2 + 2y^2 + yz + \frac{1}{8}z^2$.
D'ou $q(x,y,z) = (x+2y)^2 + 2(y^2 + 2y\frac{1}{4}z + (\frac{1}{4}z)^2) = (x+2y)^2 + 2(y + \frac{1}{4}z)^2$.

Par suite q est positive. Aussi $q(x,y,z)=0$ si et seulement si $x+2y=0$ et $y+\dfrac{1}{4}z=0$ si et seulement si $x=-2y$ et $z=-4y$. Par suite le cone isotrope de q est $C(q)=\text{vect}\{(-2,1,-4)\}\neq\{0\}$. Par conséquent, q n'est pas définie positive.

Definition 1.5.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $M=(a_{ij})_{i,j}$ **une matrice carrée symetrique réelle**. On appelle **matrice mineure** de M la matrice $M_k=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$. Il y a n matrices mineures $M_1, M_2, \cdots, M_n$ de M. Les déterminants $\det(\mathbf{M_1}), \det(\mathbf{M_2}), \cdots, \det(\mathbf{M_n})$ des matrices mineures s'appellent **les mineurs principaux** de M. Si $M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ . & . & \cdots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ alors les mineurs principaux de M sont:

$$|a_{11}|, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ . & . & \cdots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Théorème 1.6. (Critère de Sylvester)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. Alors, une forme quadratique q sur E est **définie positive** (ou une matrice symetrique à coefficients dans $\mathbb{R}$ est définie positive) si et seulement si **tous les mineurs principaux** de $M(q,B)$ sont **strictement positifs.**

Preuve.

Soit $B=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ une base de E. Soient $B_k=\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ et $E_k=\text{vect}(B_k)$ pour $k=1,\cdots,n$. Soit $q_k: E_k\longrightarrow\mathbb{R}$ la restriction de q à E_k, c'est à dire, $q_k(x)=q(x)$, $\forall x\in E_k$. Remarquez alors que $\forall k=1,\cdots,n$, q_k est une forme quadratique sur E_k. Notez bien que q est définie positive si et seulement si q_k est définie positive $\forall k=1,\cdots,n$. Le problème revient donc à montrer que q est une forme quadratique définie positive si et seulement si $\det(M(q_1,B_1)),\cdots,\det(M(q_n,B_n))$ sont strictement positifs. En effet, soit $B'=\{e'_1,\cdots,e'_n\}$ une base orthogonale de q. D'ou la matrice $M(q,B')$ est diagonale et il existe une matrice inversible P telle que

$$M(q, B') = {}^tPM(q, B)P.$$

Par suite $\det(M(q, B')) = \det({}^tP) \det(M(q, B)) \det(P) = \det(P)^2 \det(M(q, B))$. D'ou $\det(M(q, B)) > 0$ si et seulement si $\det(M(q, B')) > 0$. On peut donc supposer que B est une base orthogonale et que, par suite, $M(q, B)$ est diagonale et la diagonale est formée des $q(e_i) = \varphi(e_i, e_i)$. D'ou

$$\det(M(q, B)) = \prod_{i=1}^{n} q(e_i).$$

Aussi, on note que

$$q(x) = \varphi(x,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 q(e_i), \forall x \in E.$$

D'ou $q(x) > 0, \forall x \in E, x \neq 0$ si et seulement si $q(e_i) > 0, \forall i = 1, \cdots, n$. Par conséquent, q est définie positive si et seulement si $q(e_i) > 0, \forall i = 1, \cdots, n$ si et seulement si $\det(M(q_1, B_1)), \cdots, \det(M(q_n, B_n)) > 0$ ce qui achève la démonstration du théorème.

Application.

On considère la forme quadratique q_a, $\forall a \in \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}^3$ de matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Montrer que q_a est définie positive si et seulement si $a > 1$.

En effet, les mineurs principaux de cette matrice sont:

$$|1|, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

On a $|1| = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2$.

D'ou q_a est définie positive si et seulement si $a > 1$.

