Ce document s'adresse aux étudiants en Master ANEDP.

Il contient les chapitres sur la contrôlabilité et sur l'observabilité du cours correspondant au module Analyse et Contrôle des Systèmes Localisés.

Ce document contient beaucoup plus de détails que le cours qui aurait du être dispensé devant les étudiants.

. Responsable du module K. Ztot

Table des matières

1 Contrôlabilité des systèmes dynamiques **3**

1.1 Contrôlabilité des systèmes continus 4

1.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires continus 6

1.2-1 Contrôlabilité sans contraintes 9

1.2-2 Ensembles contrôlables 14

1.2-3 Contrôlabilité avec contraintes 16

1.3 Contrôlabilité des systèmes continus non linéaires 22

1.4 Contrôlabilité des systèmes discrets 27

1.4-1 Définitions- Propriétés 27

1.4-2 Systèmes discrets linéaires 28

1.5 Stabilisabilité 31

1.5-1 Stabilisabilité des systèmes linéaires continus 32

1.5-2 Stabilisabilité des systèmes bilinéaires 36

2 Observabilité des systèmes dynamiques **39**

2.1 Observabilité 39

2.1-1 Définitions 39

2.1-2 Observabilité des systèmes linéaires continus 41

2.1-3 Observabilité des systèmes linéaires discrets 47

2.2 Détectabilité des systèmes linéaires 49

2.3 Dualité des systèmes linéaires 50

2.4 Observateur asymptotique des systèmes linéaires 55

Chapitre 1

Contrôlabilité des systèmes dynamiques

Dans ce chapitre nous discutons la question de contrôlabilité des systèmes dynamiques, principalement pour les systèmes linéaires bien que de nombreux résultats sont vrais dans le cas non linéaire.

La contrôlabilité est une propriété de base dans l'analyse des systèmes dynamiques. Il s'agit dans diverses applications de contrôler un système et d'imposer à celui ci un comportement souhaité, à titre d'exemple le problème d'amener le système d'un état initial x_0 à un état désiré x_d.
Dans un système contrôlé, la structure du contrôle peut être du type boucle fermée, c'est à dire dépendant de l'état, des informations disponibles (modèle, mesures,...). Il peut être du type boucle ouverte (une entrée dépendante que de l'état désiré et ne tenant pas compte de l'état courant). En pratique, il est souhaitable de contrôler un système donné par un contrôle en boucle fermée sur lequel les sorties réagissent et donc de limiter les imperfections et les erreurs dues aux simplifications faites lors de la réalisation du modèle du système, par exemple le choix d'un modèle linéaire approchant un système non linéaire.

1.1 Contrôlabilité des systèmes continus

En général, l'objectif du contrôle est d'amener un système d'un état initial $x(t_0) = x_0$ à un état désiré $x_d = x(t_1)$ à l'instant t_1 fini.
On considère le système continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ \\ x(t_0) = x_0 \in I\!R^n \end{cases} \tag{1.1-1}$$

où $f : I\!R^n \times U \longrightarrow I\!R^n$ est une fonction continûment différentiable avec $f(0,0) = 0$ et $u \in U = \{v : \text{fonction intégrable } /v(.) \in \Omega \subset I\!R^m\}$ l'ensemble des contrôles. Cet ensemble peut être non borné et sera noté U_u ($\Omega = I\!R^m$) et peut être borné noté U_b ($\|u\| \leq M$) ou U_{bb} pour les contrôles tels que $\mid u_i \mid = M$ et on a $U_{bb} \subset U_b \subset U_u$. Il convient alors de choisir l'ensemble de contrôle : ensemble des contrôles admissibles.
On note par $x(t, t_0, x_0, u(.))$ la solution du système (1.1-1), elle sera aussi notée $x[.]$.

Définition 1.1.1 .
Le point x_0 état du système (1.1-1) à l'instant t_0, est dit contrôlable à x_1 s'il existe $t_1 > t_0$ et $u \in U$ tels que $x(t_1, t_0, x_0, u(.)) = x_1$
x_1 est dit état atteignable à l'instant t_1 depuis x_0.
Le système (1.1-1) est complétement x_1 contrôlable si pour tout
$x_0 \in I\!R^n$, x_0 est contrôlable à x_1.

On note par $\mathcal{A}(t_1, x_0) = \{x(t_1, t_0, x_0, u(.))/u \in U\}$ l'ensemble des états atteignables à t_1 depuis x_0.
$\mathcal{A} = \bigcup\limits_{t>t_0} \mathcal{A}(t, x_0)$ l'ensemble des états atteignables depuis x_0.
On note par $\mathcal{R}(t_1) = \{x(t_1, t_0, 0, u(.))/u \in U\}$ l'ensemble des états atteignables à t_1 depuis 0; par la suite $x(t_1, t_0, 0, u(.))$ sera noé par $x(t_1, t_0, u(.))$.
$\mathcal{R} = \bigcup\limits_{t>t_0} \mathcal{R}(t,)$ l'ensemble des états atteignables depuis 0.
On définit l'ensemble contrôlable à l'instant t_1 comme l'ensemble des états initiaux x_0 pouvant être conduits à l'origine au temps t_1 à l'aide d'un contrôle admissible. Cet ensemble est noté par $\mathcal{C}(t_1, U, 0)$ pour les contrôles dans U,

mais généralement on supprime la dépendance de l'ensemble des contrôles et on le note $\mathcal{C}(t_1)$. L'ensemble contrôlable $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points pouvant être conduits à l'origine à tout instant fini, ainsi $\mathcal{C} = \bigcup_{t_1 \geq t_0} \mathcal{C}(t_1)$. Il est évident que $\mathcal{C} \subset I\!R^n$, et la propriété désirée du système est que $\mathcal{C} = I\!R^n$, de sorte que tous les états initiaux soient contrôlables à l'origine.

Remarque 1.1.1 .
Dans le cas d'un système autonome, si le contrôle $u(t)$ permet le transfert de x_0 à x_1 sur $[0, t_1]$ alors le contrôle $u(t - t_0)$ permet le transfert de x_0 à x_1 sur $[t_0, t_1 + t_0]$. Donc on peut se ramener à $t_0 = 0$.

Définition 1.1.2 .
Le système (1.1-1) est dit complétement contrôlable s'il peut être conduit d'un état initial quelconque fini x_0 vers n'importe quel autre état.

Propriété 1.1.1 .
1) Si $x_0 \in \mathcal{C}$ et si y est un point de la trajectoire de x_0 à 0, alors $y \in \mathcal{C}$.
2) $\mathcal{C}$ est connexe par arc.
3) Si $t_1 < t_2$ alors $\mathcal{C}(t_1) \subset \mathcal{C}(t_2)$.

Preuve

1) On suppose $x[t]$ la trajectoire du système excité par le contrôle $u(t)$ et $y = x[\tau]$, $x[t_1] = 0$. Alors, avec le contrôle $v(t) = u(t + \tau)$ et avec $x(0) = y$ on suit la même trajectoire comme celle à partir de x_0 et atteint l'origine à l'instant $t_1 - \tau$. Donc, $y \in \mathcal{C}$. Cela signifie que les trajectoires du système liant x_0 à 0 sont dans l'ensemble contrôlable.

2) Si x_0 et y_0 sont dans $\mathcal{C}$, alors d'après 1), il existe une trajectoire de chaque point à l'origine qui est dans $\mathcal{C}$. Par conséquent, il existe un arc dans $\mathcal{C}$ liant x_0 et y_0. Donc $\mathcal{C}$ est connexe par arcs.

Un argument similaire montre que $\mathcal{C}(t_1)$ est aussi connexe par arcs. Ceci montre que $\mathcal{C}$ n'est pas composé de parties disjointes.

3) Soit $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ avec le contrôle $u(t)$. On considère le contrôle $v = u$ sur $]0, t_1[$ et $v = 0$ sur $]t_1, t_2[$, alors $x[t_1] = 0$ et $x[t] = 0$ sur $[t_1, t_2]$ puisque $f(0,0) = 0$. Ceci implique que $x[t_2] = 0$, d'où $x_0 \in \mathcal{C}(t_2)$. ■

Remarque 1.1.2 .

Puisque $0 \in \mathcal{C}(0)$, *il vient que* $0 \in \mathcal{C}(t_1)$, *donc* $0 \in \mathcal{C}$.

Proposition 1.1.1 .

$\mathcal{C}$ *est ouvert si et seulement si* $0 \in \text{Int } \mathcal{C}$.

Preuve

Quand $\mathcal{C}$ est ouvert, il vient que $0 \in \text{Int } \mathcal{C}$.
Inversement, si $0 \in \text{Int}(\mathcal{C})$ il existe une boule $\mathcal{B}(0, r) \subset \mathcal{C}$.
Soit $x_0 \in \mathcal{C}$ et u le contrôle qui le ramène à 0 à l'instant t_1. Puisque f est continûment différentiable, au point x_0, il existe $r_0 > 0$ tel que si $y_0 \in \mathcal{B}(x_0, r_0)$ et $y[t]$ la solution correspondante on a $y[t_1] = y_1 \in \mathcal{B}(0, r) \subset \mathcal{C}$. Donc, il existe un contrôle $\hat{u}$ qui permet le transfert de y_1 à 0 à t_2.
Le contrôle v défini par

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & \text{pour } \ 0 < t < t_1 \\ \\ \hat{u}(t - t_1) & \text{pour } \ t_1 < t < t_1 + t_2 \end{cases}$$

permet alors le transfert de y_0 à 0 à l'instant $t_1 + t_2$. Par conséquent $y_0 \in \mathcal{C}(t_1 + t_2)$ et $\mathcal{B}(x_0, r_0) \subset \mathcal{C}$ pour tout $x_0 \in \mathcal{C}$ et donc $\mathcal{C}$ est ouvert. ■

Remarque 1.1.3 .