Definition 1.7.

1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est bilinéaire symetrique définie positive est appelée un **produit scalaire**.

Un produit scalaire φ est donc une application définie de $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes:

a) φ est une forme bilinéaire symetrique.

b) $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$.

c) $\forall x \in E$, $\varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

2) Un produit scalaire sera noté $(.|.)$ et donc $\varphi(x, y)$ sera noté $x|y$.

3) L'application $x \longrightarrow \sqrt{\varphi(x, x)}$ est appelée **norme euclidienne** et notée $x \longrightarrow ||x||$.

4) Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire φ est appelé **espace préhilbertien réel** et noté (E, φ).

- Lorsqu'un espace préhilbertien (E, φ) est complet on l'appelle **espace de Hilbert**.

- Lorsqu'un espace préhilbertien (E, φ) est de dimension finie non nulle on dit que (E, φ) est un **espace euclidien**.

Théorème 1.8.

Soit $(.|.)$ un produit scalaire sur E et $||.||$ la norme euclidienne associée. Alors:

1) $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2x|y$.

2) $||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2x|y$.

3) $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ Identité du parallélogramme.

4) $x|y = \dfrac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2)$ Identité de polarisation.

5) $\forall x, y \in E$, $|(x|y)| \leq ||x||.||y||$ Inégalité de Cauchy-Schwarz.

6) $\forall x, y \in E$, $|(x|y)| = ||x||.||y||$ si et seulement si x, y sont liés.

7) $\forall x, y \in E$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ Inégalité de Minkowski.

8) $\forall x, y \in E$, $||x + y|| = ||x|| + ||y|| \Leftrightarrow x, y$ sont liés.

2-Isomorphismes d'espaces préhilbertiens réels

Definition 2.1.

1) Soient (E_1, φ_1) et (E_2, φ_2) deux espaces préhilbertiens réels.

On appelle **isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels** tout isomorphisme d'espaces vectoriels $f : E_1 \longrightarrow E_2$ qui conserve le produit scalaire:

$$\forall x, y \in E_1,\ \varphi_2(f(x), f(y)) = \varphi_1(x, y).$$

2) Les espaces (E_1, φ_1) et (E_2, φ_2) sont dits **isomorphes** s'il existe un **isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels** $f : (E_1, \varphi_1) \longrightarrow (E_2, \varphi_2)$.
3) Un isomorphisme $f : (E, \varphi) \longrightarrow (E, \varphi)$ d'espaces préhilbertiens réels de (E, φ) vers lui même est appelé **autormorphisme orthogonal**.

Théorème 2.2.
1) Si f, g sont deux isomorphismes d'espaces préhilbertiens réels, alors $f \circ g$ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels.
2) Si $f : (E_1, \varphi_1) \longrightarrow (E_2, \varphi_2)$ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels, alors $f^{-1} : (E_2, \varphi_2) \longrightarrow (E_1, \varphi_1)$ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels.
3) $\mathrm{id}_E : (E, \varphi) \longrightarrow (E, \varphi)$ est un automorphisme orthogonal.
4) Soit (E, φ) un espace préhilbertien réel. Alors l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des authomorphismes orthogonaux de E est un sous groupe du groupe $GL(E)$ des automorphismes de E. $\mathcal{O}(E)$ s'appelle **le groupe orthogonal** de E.

Preuve. Elle est claire.

Proposition 2.3.
Soit $f : (E_1, \varphi_1) \longrightarrow (E_2, \varphi_2)$ une application linéaire **surjective** d'espaces préhilbertiens réels. Alors f est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels si et seulement si f conserve les normes, c'est à dire $||f(x)||_2 = ||x||_1$, $\forall x \in E$.

Preuve.
Supposons que f conserve les normes. Soit $x \in E$. On a

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ||f(x)||_2 = 0 \Leftrightarrow ||x||_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

D'ou f est injective et par suite f est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soient $x, y \in E_1$. D'où

$$\varphi_2(f(x+y), f(x+y)) = \varphi_2(f(x), f(x)) + \varphi_2(f(y), f(y)) + 2\varphi_2(f(x), f(y)).$$

Or

$$\varphi_2(f(x+y), f(x+y)) = \varphi_1(x+y, x+y) = \varphi_1(x, x) + \varphi_1(y, y) + 2\varphi_1(x, y).$$

Comme $\varphi_2(f(x), f(x)) = \varphi_1(x, x)$ et $\varphi_2(f(y), f(y)) = \varphi_1(y, y)$, on obtient que $\varphi_2(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$. Par conséquent f est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens. Inversement, supposons que f est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens. Soit $x \in E$. D'ou

$$||f(x)||_2 = \sqrt{\varphi_2(f(x), f(x))} = \sqrt{\varphi_1(x, x)} = ||x||_1.$$

Par suite f conserve les normes.

Corollaire 2.4.
Soit $(E, .|.)$ un espace préhilbertien réel et u un **automorphisme** de E. Alors les propositions suivantes sont equivalentes:
1) u est un automorphisme orthogonal;
2) u conserve le produit scalaire;
3) u conserve la norme.

Preuve. Elle est directe.

3-Orthogonalité

Definition 3.1.
Soit E un espace préhilbertien réel et $||.||$ la norme euclidienne associée.
- Un vecteur x de E est dit **unitaire** lorsque $||x|| = 1$.
- Un vecteur x est dit **orthogonal** à y lorsque $x|y = 0$ et on note $x \perp y$.
- Soit A une parti de E. On appelle **Orthogonal** de E l'ensemble

$$A^{\perp} := \{x \in E : x \perp a, \forall a \in A\}.$$

- Deux sous espaces vectoriels F et G de E sont dits **orthogonaux** lorsque $\forall x \in F, \forall y \in G$, on a $x \perp y$.

Théorème 3.2. (Théorème de Pythagore)
Soit $(E, .|.)$ un espace préhilbertien réel et $||.||$ la norme euclidienne associée. Alors, $\forall x, y \in E$,

$$x \perp y \Leftrightarrow ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Le résultat suivant rassemble les propriétés de l'orthogonal qui ont été déja vu lors de l'étude des formes bilinéaires symetriques (non dégénérées).

Proposition 3.3.
Soit $(E, .|.)$ un espace préhilbertien réel. Soient A et B deux parties de E. Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E. Alors
1) $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel de E.
2) $A^{\perp} \subseteq (\text{vect}(A))^{\perp}$.
3) $A \subseteq A^{\perp\perp}$.
4) $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.
5) $A \subseteq B^{\perp} \Leftrightarrow B \subseteq A^{\perp}$.
6) $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.
7) $\{0\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0\}$.
8) F et G sont orthogonaux si et seulement si $F \subseteq G^{\perp}$ si et seulement $G \subseteq F^{\perp}$.

Preuve. La démonstration est immediate.

4-Familles Orthogonales et familles orthonormales

Definition 4.1.
Soit $(E, .|.)$ un espace préhilbertien réel et $||.||$ la norme associée.
- Une famille $(e_i)_i$ de E est **orthogonale** si:

$$(\forall i \in I,\ \forall j \in I) \quad i \neq j \Rightarrow e_i|e_j = 0.$$

- Une famille $(e_i)_i$ de E est **orthonormale** si:

$$(\forall i \in I,\ \forall j \in I) \quad e_i|e_j = \delta_i^j.$$

Proposition 4.2.
Soit $(E, .|.)$ un espace préhilbertien réel (non nul) et $||.||$ la norme associée.
1) Si E est de dimension finie, alors E admet une base orthonormale.
2) Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
3) Toute famille orthonormale est libre.
4) (Relation de Pythagore) Soit $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une famille orthogonale. Alors

$$||\sum_{i=1}^{n} e_i||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2.$$

Preuve.
1) Supposons que E est de dimension finie n. On sait E admet une base orthogonale $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$. D'ou $\left\{\frac{e_1}{||e_1||}, \cdots, \frac{e_n}{||e_n||}\right\}$ est une base orthonormale de E.
Le reste de la démonstration est directe.