$\mathcal{C}(t_1)$ *n'est pas en général ouvert.*

1.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires continus

Le but de cette section est d'établir des techniques pour l'étude de la contrôlabilité des systèmes linéaires. Ces techniques sont ensuite utilisées pour

l'étude de la contrôlabilité de certains systèmes non linéaires.
On considère le système linéaire autonome

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.2-1}$$

où A est une matrice $n \times n$ à coefficients réels et B matrice $n \times m$ à coefficients réels et $u \in U$ supposé symétrique, convexe et vérifie la juxtaposition de contrôles, c'est à dire si $u_1 \in U[0, t_1]$ et $u_2 \in U[0, t_2]$ avec $t_1 \leq t_2$ alors le contrôle

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{sur } [0, t_1] \\ \\ u_2 & \text{sur } [t_1, t_2] \end{cases}$$

est dans U

Remarque 1.2.1 .
L'hypothèse faite sur U n'est pas toujours vérifiée, par exemple, si on considère l'espace U ensemble des fonctions continues.
Soit, par exemple, $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$, u fonction continue sur $[t_0, t_3]$, v fonction continue sur $[t_0, t_3]$ et tels que $u(t_2) = v(t_2)$ et $u(t_3) = v(t_3)$ alors la fonction

$$w = \begin{cases} u & \textit{sur } [t_0, t_1] \\ \\ v & \textit{sur }]t_1, t_3] \end{cases}$$

n'est pas continue.

Propriété 1.2.1 .
Soit $s < t$, on a

1. $\mathcal{C}(s) \subset \mathcal{C}(t)$, $\mathcal{R}(s) \subset \mathcal{R}(t)$.
2. *Si de plus U est un espace vectoriel alors $\mathcal{C}(s)$, $\mathcal{R}(t)$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$ sont des sous-espaces vectoriels de $I\!R^n$.*
3. *Si $\mathcal{C}(s) = \mathcal{C}(t)$ alors $\mathcal{C}(t) = \mathcal{C}(\tau)$, $\forall \tau > s$.*
   Si $\mathcal{R}(s) = \mathcal{R}(t)$ alors $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(\tau)$, $\forall \tau > s$.

Preuve

La seule propriété non triviale est 3).

Soit $\mathcal{R}(s) = \mathcal{R}(t)$, $s < t$.
Il existe un contrôle $v(.) \in U$ tel que $x(s, 0, v(.)) = x(t, 0, u(.))$.
En considérant $w(.) \in U$ tel que pour tout τ

$$w(\tau) = \begin{cases} v(\tau) & 0 \leq \tau < s \\ u(\tau + t - s) & s \leq \tau < t \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} x(t, 0, w(.)) &= x(t, s, x(s, 0, v(.)), u(. + (t - s))) \\ &= x(2t - s, t, x(t, 0, u(.)), u(.)) \\ &= x(2t - s, 0, u(.)) \in \mathcal{R}(2t - s). \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}(2t - s) = \mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(s)$ et par induction $\mathcal{R}(s + n(t - s)) = \mathcal{R}(s)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par conséquent d'après 1) on a $\mathcal{R}(\tau) = \mathcal{R}(s)\ \forall\ \tau > s$. ■

Proposition 1.2.1 .
Les ensembles $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$ sont symétriques et convexes.

<u>Preuve</u>

1) Soit $x_0 \in \mathcal{C}$, il existe $t_1 > 0$, $u_1 \in U$ tels que $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$. Alors

$$e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1 - s)} B u_1(s) ds = 0$$

ou encore

$$x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-As} B u_1(s) ds$$

qui s'écrit

$$-x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-As} B(-u_1(s)) ds$$

On conclut que $-x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ et donc $\mathcal{C}$ est symétrique.

2) Soit $x_1 \in \mathcal{C}(t_1)$, $x_2 \in \mathcal{C}(t_1)$, alors il existe $u_1, u_2 \in U$ tels que :

$$x_1 = -\int_0^{t_1} e^{-As} B u_1(s) ds$$

$$x_2 = -\int_0^{t_1} e^{-As} B u_2(s) ds$$

Soit $0 < \alpha < 1$,

$$\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 = -\int_0^{t_1} e^{-As} B(\alpha u_1(s) + (1-\alpha) u_2(s)) ds$$

or $\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \in U$, donc $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in \mathcal{C}(t_1)$. D'où $\mathcal{C}(t_1)$ est convexe. La suite $\mathcal{C}(t)$ est croissante, convexe. On en déduit que $\mathcal{C}$ est convexe. ■

Exemple 1.2.1

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + u(t) \\ \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

1) Si $u \in U_u$ et $t_1 > 0$, on a

$x = (x_1, x_2) \in \mathcal{C}(t_1)$ est équivalent à

$$x_1 = x_2 = -\int_0^{t_1} e^{-t} u(t) dt$$

Donc $\mathcal{C}(t_1)$ est la première bissectrice et $\mathcal{C}(t_1) = \mathcal{C}$.

2) Si $u \in U_b$, $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{C}(t_1)$ est équivalent à

$x_1 = x_2 = -\int_0^{t_1} e^{-t} u(t) dt$ et $\mid x_1 \mid \leq M(1 - e^{-t_1})$.

Pour $t_1 > 0$, on a $\mathcal{C}(t_1) = \{x = (x_1, x_1) / \mid x_1 \mid \leq M(1 - e^{-t_1})\}$ et

$\mathcal{C} = \{x = (x_1, x_1) / \mid x_1 \mid < M\}$.

1.2-1 Contrôlabilité sans contraintes

Il s'agit dans cette section d'étudier la contrôlabilité des systèmes dynamiques linéaires quand le contrôle n'est soumis à aucune contrainte.

Définition 1.2.1 .

On appelle matrice de contrôlabilité, la matrice $n \times nm$

$$M = [B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B]$$

On va voir le lien entre $\mathcal{R}$ et le rang de la matrice M.

Lemme 1.2.1 .

Si $x \in I\!R^n$ *alors on a*

$x \perp \mathcal{R}$ *est équivalent à* $M^\top x = 0$.

Preuve

Si $x \perp \mathcal{R}$ alors pour $t_1 \geq 0$ et $u \in U$, on a $< x, \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} Bu(s) ds >= 0$ ou encore $\int_0^{t_1} < B^\top e^{A^\top (t_1-s)} x, u(s) > ds = 0$ pour tout $u \in U$. Cela donne

$$B^\top e^{A^\top (t_1-s)} x = 0 \text{ pour tout } 0 \leq s \leq t_1 \tag{1.2-2}$$

En particulier pour $s = t_1$ on a $B^\top x = 0$.

On dérive l'équation (1.2-2) l fois par rapport à s, on obtient

$$B^\top (A^\top)^l e^{A^\top (t_1-s)} x = 0.$$

En particulier pour $s = t_1$ on a $B^\top (A^\top)^l x = 0, l = 1, 2, ..., n-1$.

Inversement, on suppose $M^\top x = 0$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, il existe $c_1, ..., c_n$ des constantes telles que

$$(A^\top)^n = c_1 (A\top)^{n-1} + ... + c_n I$$

donc $B^\top (A^\top)^n x = 0$. On en déduit que $B^\top (A^\top)^l x = 0$ pour $l \in I\!N$.

Or

$$\begin{aligned} B^\top e^{A^\top (t_1-s)} x &= B^\top [I + (t_1 - s) A^\top + \frac{(t_1-s)^2}{2!} (A^\top)^2 + ...]. \\ &= B^\top [I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t_1-s)^k}{k!} (A^\top)^k] \end{aligned}$$

On en déduit $B^\top e^{A^\top (t_1-s)} x = 0$. Ce qui donne

$$\int_0^{t_1} < B^\top e^{A^\top (t_1-s)} x, u(s) > ds = 0$$

pour tout $u \in U$. Donc $x \perp \mathcal{R}$. ■

Proposition 1.2.2 .

$\mathcal{R}$ *est un sous-espace vectoriel de dimension égale au rang de la matrice* M.

Preuve

Soit $p = \text{rang}\, M = \text{rang}\, M^\top$ représentant le nombre d'équations linéairement indépendantes de $M^\top x = 0$. De même la dimension de $\mathcal{R}$ est le nombre p' des équations linéairement indépendantes telles que $x \perp \mathcal{R}$, et d'après le lemme $p = p'$. ■

Corollaire 1.2.1 .
Si $\text{rang}\, M = n$ *alors* $\mathcal{R} = I\!R^n$. *Tout point de* $I\!R^n$ *est atteignable à partir de* 0.

Propriété 1.2.2 .
$\mathcal{R}$ est engendré par les colonnes de M et invariant par A.

Preuve

$x \in \mathcal{R} \Longrightarrow$ il existe $t_1 > 0$ et $u \in U$ tels que $x = \displaystyle\int_0^{t_1} e^{A(t_1 - s)} Bu(s)ds$.
qui s'écrit :

$$x = B\int_0^{t_1} u(s)ds + AB\int_0^{t_1} (t_1 - s)u(s)ds + ... + A^n B\int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^n}{n!} u(s)ds + ...$$

D'après Cayley-Hamilton, on a

$$x = Bv_0 + ... + A^{n-1}Bv_{n-1}$$

avec $v_i \in I\!R^m$ et $i = 1, n-1$.
Il est simple de vérifier que si $x \in \mathcal{R}$ alors $Ax \in \mathcal{R}$. ■

Proposition 1.2.3 .
Si $\text{rang}\, M = n$ *alors*

$$\forall t_1 > 0,\ W(t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} BB^\top e^{-A^\top t} dt$$

est définie positive.
De plus $\forall x_0 \in I\!R^n$ *il existe* $u \in U$ *tel que* $x[t_1] = 0$.

Preuve

Soit $x \in I\!R^n$,

$$\begin{aligned} < x, W(t_1)x > &= \int_0^{t_1} < B^\top e^{-A^\top t}x, B^\top e^{-A^\top t}x > dt \\ &= \int_0^{t_1} \| B^\top e^{-A^\top t}x \|^2 \, dt \end{aligned}$$

par suite $W(t_1)$ est positive

rang $M = n \Longrightarrow B^\top e^{-A^\top t}x = 0,\ 0 \leq t \leq t_1 \Longrightarrow x = 0.$

Donc si $< x, W(t_1)x >= 0$ alors $B^\top e^{-A^\top t}x = 0$ par suite $x = 0$ et $W(t_1)$ est définie positive.

Soit le contrôle $u(t) = -B^\top e^{-A^\top t}[W(t_1)]^{-1}x_0$ défini sur $[0, t_1]$, l'état du système (1.2-1) controlé par u, de condition initiale x_0 est

$$x[t_1] = e^{At_1}x_0 - \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)}BB^\top B^\top e^{-A^\top s}(W(t_1))^{-1}x_0 ds = 0.$$

■ Il résulte des propositions ci-dessus le résultat suivant :

Théorème 1.2.1 .

Le système (1.2-1) est contrôlable si et seulement si rang $M = n$.

Dans ce qui suit, on étudie la structure des systèmes (1.2-1) qui sont non complétement contrôlables.

Lemme 1.2.2 .

Soit $V \subset I\!R^n$, V sous-espace vectoriel de $I\!R^n$.

Le plus petit sous-espace invariant par A et contenant V, noté par $< A \mid V >$, est égal à $V + AV + A^2V + ... + A^{n-1}V$.

Preuve

Par définition on a $A^kV \subset < A \mid V >$ pour $k = 0, n-1$; donc

$V + AV + A^2V + ... + A^{n-1}V \subset < A \mid V >$

Inversement, $V \subset\ V + AV + A^2V + ... + A^{n-1}V$. D'après Cayley-Hamilton $A(V + AV + A^2V + ... + A^{n-1}V) = AV + A^2V + ... + A^nV$ est inclus dans $V + AV + A^2V + ... + A^{n-1}V$

ou encore $V + AV + A^2V + ... + A^{n-1}V$ est stable par A et contient V, par conséquent contient $< A \mid V >$. ■

Propriété 1.2.3 .

Pour tout $t > 0$ $< A \mid \operatorname{Im} B >= \operatorname{Im} W(t)$

<u>Preuve</u>

Soit $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ et $x \in < A \mid \operatorname{Im} B >^{\perp} \Longrightarrow$. $x \notin < A \mid \operatorname{Im} B >$. D'après le lemme précédent $< A \mid \operatorname{Im} B >= \operatorname{Im} B + A \operatorname{Im} B + A^2 \operatorname{Im} B + ... + A^{n-1} \operatorname{Im} B$. Cela entraine que $x \notin A^k \operatorname{Im} B$ pour tout $k = 0, n-1$. On a donc $x^{\top} A^k \operatorname{Im} B = 0$ pour $k = 0, n-1$. D'après Cayley-Hamilton $x^{\top} A^k \operatorname{Im} B = 0$ pour tout k. En particulier on a $x^{\top} e^{-At} \operatorname{Im} B = 0$, ou encore, $x^{\top} \operatorname{Im} W(t) = 0$. C'est à dire $x \in \operatorname{Im} W(t)^{\perp}$.
Inversement, si $x \in \operatorname{Im} W(t)^{\perp}$ alors $< W(t)x, x >= 0$.
Il vient que $\displaystyle\int_0^t \| B^{\top} e^{-A^{\top} s} \|^2 \, ds = 0$. On en déduit que $x \in \operatorname{Ker}(B^{\top} e^{-A^{\top} s})$ pour $0 \leq s \leq t$, ou encore, $x \in \operatorname{Im}(e^{-At} B)^{\perp}$.
Donc $x \in < A \mid \operatorname{Im} B >^{\perp}$. ■

Proposition 1.2.4 .

Pour tout $t > 0$ $\mathcal{R}(t) = \mathcal{C}(t) =< A \mid ImB >$.

<u>Preuve</u>

Soit t fixé et $x \in \mathcal{R}(t)$
$x = \displaystyle\int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds$ pour $u \in U$ et par suite, $x \in < A \mid \operatorname{Im} B >$.
Inversement, soit $x \in < A \mid ImB >= \operatorname{Im} W(t)$. Il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$x = \displaystyle\int_0^t e^{As} B B^{\top} e^{A^{\top} s} z ds$
$x = \displaystyle\int_0^t e^{A(t-r)} B \underbrace{B^{\top} e^{A^{\top}(t-r)} z}_{u(r)} dr$. D'où $x \in \mathcal{R}(t)$.
Finalement

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{C}(t) \quad & \Longleftrightarrow \; x = -\int_0^t e^{-As} Bu(s)ds \\
& \Longleftrightarrow \; -e^{At}x = -\int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)ds \in \mathcal{R}(t) \\
& \Longleftrightarrow \; e^{At}x \in \mathcal{A}(t) \\
& \Longleftrightarrow \; x \in < A \mid \operatorname{Im} B >
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Exemple 1.2.2

On reprend l'équation de l'exemple

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + u(t) \\ \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

alors

$\operatorname{rang} M = 1$ et $\mathcal{C}(t_1) = < A \mid \operatorname{Im} B > = \operatorname{Im} B$.

1.2-2 Ensembles contrôlables

Définition 1.2.2 .

Deux paires (A, B) et (A', B') sont équivalentes s'il existe P matrice régulière telle que $A' = PAP^{-1}$ et $B' = PB$

Il est clair que cette définition correspond à un changement de variable $x' = Px$.

Théorème 1.2.2 .

Toute paire (A, B) est équivalente à une paire (A', B') de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

où $\operatorname{rang}\{B_1, A_{11}B_1, ..., A_{11}^{n_1-1}B_1\} = n_1$

n_1 étant la dimension du bloc A_{11}.

<u>Preuve</u>

Soit $\mathcal{R}$ l'espace vectoriel engendré par $\{B, AB, ..., A^{n-1}B\}$, i.e. l'espace de contrôlabilité.

Soit $\tilde{\mathcal{R}}$ un supplémentaire de $\mathcal{R}$ dont les n_1 premiers vecteurs soient une base de $\mathcal{R}$.

Soit $\{e_1, ..., e_{n_1}\}$ base de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_{n_1}, e_{n_1+1}, ..., e_n\}$ base de $I\!R^n$.

On exprime les opérateurs associés à A et B dans cette nouvelle base.

L'opérateur associé à B s'écrit

$$B' = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice B_1 étant une matrice n_1 x m

$\mathcal{R}$ est invariant par A.

On pose la matrice $T = (T_1, T_2)$ où $T_1 = (e_1, ..., e_{n_1})$ $n \times n_1$ et $T_2 = (e_{n_1+1}, ..., e_n)$

Le changement de variable suivant $Tx'(t) = x(t)$ donne

$\dot{x}'(t) = T^{-1}\dot{x}(t) = T^{-1}[Ax(t) + Bu(t)]$

ou encore

$\dot{x}'(t) = T^{-1}ATx'(t) + T^{-1}Bu(t)$

On pose

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}.$$

où U_1 admet n_1 lignes et U_2 a $n - n_1$ lignes

$$T^{-1}T = \begin{pmatrix} U_1T_1 & U_1T_2 \\ U_2T_1 & U_2T_2 \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow U_2T_1 = 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathcal{R},\ U_2x = 0$

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} U_1AT_1 & U_1AT_2 \\ U_2AT_1 & U_2AT_2 \end{pmatrix}.$$

$$B' = T^{-1}B = \begin{pmatrix} U_1B \\ U_2B \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{R}$ est invariant par A, donc $U_2AT_1 = 0$ et $U_2B = 0$

d'où

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{22} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

avec $A_{11} = U_1AT_1$, $A_{12} = U_1AT_2$, $A_{22} = U_2AT_2$ et $B_1 = U_1B$

On a pour tout $0 \leq l \leq n-1$ $A'^lB' = T^{-1}A^lB$ et $A^lB' = \begin{pmatrix} A_{11}^lB \\ 0 \end{pmatrix}$. D'où

rang $\{B', A'B', ..., A'^{n-1}B'\}$ =rang $\{B, AB, ..., A^{n-1}B\} = n'$.
Et par suite, $[B_1, A_{11}B_1, ..., A_{11}^{n_1-1}B_1] = n_1$. ■

<u>Interêt</u>

Soit le système $x'(t) = [x_1'(t), x_2'(t)]^\top$

$$\begin{cases} \dot{x_1}'(t) = A_{11}x_1'(t) + A_{12}x_2'(t) + B_1u(t) & x_1'(t) \in I\!R^{n_1} \\ \dot{x_2}'(t) = A_{22}x_2'(t) & x_2'(t) \in I\!R^{n-n_1} \end{cases} \tag{1.2-3}$$

Pour $u \in U$, la solution de (1.2-3) est indépendante de u; on a toujours $x_2'(t) = e^{A_{22}t}x_{2,0}$. D'où, cette composante est non contrôlable.
Dans ce cas

$$\dot{x_1}'(t) = A_{11}x_1'(t) + A_{12}e^{A_{22}t}x_{2,0}' + B_1u(t).$$

On a alors

$$x_1'(t) = e^{A_{11}t}x_{1,0}' + \int_0^t e^{A_{11}(t_1-s)}(B_1u(s) + A_{12}e^{A_{22}s}x_{2,0}')ds$$

or

$$\{\int_0^t e^{-sA_{11}}B_1u(s)ds, u(s) \in L^2(I\!R^m)\} = I\!R^{n_1}$$

Ceci montre que malgré le terme complémentaire

$$\int_0^t e^{-sA_{11}}A_{12}e^{A_{22}s}x_{2,0}'ds$$

on peut toujours, quelque soit la cible x_{11}' visée dans $I\!R^{n_1}$, trouver un contrôle $u(.)$ tel que $x_1'(t) = x_{11}'$.
D'où la première composante est complétement contrôlable.

1.2-3 Contrôlabilité avec contraintes

En pratique, plusieurs systèmes dynamiques imposent au contrôle u de ne pas dépasser un certain seuil, c'est à dire $\| u \| \leq c$ où c est une constante positive donnée.
Soit $\Omega \subset I\!R^m$ supposé compact, convexe et symétrique et on suppose que $0 \in \mathrm{Int}\,\Omega$, par exemple Ω la boule unité de $I\!R^m$.

On considère l'ensemble des contrôles

$$U[0,t_1] = \{u(.)\ /\ u(t) \in \Omega \subset I\!R^m \text{et } u(.) \text{ mesurable sur } [0,t_1]\}$$

et soit $U_b = \bigcup\limits_{t_1>0} U[0,t_1]$, et on suppose que U_b vérifie la juxtaposition de contrôles.