Definition 4.3.
Soit $(E, .|.)$ un espace préhilbertien réel. Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont des **supplémentaires orthogonaux** lorsque

$$E = F \oplus G \text{ et } F \perp G.$$

Proposition 4.4.
Soit $(E, .|.)$ un espace préhilbertien réel. Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E.
1) Si F et G sont des supplémentaires orthogonaux, alors

$$G = F^{\perp} \text{ et } F = F^{\perp\perp}.$$

2) F admet un supplémentaire orthogonal si et seulement si $F \oplus F^{\perp} = E$.

Preuve.
1) Par hypothése on a: $E = F \oplus G$ et $F \perp G$. On a $F \perp G$, d'ou $G \subseteq F^{\perp}$. Par suite $F + F^{\perp} = E$. Or $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, par conséquent $F \oplus F^{\perp} = E$.

Maintenant, soit $x \in F^{\perp}$. D'ou $x = a+b$ avec $a \in F$ et $b \in G$. Donc $x-b = a$ avec $x-b \in F^{\perp}$ puisque $G \subseteq F^{\perp}$, et $a \in F$. Par suite $x-b = a \in F \cap F^{\perp} = \{0\}$. D'ou $x = b \in G$. Par conséquent, $F^{\perp} \subseteq G$ et donc $G = F^{\perp}$. Aussi on obtient $F = G^{\perp}$. Ce qui donne $F = G^{\perp} = F^{\perp\perp}$.
2) Elle est directe à partir de (1).

Definition 4.5.
Soient E un espace vectoriel et $p : E \longrightarrow E$ un endomorphisme.
1) On dit que p est un **projecteur** de E lorsque $p \circ p = p$.
2) Supposons que E est espace préhilbertien réel.

a) On dit que p est un **projecteur orthogonal** lorsque $\text{im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont des supplémentaires orthogonaux, c'est à dire $\text{im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E$ et $\text{im}(p) \perp \text{Ker}(p)$.

b) Si F est un sous espace vectoriel de E qui admet **un supplémentaire orthogonal**, alors le seul projecteur orthogonal d'image F est noté $p_F : E \longrightarrow E$ s'appelle **la projection orthogonale** de E sur F et il est définie par,

$$\forall x = a + b, \text{ avec } a \in F \text{ et } b \in F^{\perp}, p_F(x) = a.$$

c) Soit $a \in E$. La distance de a à F est l'entier

$$d(a, F) = \inf\{d(a, x) : x \in F\} = \inf\{||a - x|| : x \in F\}.$$

Théorème 4.6.
Soient $(E, .|.)$ un espace préhilbertien réel et $||.||$ la norme associée. Soient $a \in E$ et F un sous espace vectoriel de E. Alors:
1) Pour $x \in F$, $||a - x|| = d(a, F) \Leftrightarrow a - x \in F^{\perp}$.
2) Il existe **au plus un vecteur** x qui vérifie $||a - x|| = d(a, F)$.
3) Si F admet un supplémentaire orthogonal, alors

$$d(a, F) = ||a - p_F(a)|| \text{ et } d(a, F)^2 = ||a||^2 - ||p_F(a)||^2.$$

Preuve.
1) Soit $x \in F$. Supposons que $||a - x|| = d(a, F)$. Soient $y \in F$ et $r \in \mathbb{R}$. On a

$$||a - (x + ry))||^2 - ||a - x||^2 = -2r((a - x)|y) + r^2||y||^2.$$

Comme $x + ry \in F$, on obtient $||a - x|| = d(a, F) \leq ||a - (x + ry)||$. Par suite pour tout $r \in \mathbb{R}$, on a