Système linéaire

On rappelle que dans le cas de système linéaire et puisque Ω est symétrique et convexe, l'ensemble des états contrôlables $\mathcal{C}$ est symétrique et convexe .

Théorème 1.2.3 .
Soit M la matrice de contrôlabilité alors
$\operatorname{rang} M = n$ *est équivalent à* $0 \in \operatorname{Int}\mathcal{C}$.

Preuve

On va montrer l'équivalence suivante :
$\operatorname{rang} M < n$ est équivalent à $0 \notin \operatorname{Int}\mathcal{C}$
On suppose $\operatorname{rang} M < n$, il existe alors un vecteur y non nul tel que $y^\top e^{-As}B = 0$ pour tout s.
Soit $t_1 > 0$ et $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ ou encore $x_0 = -\displaystyle\int_0^{t_1} e^{-As}Bu(s)ds$ pour $u \in U[0,t_1]$.
Il vient $y^\top x_0 = 0$ et ceci pour tout $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ et $t_1 > 0$.
Donc pour tout t_1, $\mathcal{C}(t_1)$ est contenu dans un hyperplan Π de vecteur normal y.
On conclut que $0 \notin \operatorname{Int}\mathcal{C}(t_1)$ Or $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{t_1>0} \mathcal{C}(t_1)$, donc $\mathcal{C} \subset \Pi$. Par suite $0 \notin \operatorname{Int}\mathcal{C}$.

Inversement, on suppose $0 \notin \operatorname{Int}\mathcal{C}$ ou encore $0 \notin \operatorname{Int}\mathcal{C}(t_1)$.
Or $0 \in \mathcal{C}(t_1)$ et $\mathcal{C}(t_1)$ est convexe, il existe donc un hyperplan Π tangent à $\mathcal{C}(t_1)$ en 0, de vecteur normal y .
Pour tout $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$ on a $y^\top x_0 \leq 0$ ou encore

$$-\int_0^{t_1} y^\top e^{-As}Bu(s)ds \leq 0 \tag{1.2-4}$$

Or $\mathcal{C}(t_1)$ est symétrique autrement dit, $-x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$

$$-y^\top x_0 \leq 0 \qquad (1.2\text{-}5)$$

(1.2-4) et (1.2-5) $\Longrightarrow \int_0^{t_1} y^\top e^{-As} Bu(s)ds = 0$ pour tout $u \in U[0, t_1]$.
Puisque $0 \in \operatorname{Int}\Omega$, il existe $B(0, r) \subset \Omega$.

On suppose qu'il existe t_0, $0 \leq t_0 \leq t_1$ tel que $y^\top e^{-At_0} B \neq 0$.
Soit alors le contrôle $u(t) = \dfrac{r}{2} \dfrac{B^\top e^{-A^\top t} y}{\|B^\top e^{-A^\top} \cdot y\|} \in \Omega$.
On obtient alors $\dfrac{r}{2} \displaystyle\int_0^{t_1} \|B^\top e^{-A^\top t} y\|^2 dt = 0$. On déduit $B^\top e^{-A^\top t} y = 0$ pour tout t, contradiction. Par suite $y^\top e^{-At} B = 0$ pour tout t, ce qui donne $y^\top A^k B = 0$ pour tout k donc y est orthogonal aux colonnes de M, c'est à dire $\operatorname{rang} M < n$. ■

Théorème 1.2.4 .
Si $\operatorname{rang} M = n$ *et si la partie réelle de toute valeur propre de* A *est strictement négative alors* $\mathcal{C} = I\!R^n$.

<u>Preuve</u>

Soit $x_0 \in I\!R^n$ et on considère le contrôle identiquement nul, alors le système correspondant est $\dot{x} = Ax$.
Or pour tout λ valeur propre de A, $\operatorname{Re}\lambda < 0$, et par suite

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} x(t, 0, x_0, 0) = 0$$

On a $0 \in \operatorname{Int}\mathcal{C}$, par suite, il existe une boule B_0 de centre 0 contenue dans $\mathcal{C}$, donc il existe t_1 tel que $x(t_1, 0, x_0, 0) \in B_0 \subset \mathcal{C}$. D'où le résultat. ■

Remarque 1.2.2 .
L'hypothèse du théorème ci-dessus est trop forte. En effet si on considère par exemple le système régi par l'équation

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |u(t)| \leq 1$$

on a 0 *est valeur propre de* A *d'ordre de multiplicité* 2 *et ce système est contrôlable.*

Une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité est donnée par le résultat ci-dessous.

Théorème 1.2.5 .
$\mathcal{C} = I\!\!R^n$ est équivalent à $\operatorname{rang} M = n$ *et* $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ *pour tout λ valeur propre de A.*

Preuve

Sans perdre de généralité, on prend Ω la boule unité de $I\!\!R^m$.

On suppose que $\operatorname{rang} M = n$ et $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ pour toute valeur propre de A.
$\mathcal{C}$ est connexe, donc s'il existe un vecteur $w_0 \notin \mathcal{C}$, alors w_0 doit être séparé de $\mathcal{C}$ par un hyperplan, c'est à dire, il existe un vecteur fixé $b \in I\!\!R^n$ et un nombre réel α tel que pour tout $x_0 \in \mathcal{C}$, $< b, x_0 >= b^\top x_0 \leq \alpha$.
On va montrer que pour tout vecteur non nul $b \in I\!\!R^n$ et pour tout nombre réel α il existe un vecteur $x_0 \in \mathcal{C}$ tel que $b^\top x_0 > \alpha$. Cette contradiction démontre la première partie du théorème.

Soit $b \neq 0 \in I\!\!R^n$ donné. On veut montrer que $\mathcal{C}$ contient un vecteur x_0 tel que $b^\top x_0$ est arbitrairement grand.

Soit $x_0 \in \mathcal{C}$ ou encore $x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-As} Bu(s)ds$ pour un t_1 et $u(.) \in U_b$. On doit alors montrer qu'il existe un $u(.) \in U_b$ pour lequel

$$-\int_0^{t_1} b^\top e^{-As} Bu(s)ds > \alpha.$$

On note par $v(s) = (b^\top e^{-As} B)^\top$. Puisque $\operatorname{rang} M = n$ alors $v(s) \neq 0$ pour tout $s \in [0, t_1]$.
On choisit le contrôle u de composantes

$$u^i(s) = \begin{cases} -\operatorname{sign} v^i(s) & i = 1, 2, ..., m \\ 0 & \text{quand } \ v^i(s) = 0 \end{cases}$$

Donc pour tout t_1 tel que $x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-As}Bu(s)ds$,

$$b^\top x_0 = \int_0^{t_1} \mid v(s) \mid ds, \text{ où } \mid v \mid = \sum_{i=1}^{m} \mid v^i \mid .$$

Une composante de $v(s)$ est non nulle, soit par exemple $v^1(s_0) \neq 0$, par continuité $v^1(s) \neq 0$ dans un voisinage de s_0. On a $\int_0^\infty \mid v^1(s) \mid ds = \infty$. Sinon, soit $\phi(t) = \int_t^\infty v^1(s)ds$. On a $\lim_{t \longrightarrow \infty} \phi(t) = 0$ et $-\frac{d\phi}{dt} = v^1$.
Soit $\mathcal{P}$, le polynôme caractéristique de la matrice A alors

$$\mathcal{P}(-\frac{d}{dt})v(t) \equiv \mathcal{P}(-\frac{d}{dt})(b^\top e^{-At}B) = b^\top e^{-At}\mathcal{P}(A)B = 0$$

Par conséquent $\phi(t)$ est solution de l'équation à coefficients constants :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}(-\frac{d}{dt})\phi(t) = 0; \;\; \phi(t) \neq 0, \text{ et } \lim_{t \longrightarrow \infty} \phi(t) = 0$$

Cela veut dire que $\phi(t)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $p(t)e^{\lambda t}$ où $p(t)$ est un polynôme et λ est une racine de l'équation $\lambda \mathcal{P}(-\lambda) = 0$. Ces racines sont positives, ce qui contredit le fait que $\lim_{t \longrightarrow \infty} \phi(t) = 0$.

Inversement, on veut montrer que si $\operatorname{rang} M < n$ ou $\operatorname{Re} \lambda > 0$ pour un λ valeur propre de A alors $\mathcal{C} \neq I\!R^n$.
On suppose $\operatorname{rang} M < n$, on a vu dans ce cas que $\mathcal{C}(t)$ est contenu dans un hyperplan fixé pour tout $t > 0$, donc $\mathcal{C}(t) \neq I\!R^n$.
Finalement, on suppose $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ pour λ_1 valeur propre de A. Il existe une matrice inversible Q telle que $\widetilde{A} = Q^{-1}AQ$ est sous la forme canonique :

$$\widetilde{A} = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & 0 \\ 0 & & J_k \end{bmatrix}.$$

où la matrice J_r $m_r \times m_r$ associée à la valeur propre de λ_r de A, donnée par

$$J_r = \begin{bmatrix} \lambda_r & & & & 0 \\ 1 & \lambda_r & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & \lambda_r \end{bmatrix}$$

Pour $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$),

$$J_r = \begin{bmatrix} R & & & 0 \\ I_2 & R & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I_2 & R \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Soit $x(t) = Qy(t)$ alors (1.2-1) devient

$$\dot{y} = Q^{-1}AQy + Q^{-1}Bu \equiv \widetilde{A}y + w(t), \quad y(t) \in I\!\!R^n \tag{1.2-6}$$

Puisque $u(t) \in \Omega$ compact, il existe une constante K telle que $\mid w(t) \mid \leq K$.
Sans perdre de généralité, on suppose que λ_1 de J_1 est réel.
Si λ_1 est réel, alors $\dot{y}^1 = \lambda_1 y^1(t) + w^1(t)$ est la première équation (1.2-6).
Si $y^1(0) > K/\lambda_1$, alors $y^1(t)$ est croissante, donc $y^1(t)$ ne tend pas vers 0 et $y(t)$ ne tend pas vers 0.
Quand $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ avec $\alpha > 0$ et $\beta \neq 0$ les deux premières équations deviennent :

$$\dot{y}^1 = \alpha y^1 - \beta y^2 + w^1(t)$$

$$\dot{y}^2 = \beta y^1 - \alpha y^2 + w^2(t)$$

On multiplie la première équation par $y^1(.)$ et la seconde par $y^2(.)$ et on fait la somme, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel z \parallel^2 = \alpha \parallel z \parallel^2 + z^t w(t),$$

où

$$z = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix}.$$

L'inégalité de cauchy schwartz implique que $\mid z^T w(t) \mid \leq \parallel z \parallel \parallel w(t) \parallel$ et, combinée avec la dernière équation, on a $d/dt \parallel z(t) \parallel \geq \alpha \parallel z(t) \parallel -K$.
Par conséquent, si $\parallel z(0) \parallel > (K/\alpha)$, il suit que $\parallel z(t) \parallel$ est toujours croissante et $y(t)$ ne tend pas vers 0 quand $t \longrightarrow \infty$.
Enfin, puisque $x(t) = Qy(t)$, dans les deux cas $x(t)$ solution du système linéaire correspondant (1.2-1) ne tend pas vers 0. ■

Remarques

On a montré que pour le système (1.2-1) on a :

1. Si $\operatorname{rang} M < n$ alors il existe un hyperplan contenant $\mathcal{C}(t)$, $\forall t > 0$.

2. $\operatorname{rang} M = n \Longleftrightarrow 0 \in \operatorname{Int} \mathcal{C}$.

3. $\operatorname{rang} M = n \Longleftrightarrow \forall x \neq 0$, $x^\top e^{-At} B \neq 0$ fonction de t.

Les systèmes qui vérifient $x^\top e^{-At} B \neq 0$, $\forall x$ sont appelés propres; pour le système (1.2-1); ceci est équivalent à $\operatorname{rang} M = n$.

Exemple 1.2.3

Si on reprend l'exemple $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + u(t) \\ \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u(t) \end{array} \right.$ on a :

$\operatorname{rang} M = 1$ et 1 est la seule valeur propre de la dynamique du système et donc, $\mathcal{C} \neq I\!R^2$.

$\mathcal{C}(t_1)$ est fermé , $\mathcal{C}$ est non ouvert et $0 \notin \operatorname{Int} \mathcal{C}$.

1.3 Contrôlabilité des systèmes continus non linéaires

On considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x,u) \\ \\ x(t_0) = x_0 \in I\!R^n \end{array} \right. \tag{1.3-1}$$

où f est continûment différentiable avec $f(0,0) = 0$.

$u(t) \in \Omega$ un compact convexe symétrique.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude de la contrôlabilité du système non linéaire (1.3-1) au voisinage de 0 .

On a $f(x,u) = f_x(0,0)x + f_u(0,0)u + o(|x| + |u|)$,

où $f_x(.,.)$, $f_u(.,.)$ sont les matrices Jacobiennes $n \times n$, $n \times m$, $[\partial f^i / \partial x^j]$, $[\partial f^i / \partial u^j]$ respectivement .

On considère le linéarisé du système (**??**) :

$$\dot{x} = f_x(0,0)x + f_u(0,0)u = A_f x + B_f u. \tag{1.3-2}$$

On note par M_f la matrice de contrôlabilité du système linéarisé (1.3-2)

$$M_f = [B_f, A_f B_f, A_f^2 B_f, ..., A_f^{n-1} B_f].$$

Théorème 1.3.1 .
Si rang $M_f = n$ *alors* $0 \in \mathrm{Int}\,\mathcal{C}$ *pour (1.3-1).*

Avant de donner la démonstration, on remarque que si $x(t)$ est solution de (1.3-1) de condition initiale $x(0) = x_0$ et $x(t_1) = x_1$ alors, l'état $z(t) = x(t_1 - t)$ est solution de l'équation

$$\dot{z} = -f(z, \tilde{u}), \quad z(0) = x_1, \quad z(t_1) = x_0 \tag{1.3-3}$$

où $\tilde{u}(t) = u(t_1 - t)$.
Donc, les trajectoires de (1.3-1) et de (1.3-3) sont identiques mais de directions opposées. Ceci permet de conclure que x_0 état du système (1.3-1) est contrôlable à 0 est équivalent à x_0 est atteignable à partir de 0 pour (1.3-3) ou encore, tout état de (1.3-1) dans $B(0, \delta)$ voisinage de 0 est contrôlable à 0 est équivalent à tout vecteur dans $B(0, \delta))$ est atteignable à partir de 0 pour (1.3-3) : $B(0, \delta) \subset \mathcal{R}$.
On a aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 1.3.1 .
Considérons le système linéaire autonome

$$\dot{x} = -Ax - Bu, \quad x(0) = 0 \tag{1.3-4}$$

On suppose que $B(0, \delta) \subset \mathcal{R}, \quad \delta > 0.$
Soit $S = \{\alpha e_1, \alpha e_2, ..., \alpha e_n\}$ *avec* $\alpha > 0$ *suffisament petit.* $(e_1, ..., e_n)$ *base canonique de* $I\!R^n$ *alors il existe* $u_1(.), ..., u_n(.) \in U_b$ *tels que :*

$$x(t, 0, u_j(.)) = \alpha e_j \quad j = 1, ..., n.$$

Preuve (du théorème)

Sans perdre de généralité, on suppose $\Omega = B(0, 1)$.
On va montrer que 0 peut être conduit dans une boule $B(0, \delta)$ pour le système (1.3-3).

En fait, on va montrer que $B(0,\delta)) \subset \mathcal{R}(1)$ pour un certain $\delta > 0$.

$f(x,u)$ est différentiable, donc si $\sup\limits_{[0,1]} \mid u(t) \mid$ est suffisamment petit, la solution $x(t,0,u(.))$ existe sur $[0,1]$.

En effet, l'unique solution de $\dot{x} = -f(x,0)$ est $x[t] \equiv 0$ sur $[0,2]$, et par conséquent il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{[0,1]} \mid u(t) \mid < \varepsilon \Longrightarrow x(t,0,u(.)) \quad \text{existe sur} \quad [0,1]$$

Si rang $M_f = n$ et d'après le théorème 3.3, $0 \in \operatorname{Int}\mathcal{C}$ du système (1.3-2).

Par suite, en considérant le système (1.3-4) on peut atteindre à partir de 0 un voisinage de 0. D'après le lemme ci-dessus, pour $\alpha > 0$ il existe $u_1(.), ..., u_n(.)$ tels que $x(1,0,u_k(.)) = \alpha e_k$ pour $k = 1, ..., n$.

Mais u peut dépasser ε. Dans ce cas, soit le contrôle $u(t,c) = c_1 u_1(t) + ... + c_n u_n(t)$ où $c = (c_1, ..., c_n) \in I\!\!R^n$ de norme euclidienne $\parallel c \parallel < \varepsilon/n$ ainsi on a $\mid u(t,c) \mid < \varepsilon$, $0 \leq t \leq 1$.

Soit alors, $z(t,0,u(t,c))$ la famille des réponses du système (1.3-3) correspondant aux contrôles $u(.,c)$ sur $[0,1]$ et on définit la fonction

$g : \mathcal{B}(0,\varepsilon/n) \longrightarrow I\!\!R^n$ par $g(c) = z(1,0,u(.,c))$.

Il est clair que $g(0) = 0$.

Par définition

$$\dot{z} = -f(z,u(t,c)), \quad z(0,c) = 0 \tag{1.3-5}$$

On définit la matrice Jacobienne $N(t) = z_c(t,c) \mid_{c=0}$ et donc $J = N(1) = g_c(0)$.

$N(t)$ est solution de l'équation

$$\begin{cases} \dot{N}(t) & = -f_x(0,0)N(t) - f_u(0,0)u_c(t,c) \mid_{c=0} \\ N(0) & = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\dot{N}(t) = -f_x(0,0)N(t) - f_u(0,0)[u_1(t), ..., u_n(t)].$$

Alors chaque colonne $n_j(t)$ de $N(t)$ vérifie (1.3-4) :

$$\dot{n}_j(t) = -A_f n_j(t) - B_f u_j(t), \quad n_j(0) = 0$$

Pour ce système $u_j(.)$ conduit 0 à αe_j à $t = 1$, par conséquent $n_j(1) = \alpha e_j$, $j = 1, ..., n$. Donc $N(1) = \alpha I$ et donc $z_c(1,c) \mid_{c=0} = N(1)$ est inversible et g est une application ouverte en particulier l'image de $\mathcal{B}(0, \varepsilon/n)$ contient un voisinage de $g(0) = 0$. Cela implique que l'ensemble des états atteignables à $t = 1$ du système (1.3-3) par l'ensemble des contrôles $\{u(t, c)/c \in \mathcal{B}(0, \varepsilon/n)\}$ contient un voisinage de 0. $\blacksquare$

Remarque 1.3.1 .

La réciproque est en général fausse. Ceci est illustré par l'exemple suivant :
On considère le système bidimensionnel :

$$x = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + u(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ p(t)^3 \end{bmatrix}$$

On montre que $0 \in \operatorname{Int} \mathcal{C}$*, cependant le problème linéarisé*

$$\begin{cases} \dot{p} & = -p + u \\ \dot{q} & = -q \end{cases}$$

correspond à

$$A_f = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_f = [B_f, A_f B_f] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $\operatorname{rang} M_f = 1$

Théorème 1.3.2 .

On suppose que $\operatorname{rang} M_f = n$*. Si la solution* $x[t] \equiv 0$ *du système non contrôlé* $\dot{x} = f(x, 0)$ *est globalement asymtotiquement stable, alors* $\mathcal{C} = I\!R^n$ *pour (1.3-1).*

Preuve

$\operatorname{rang} M_f = n$, d'après le théorème ci-dessus, il existe $\alpha > 0$ telle que $\mathcal{B}(0, \alpha) \subset \mathcal{C}$ pour (1.1-1). La stabilité asymptotique globale du système non contrôlé signifie que $\lim_{t \longrightarrow \infty} x(t, 0, x_0, 0) = 0$ pour tout $x_0 \in I\!R^n$, donc pour tout $x_0 \in I\!R^n$ il existe $t_1 > 0$ tel que $x(t_1, 0, x_0, 0) \in \mathcal{B}(0, \alpha)$, or $\mathcal{B}(0, \alpha) \subset \mathcal{C}$ ce qui montre que $x_0 \in \mathcal{C}$ et d'où le résultat. $\blacksquare$

Exemple 1.3.1

On considère l'équation

$$\ddot{p}(t) + g(p, \dot{p})\dot{p}(t) + h(p) = u(t), \quad -1 \leq u(t) \leq 1 \tag{1.3-6}$$

où $g(.,.)$ et $h(.)$ sont de classe C^1.