$$-2r((a - x)|y) + r^2||y||^2 \geq 0.$$

Si $r > 0$, on obtient en simplifiant par r,

$$-2((a - x)|y) + r||y||^2 \geq 0,$$

d'ou $2((a - x)|y) \leq r||y||^2$, $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$. Par suite, en faisant tendre r vers 0, on aura $((a - x)|y) \leq 0$. Si $r < 0$, on obtient

$$-2((a - x)|y) + r||y||^2 \leq 0,$$

d'ou $2((a - x)|y) \geq r||y||^2$, $\forall r \in \mathbb{R}_-^*$. Par suite, en faisant tendre r vers 0, on aura $((a - x)|y) \geq 0$. Par conséquent, $((a - x)|y) = 0$. D'ou $a - x \in F^{\perp}$. Inversement, on suppose que $a - x \in F^{\perp}$. Soit $y \in F$. On a $||a - y||^2 = ||(a - x) + (x - y)||^2$. D'ou

$$||a - y||^2 = ||a - x||^2 + 2(a - x|x - y) + ||x - y||^2.$$

Or $x-y \in F$ et $a-x \in F^{\perp}$, d'ou $(a-x|x-y)=0$. Par suite

$$||a-y||^2 = ||a-x||^2 + ||x-y||^2.$$

D'ou $||a-x||^2 \leq ||a-y||^2$, ce qui donne $||a-x|| \leq ||a-y||$ pour tout $y \in F$. Par conséquent, $||a-x|| \leq d(a,F)$. Comme $d(a,F) \leq ||a-x||$, on obtient l'egalité.
2) Soient $x, x' \in F$ tel que $a-x, a-x' \in F^{\perp}$. D'où

$$(x-a)-(x'-a) = x-x' \in F^{\perp}.$$

Pars suite $x-x' \in F \cap F^{\perp} = \{0\}$. D'ou $x=x'$.
3) On suppose que F admet un supplémentaire orthogonal. D'ou $F \oplus F^{\perp} = E$. On a $a = p_F(a) + (a-p_F(a))$ et $a - p_F(a) \in F^{\perp}$. D'où, d'aprés (1), $d(a,F) = ||a-p_F(a)||$ et $||a||^2 = ||p_F(a)||^2 + ||a-p_F(a)||^2 = ||p_F(a)||^2 + d(a,F)^2$.

Théorème 4.7.
Soit $(E,.|.)$ un espace préhilbertien réel. Alors tout sous espace vectoriel de dimension finie de E admet un supplémentaire orthogonal.

Preuve.
Soit $\{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$ une base orthonormale de F. Soit $x \in E$ et soit

$$y = (x|e_1)e_1 + (x|e_2)e_2 + \cdots + (x|e_p)e_p.$$

On a donc $y|e_i = x|e_i$ pour $i = 1, \cdots, p$. Par suite $(x-y)|e_i = 0$ pour $i = 1, \cdots, p$ et donc $x - y \in F^{\perp}$. D'où $x \in F + F^{\perp}$. Par conséquent, $E = F + F^{\perp}$. Comme $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, on obtient $E = F \oplus F^{\perp}$. Il s'ensuit que $F^{\perp}$ est un supplémentaire orthogonal de F.

Corollaire 4.8.
Soit $(E,.|.)$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie de E. Alors
1) $E = F \oplus F^{\perp}$.
2) $F = F^{\perp\perp}$.
3) Soit $\{e_1, \cdots, e_p\}$ une base orthonormale de F. Alors, $\forall x \in E$

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i$$

et

$$\sum_{i=1}^{p}(x|e_i)^2 \leq ||x||^2 \quad \textbf{(Inégalité de Bessel)}.$$

Preuve.

1) et 2) découlent du théorème précedent.

3) Elle provient de la démonstration du théorème précédent en remarquant que $y = p_F(x)$. De plus, $||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + d(x, F)^2$. Donc $||p_F(x)|| \leq ||x||$. L'inégalité de Bessel en découle facilement puisque la base $\{e_1, \cdots, e_p\}$ est orthonormale.