L'équation (1.3-6) admet une solution unique pour une condition initiale donnée.

L'équation (1.3-6) est équivalente à

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -g(p,q) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -h(p) + u(t) \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix}.$$

Le système linéarisé est

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dot{h}(0) & -g(0,0) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

et

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -g(0,0) \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rang} M_f = 2$$

Donc si le système (1.3-6) non contrôlé est globalement asymptotiquement stable alors $\mathcal{C} = I\!\!R^2$ pour le système (1.3-6).

Si par exemple $g(p,q) > 0$ pour tout (p,q), $ph(p) > 0$ pour $p \neq 0$ et $\lim\limits_{|p| \longrightarrow \infty} \int_0^p h(s)ds = \infty$, alors le système est (g.a.s). En effet, on considère la fonction de Lyapunov :

$V(p,q) = \dfrac{q^2}{2} + H(p)$ où $H(p) = \displaystyle\int_0^p h(s)ds$

alors $V(p,q) > 0$ pour tout $(p,q) \neq (0,0)$, $\lim\limits_{|x| \longrightarrow \infty} V(p,q) = \infty$ et le long de la solution du système non contrôlé, on a

$$\dot{V}(p,q) = \frac{d}{dt} V(p(t), q(t)) = q\dot{q} + h(p)\dot{p} = -q^2 g(p,q) < 0.$$

D'où le système est (g.a.s).

Récapitulation

On va résumer brièvement les résultats énoncés.

1. *Pour (1.1-1), $\mathcal{C}$ est connexe par arcs et $\mathcal{C}$ est ouvert $\Longleftrightarrow 0 \in \operatorname{Int} \mathcal{C}$.*

2. *Pour(1.2-1) $\mathcal{C}$ est symétrique et convexe .*

3. *Pour (1.2-1),*

   (i) $\operatorname{rang} M < n \Longleftrightarrow \mathcal{C}(t_1)$ *est dans un hyperplan .*

   (ii) $\operatorname{rang} M = n \Longleftrightarrow 0 \in \operatorname{Int} \mathcal{C}$.

4. *Pour (1.2-1)*

   (i) sans contrainte : $\operatorname{rang} M = n \Longleftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{R} = I\!R^n$.

   (ii) avec contrainte : $\operatorname{rang} M = n$ *et* $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ *pour toutes valeurs propres de* $A \Longleftrightarrow \mathcal{C} = I\!R^n$.

5. *Pour (1.4-2) sans contrainte :*

   $\operatorname{rang} M = n \Longleftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{R} = I\!R^n$.

6. *Pour (1.3-1),* $\operatorname{rang} M_f = n \Longrightarrow 0 \in \operatorname{Int} \mathcal{C}$.

7. *Pour (1.3-1), si le système non contrôlé est globalement asymptotiquement stable, et* $\operatorname{rang} M_f = n$ *alors* $\mathcal{C} = I\!R^n$.

1.4 Contrôlabilité des systèmes discrets

1.4-1 Définitions- Propriétés

Un système discret s'écrit

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ \\ x(k_0) = x_0 \in I\!R^n \qquad\qquad k \geq k_0 \in I\!N \end{cases} \tag{1.4-1}$$

où $f : I\!R^n \times U \longrightarrow I\!R^n$ est une fonction continûment différentiable avec $f(0,0) = 0$.

$u \in U = \{v : \text{fonction intégrable} \; / v(.) \in \Omega \subset I\!R^m\}$.

On note par $x(k, k_0, x_0, u(.))$ la solution du système (1.4-1), elle sera aussi notée $x[.]$.

Définition 1.4.1 .

Le point x_0 état du système (1.4-1) à l'instant k_0, est dit contrôlable à x_1 s'il existe $k_1 > k_0$ et $u \in U$ tels que $x(k_1, k_0, x_0, u(.)) = x_1$

On note par $\mathcal{A}(k_1, x_0) = \{x(k_1, k_0, x_0, u(.))/u \in U\}$ l'ensemble des états atteignables à k_1 depuis x_0.
$\mathcal{A}(x_0) = \bigcup\limits_{k>k_0} \mathcal{A}(k, x_0)$ l'ensemble des états atteignables depuis x_0.

On note par $\mathcal{R}(k_1) = \{x(k_1, k_0, 0, u(.))/u \in U\}$ l'ensemble des états atteignables à partir de 0 à l'instant k_1, par suite $x(k_1, k_0, 0, u(.))$ sera noté par $x(k_1, k_0, u(.))$.
$\mathcal{R} = \bigcup\limits_{k>k_0} \mathcal{A}(k)$ l'ensemble des états atteignables à partir de 0.

On définit l'ensemble contrôlable à l'instant k_1 comme l'ensemble des états initiaux x_0 pouvant être conduits à l'origine au temps k_1 à l'aide d'un contrôle admissible. Cet ensemble est noté par $\mathcal{C}(k_1, U, 0)$ pour les contrôles dans U, mais généralement on supprime la dépendance de l'ensemble des contrôles et on le note $\mathcal{C}(k_1)$. L'ensemble contrôlable $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points pouvant être conduits à l'origine à tout instant fini, ainsi $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{k_1 \geq k_0} \mathcal{C}(k_1)$.
Il est évident que $\mathcal{C} \subset I\!\!R^n$, et la propriété désirée du système est que $\mathcal{C} = I\!\!R^n$, de sorte que tous les états initiaux soient contrôlables à l'origine.

Définition 1.4.2 .
Le système (1.4-1) est dit complétement contrôlable s'il peut être conduit d'un état initial quelconque fini x_0 vers n'importe quel autre état.

Propriété 1.4.1 .
1) Si $x_0 \in \mathcal{C}$ et si y est un point de la trajectoire de x_0 à 0, alors $y \in \mathcal{C}$.
2) $\mathcal{C}$ est connexe par arc.
3) Si $k_1 < k_2$ alors $\mathcal{C}(k_1) \subset \mathcal{C}(k_2)$.

Même démonstration que celle du cas continu.

1.4-2 Systèmes discrets linéaires

Dans cette section on s'intéresse à la contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes discrets de la forme

$$
\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ \\ x(0) \in I\!R^n \end{cases} \tag{1.4-2}
$$

où A est une matrice $n \times n$ et B une matrice $n \times m$ et $u(.) \in I\!R^m$

On remarque que la trajectoire du système discret (1.4-2) est de la forme $x(k+1) = A^{k+1}x_0 + \sum_{i=0}^{k} A^i Bu(k-i), \quad k \in I\!N$

Par conséquent, pour tout $k \in I\!N$ on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(k) \quad &= \operatorname{Im} B + A \operatorname{Im} B + ... + A^{k-1} \operatorname{Im} B \\
&= \operatorname{Im}(B \ AB \ ...A^{k-1}B)
\end{aligned}
$$

et $\mathcal{C}(k) = \{x \in I\!R^n \ / \ A^k x \in \mathcal{R}(k)\}$, qu'on note $(A^k)^{-1}\mathcal{R}(k)$.

On a alors la propriété suivante :

Propriété 1.4.2 .

Soit $k_1 < k_2$, on a

1. $\mathcal{C}(k_1) \subset \mathcal{C}(k_2)$, $\mathcal{R}(k_1) \subset \mathcal{R}(k_2)$.
2. *Si* $\mathcal{C}(k_1) = \mathcal{C}(k_2)$ *alors* $\mathcal{C}(k_2) = \mathcal{C}(k)$, $\forall k > k_1$.
   Si $\mathcal{R}(k_1) = \mathcal{R}(k_2)$ *alors* $\mathcal{R}(k_2) = \mathcal{R}(k)$, $\forall k > k_1$.

Preuve.

1) Evident :

$\mathcal{R}(k_1) = \operatorname{Im}(B \ AB \ ...A^{k_1-1}B) \subset \operatorname{Im}(B \ AB \ ...A^{k_2-1}B) = \mathcal{R}(k_2)$.

2)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(k_2+1) \quad &= \operatorname{Im}(B \ AB \ ...A^{k_2}B) \\
&= \operatorname{Im}(B \ AB \ ..., A^{k_2}B) \\
&= \operatorname{Im}(B \ AB \ ..., A^{k_2-1}B) + A \operatorname{Im}(A^{k_2-1}B) \\
&\subset \mathcal{R}(k_2) + A \operatorname{Im}(B \ AB \ ..., A^{k_1-1}B) \\
&= \mathcal{R}(k_2)
\end{aligned}
$$

D'après 1) on en déduit que $\mathcal{R}(k_2+1) = \mathcal{R}(k_2)$.

Par induction, on conclut que $\mathcal{R}(k_2) = \mathcal{R}(k)$, $\forall k > k_1$. ■

Théorème 1.4.1 .
On considère le système (1.4-2) d'espace d'état $X = \mathbb{R}^n$. Alors pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq n$, on a

1. $\mathcal{R} = \mathcal{R}(k) =< A \mid \operatorname{Im} B >= \operatorname{Im}(B\ AB\ ...A^{n-1}B)$

2. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(k) = (A^n)^{-1} < A \mid \operatorname{Im} B >$ *contient* $\mathcal{R}$

<u>Preuve</u>

D'après la propriété 4.2, les suites $\mathcal{R}(k)$ et $\mathcal{C}(k)$ sont croissantes et deviennent stationnaires au plus à la nième étape puisque dimension $X = n$. Par conséquent pour tout $k \in \mathbb{N}, k \geq n$ on a

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(k) = \mathcal{R}(n) =< A \mid \operatorname{Im} B > \text{ et } \mathcal{C} = \mathcal{C}(k) = \mathcal{C}(n) = (A^n)^{-1} < A \mid \operatorname{Im} B >$$

$\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$ vient du fait que $\mathcal{R}$ est invariant par A. ■

Remarque 1.4.1 .
La matrice $(B\ \ AB\ \ ...A^{n-1}B)$ est appelée matrice d'atteignabilité du système (1.4-2).
Le théorème ci-dessus montre que tout état atteignabe du système discret (1.4-2) est atteignable à partir de l'origine après n étapes et tout état contrôlable à 0 est contrôlable après n étapes.
Puisque $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$, tout état atteignable à partir de 0 est aussi contrôlable à 0, en particulier tout système discret de la forme (1.4-2) atteignable est aussi contrôlable à l'origine. La réciproque est en général fausse.

Exemple 1.4.1

On considère le système discret (1.4-2), avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$(B\ AB\ A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \;\; A^3 = 0$$

Par conséquent $\mathcal{R} = \{x \in I\!R^3 / x_3 = 0\}$ mais $\mathcal{C} = I\!R^3$. Donc le système est contrôlable à 0 mais non atteignable à partir de 0.

Corollaire 1.4.1 .

Le système (1.4-2) est complétement contrôlable si et seulement si $\text{rang}[B\ AB\ ...\ A^{n-1}B] = n$.

Preuve.

Si (1.4-2) est complétement contrôlable alors $\mathcal{R} = I\!R^n$ et par suite $\text{rang}[B\ AB\ ...\ A^{n-1}B] = n$.

inversement, supposons $\text{rang}[B\ AB\ ...\ A^{n-1}B] = n$.
On a alors $\mathcal{R} = I\!R^n$, or $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$. D'où $\mathcal{C} = I\!R^n$.
Soit $x_0,\ x_1 \in I\!R^n$.
Il existe u et k' tels que $x(k', k_0, x_0, u(.)) = 0$ et il existe v et k_1 tels que $x(k_1, k', 0, v(.)) = x_1$.
Soit alors le contrôle w égal à u, si $k_0 \leq k \leq k'$ et à v si $k' < k \leq k_1$. On alors $x(k_0, k_1, x_0, w(.)) = x_1$. ■

Dans ce qui suit, nous développons la notion de la stabilisabilité des systèmes continus.

1.5 Stabilisabilité

Le problème de la stabilisation d'un système dynamique consiste à le stabiliser s'il est instable ou d'améliorer sa stabilité si les phénomènes transitoires ne disparaîssent pas rapidement. Ceci revient en fait à trouver un contrôle qui permet de rendre le système asymptotiquement stable.

Soit un système dynamique quelconque régi par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{1.5-1}$$

Définition 1.5.1 .

Le système dynamique (1.5-1) est stabilisable s'il existe un contrôle $u^\star$ *tel que le système (1.5-1) contrôlé par* $u^\star$ *admette une solution x(t) bornée vérifiant* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Dans cette partie, nous allons nous limiter à l'étude de la stabilisabilité des systèmes linéaires et bilinéaires continus.

1.5-1 Stabilisabilité des systèmes linéaires continus

Dans cette partie, nous allons étudier la stabilité des systèmes linéaires homogènes, donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système linéaire soit stabilisable .

Le système considéré est donc régi par :

$$\begin{cases} \dot{x} & = Ax + Bu \\ x(0) & = x_0 \end{cases} \tag{1.5-2}$$

$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et $u \in L^2[0, \infty; \mathbb{R}^m]$.

Remarquons que tout système linéaire homogène asymptotiquement stable est stabilisable.

Propriété 1.5.1 .

Si le système (1.5-2) est complétement contrôlable ((A,B) est complétement contrôlable) alors il est stabilisable.

Preuve.

Soit $P = \displaystyle\int_0^\alpha (\alpha - t) e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt$ avec $\alpha > 0$

et $W(a) = \displaystyle\int_0^a e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt$ avec $a > 0$.

On montre que P est une matrice définie positive.

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^\alpha (\alpha - t)e^{-At}BB^Te^{-A^Tt}dt \\
&> \int_0^a (\alpha - t)e^{-At}BB^Te^{-A^Tt}dt \ \text{ pour } \alpha > a \\
&> \int_0^a (\alpha - a)e^{-At}BB^Te^{-A^Tt}dt \\
P &> (\alpha - a)W(a)
\end{aligned}
$$

or (A, B) est complétement contrôlable, donc la matrice $W(a)$ est définie positive, par suite P est inversible.

On a :

$$
\begin{aligned}
PA^T + AP &= \int_0^\alpha (\alpha - t)[e^{-At}BB^Te^{-A^Tt}A^T + Ae^{-At}BB^Te^{-A^Tt}]dt \\
&= -\int_0^\alpha (\alpha - t)\frac{d}{dt}[e^{-At}BB^Te^{-A^Tt}]dt \\
&= (\alpha - t)[e^{-At}BB^Te^{-A^Tt}]_0^\alpha - \int_0^\alpha e^{-At}BB^Te^{-A^Tt}dt \\
&= \alpha BB^T - W(\alpha)
\end{aligned}
$$

Soit la fonction V définie par $V(x) =< x, P^{-1}x >$, $x \in I\!\!R^n$

Calculons $\dot{V}$ le long de la trajectoire solution de (1.5-2) :

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &=< \dot{x}, P^{-1}x > + < x, P^{-1}\dot{x} > \\
&=< Ax + Bu, P^{-1}x > + < x, P^{-1}(Ax + Bu) > \\
&=< x, (A^TP^{-1} + P^{-1}A)x > + < Bu, P^{-1}x > + < x, P^{-1}Bu > \\
&=< PP^{-1}x, (A^TP^{-1} + P^{-1}A)PP^{-1}x > + < Bu, P^{-1}x > + < P^{-1}x, Bu > \\
&=< P^{-1}x, (PA^T + AP)P^{-1}x > + < Bu, P^{-1}x > + < P^{-1}x, Bu >
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\dot{V} = \alpha \parallel B^TP^{-1}x \parallel^2 + 2 < P^{-1}x, Bu > - < P^{-1}x, W(\alpha)P^{-1}x >
$$

Pour, par exemple, $u = -\alpha B^TP^{-1}x$,

$\dot{V} = -\alpha \parallel B^TP^{-1}x \parallel^2 - < P^{-1}x, W(\alpha)P^{-1}x >$ est strictement négative pour $x \neq 0$.

Par suite, V est une fonction de Lyapunov telle que $\dot{V} \neq 0$ et donc l'origine est asymptotiquement stable. Autrement dit, le système (1.5-2) est stabilisable. ■

Corollaire 1.5.1 .

Si la paire (A, B) est complétement contrôlable alors il existe une matrice $K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telle que A-BK soit asymptotiquement stable.

On dit alors que la paire (A,B) est stabilisable.

Evident d'après la preuve ci-dessus.

Nous allons donner la caractérisation des systèmes linéaires stabilisables.

Soit T une matrice non singulière et l'état transformé par T : $x' = Tx$

Propriété 1.5.2 .

Le système transformé de (1.5-2) par la transformation T est stabilisable si et seulement si le système (1.5-2) est stabilisable.

Preuve

On a $x'(t) = Tx(t)$ et $x(t) = T^{-1}x'(t)$

Donc $\lim\limits_{t\to\infty} \| x'(t) \| = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \| x(t) \| = 0$.

■

Considérons la méthode de décomposition, le système transformé de (1.5-2) est

$$\dot{x'} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \qquad (1.5\text{-}3)$$

où la paire (A_{11}, B_1) est complétement contrôlable.

Proposition 1.5.1 .

Le système (1.5-2) est stabilisable si et seulement si A_{22} est asymptotiquement stable.

Preuve

- $\Longrightarrow$] : Le système (1.5-2) est stabilisable est équivaut à (1.5-3) est stabilisable.

Soit $x' = (x'_1, x'_2)^T$ où la composante x'_1 est complétement contrôlable et la composante x'_2 est non contrôlable.
Il existe un contrôle u tel que $\lim\limits_{t\to\infty} x'(t) = 0$ or $x'_2(t) = e^{A_{22}t}x'_2(0)$ $\forall v$ contrôle.
Par conséquent

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} x'(t) = 0 \quad &\Longrightarrow \lim\nolimits_{t\to\infty} x'_2(t) = e^{A_{22}t}x'_2(0) = 0 \\ &\Longrightarrow A_{22} \text{ est asymptotiquement stable}\end{aligned}$$

- [$\Longleftarrow$: A_{22} est asymptotiquement stable, or la paire (A_{11}, B_1) est complétement contrôlable, donc il existe une matrice K_1 telle que $A_{11} - B_1K_1$ soit asymptotiquement stable. Soit la matrice (K_1, K_2), K_2 matrice quelconque de dimension appropriée, alors la matrice

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} (K_1, K_2) = \begin{pmatrix} A_{11} - BK_1 & A_{12} - BK_2 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

est asymptotiquement stable.
Par suite le système (1.5-2) est stabilisable. ■

Exemple 1.5.1
Soit le système régi par :

$$\dot{x}' = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2\theta} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\theta} \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u \qquad \theta > 0$$

La matrice de controlabilité $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{2\theta} & \frac{-1}{2\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
rang $M = 1$, le système est non complétement contrôlable, or la matrice A_{22} a pour valeur propre $\frac{-1}{\theta}$, donc asymptotiquement stable et par suite le système est stabilisable.

Corollaire 1.5.2 .
Le système (1.5-2) est stabilisable si et si seulement la paire (A, B) est stabilisable.

<u>Preuve</u>

La condition suffisante est évidente. Pour la condition nécessaire elle découle de la preuve du théorème ci-dessus. ■

1.5-2 Stabilisabilité des systèmes bilinéaires

On considère le système bilinéaire régi par l'équation suivante :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x} & = Ax + uBx \\ \\ x(0) & = x_0 \end{array}\right. \tag{1.5-4}$$

où $A \in \mathcal{L}(I\!R^n)$, $B \in \mathcal{L}(I\!R^n)$, $u \in L^2[0, \infty; I\!R]$ et $x(t) \in I\!R^n$.
On suppose qu'il existe une matrice P définie positive telle que :
$i)$ $A^T P + PA = 0$
$ii)$ $PBe^{At}x_0 = 0 \; \forall t \geq 0 \Longrightarrow x_0 = 0$

Théorème 1.5.1 .
Sous les hypothèses i) et ii) le contrôle $u(t) = - < PBx(t), x(t) >$ rend l'origine asymptotiquement stable.

Preuve.

Soit la fonction V définie de $I\!R^n$ dans $I\!R^+$par :

$$V(x) =< Px, x >$$

On a $V(0) = 0$ et $V(x) > 0 \;\; \forall x \neq 0$
La dérivée de V le long de la trajectoire $x(t)$ solution de (1.5-4) est

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &=< P\dot{x}, x > + < Px, \dot{x} > \\ &=< P(Ax + uBx), x > + < Px, Ax + uBx > \\ &=< PAx, x > +u < PBx, x > + < Px, Ax > +u < Px, Bx > \\ &=< (A^T P + PA)x, x > +u < Bx, Px > +u < Px, Bx > \\ \dot{V}(x) &= 2u < PBx, x > \end{aligned}$$

Donc pour
$u(t) = - < PBx(t), x(t) >$, $\dot{V}(x(t)) = -2 < PBx(t), x(t) >^2 \leq 0$
0 est un point d'équilibre et V est une fonction de Lyapunov, par suite l'origine est stable.
Si $\dot{V}(x(t)) = 0 \;\; \forall t > 0$ alors $u(t) = - < PBx(t), x(t) >= 0$ et le système (1.5-4)

devient : $\dot{x} = Ax$, soit $x(t) = e^{At}x_0$
ceci implique que $- < PBe^{At}x_0, e^{At}x_0 >= 0 \;\; \forall t > 0$
ce qui donne $e^{At}x_0 = 0$ ou $PBe^{At}x_0 = 0 \;\; \forall t > 0$ et dans les deux cas on aura $x_0 = 0$; soit $x(t) = 0$.
On conclut donc que l'origine est asymptotiquement stable. $\blacksquare$

Remarques

1. Puisqu'on a : $A^T P + PA = 0$; si $Ax = \lambda x$ (λ valeur propre) alors : $x^T A^T = x^T \lambda$
or $x^T(A^T P + PA)x = 0 \Longrightarrow \lambda x^T Px + x^T P\lambda x = 0$
$\Longrightarrow (\lambda + \overline{\lambda})x^T Px = 0 \Longrightarrow \mathrm{Re}(\lambda) = 0$
Donc toutes les valeurs propres de A sont imaginaires pures.

2. L'hypothèse $ii)$ est satisfaite si

$$\text{span } \{Ax, ad^k(A,B)x, k = 0,1,2,...\} = I\!R^n$$

Soit $x_0 \in I\!R^n$

$$x_0{}^T e^{A^T t} PBe^{At}x_0 = 0 \; \forall t \geq 0 \iff x_0{}^T Pe^{-At}Be^{At}x_0 = 0 \; \forall t \geq 0$$

D'après la formule de Campbell-Baker hausdorff, on a :

$$e^{-At}Be^{At}x_0 = Bx_0 + t\; ad(A,B)x_0 + \frac{t^2}{2!}ad^2(A,B) + ...$$

où

$$ad^0(A,B) = B,\; ad^{k+1}(A,B) = Aad^k(A,B) - ad^k(A,B)B,\; (k = 0,1,...)$$

d'où

$$x_0{}^T Pe^{-At}Be^{At}x_0 = 0 \; \forall t \geq 0 \iff x_0{}^T P \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k ad^k(A,B)t^k}{k!} x_0 = 0 \; \forall t \geq 0$$

En plus d'après $i)$ $A^T P + PA = 0$, donc on doit avoir $x_0{}^T PAx_0$.
Par conséquent si span $\{Ax, ad^k(A,B)x, k = 0,1,2,...\} = I\!R^n$ $ii)$ est vérifiée.
Cette condition suffisante est parfois facile à vérifier dans certaines situations.

Exemple 1.5.2

Soit l'équation du deuxième ordre :

$$\ddot{y} + y + uy = 0$$

En introduisant le vecteur d'état $x = [y, \dot{y}]^T$, on remarque que x vérifie le système bilinéaire :

$$\dot{x} = Ax + uBx$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La paire (A, P), $P = 2I_d$ vérifie la condition $i)$.

On a

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$Be^{At}x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 \cos t \ - x_2 \sin t \end{pmatrix}$$

Donc $Be^{At}x = 0 \ \forall t \implies x_1 = x_2 = 0$

d'où le contrôle en boucle fermée $u = -x^T PBx = x_1 x_2$ rend l'origine asymptotiquement stable.

Le nouveau système obtenu est régi donc par l'équation

Chapitre 2

Observabilité des systèmes dynamiques

2.1 Observabilité

En théorie des systèmes, il existe de nombreux problèmes pour lesquels on a besoin de déterminer l'évolution de l'état d'un système (résolution des problèmes de régulation, par exemple). Cependant, pour la majorité des systèmes, les composantes du vecteur d'état ne sont pas toutes mesurables et cela crée une difficulté principale quand à connaissance de l'évolution du système à tout instant, non seulement pour son importance mais aussi pour implanter un contrôle en boucle fermée qui ne serait possible que si le vecteur d'état est connu.
Plus précisément, le problème se présente comme suit :
déterminer l'état initial $x(t_0) = x_0$ (resp. l'état final $x(t_1) = x_1$) à partir de la paire entrée-sortie $(u(t), y(t))$ pendant un intervalle de temps $[t_0, t_1]$.

2.1-1 Définitions

On considère le système continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = f(t, x(t), u(t)) \\ \\ y(t) & = g(t, x(t), u(t)) \end{cases} \tag{2.1-1}$$

où les fonctions f et g sont continûment différentiables.
respevtivement le système discret

$$\begin{cases} x(k+1) & = f(k, x(k), u(k)) \\ \\ y(k+1) & = g(k, x(k), u(k)) \end{cases} \tag{2.1-2}$$

On note par $y(t) = y(t, t_0, x_0, u)$ l'équation de sortie lorsque l'état initial du système est x_0 (resp $y(k) = y(k, k_0, x_0, u)$)et soit $t_0 < t_1$ (resp $k_0 < k_1$).

Définition 2.1.1 .

1) Le système (2.1-1) (resp (2.1-2)) est dit initialement observable sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ *(resp sur* $\{k_0, k_1\}$*) si pour tout* $u \in L^2[t_0, t_1; \mathbb{R}^m]$ *et si* $y(t, t_0, x_0, u) = y(t, t_0, x'_0, u)$ *sur* $[t_0, t_1]$ *(resp* $y(k, k_0, x_0, u) = y(k, k_0, x'_0, u)$ $k_0 \leq k \leq k_1$*) alors* $x_0 = x'_0$

2) Le système (2.1-1) (resp (2.1-2)) est dit finalement observable sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ *(resp sur* $\{k_0, k_1\}$*) si étant donné* $u \in L^2[t_0, t_1; \mathbb{R}^m]$ *et si* $y(t, t_0, x_0, u) = y(t, t_0, x'_0, u)$, *(resp* $y(k, k_0, x_0, u) = y(k, k_0, x'_0, u)$*) alors* $x(t_1, t_0, x_0, u) = x(t_1, t_0, x'_0, u)$ *(resp* $x(k_1, k_0, x_0, u) = x(k_1, k_0, x'_0, u)$*)*

3) Le système (2.1-1) (resp (2.1-2)) est dit initialement observable s'il est initialement observable sur tout intervalle (resp sur toute partie de $\mathbb{N}$*).*

Si le système est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = A(t)x(t) \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \\ \\ y(t) & = Cx(t) \qquad y(t) \in \mathbb{R}^k \end{cases} \tag{2.1-3}$$

alors,

Définition 2.1.2 .

Le système (2.1-3) est complétement observable dans l'intervalle $[0, t_1]$ *si l'état initial* $x(0)$ *peut être déterminé à partir de la connaissance des mesures* $y(t)$ *dans l'intervalle* $[0, t_1]$.

Il est dit totalement observable dans $[0, t_1]$ *s'il est complétement observable dans chaque sous intervalle de* $[0, t_1]$.

La matrice d'observabilité $\Theta(t)$ *de dimension* (n, nk) *est définie par :*

$$\Theta(t) = [C^\top, \Delta(t)C^\top, ..., \Delta^{n-1}(t)C^\top] \text{ où } \Delta(t) = A^\top(t) + \frac{d}{dt}$$

Cette matrice fournit un critère algébrique pour l'observabilité du système.
Ce dernier est donc observable si le rang de la matrice $\Theta(t)$ est égal à n.

Théorème 2.1.1 .
Si A(t) est (n-2) fois différentiable presque partout dans $[0, t_1]$*, le système (2.1-3) est complétement (respectivement totalement) observable dans* $[0, t_1]$ *si (respectivement si et seulement si)* $\operatorname{rang}\Theta(t) = n$ *presque partout dans un certain sous-intervalle de* $[0, t_1]$ *(respectivement dans* $[0, t_1]$*).*

Si le système est complétement observable et $\operatorname{rang}\Theta(t) = n$ partout dans $[0, t_1]$, alors le système (2.1-3) est dit uniformément observable.
Dans ce cas, l'état $x(t_2)$ à l'instant $t = t_2$ peut être déterminé par la connaissance de la sortie $y(t_2)$ à cet instant.

2.1-2 Observabilité des systèmes linéaires continus

Cette section sera consacrée à l'étude de l'observabilité des systèmes linéaires continus autonomes.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{2.1-4}$$

où $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$, $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ et $u \in L^2[t_0, t_1; \mathbb{R}^m]$.
On dira que la paire (A, C) est observable si le système (2.1-4) est observable.

Matrice d'observabilité

On définit la matrice d'observabilité par

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Théorème 2.1.2 .

Le système (2.1-4) est initialement observable si et seulement si $\operatorname{rang} Q = n$.

Preuve

On suppose le système initialement observable :

$y(t, t_0, x_0, 0) = Ce^{At}x_0 = 0 \Longrightarrow x_0 = 0$. Ce résultat implique que $\operatorname{rang} Q = n$.

Inversement; soit $u \in L^2[t_0, t_1; I\!R^m]$ et $x_0,\ x'_0$ tels que

$$y(t, t_0, x_0, u) = y(t, t_0, x'_0, u), \quad t_0 < t < t_1$$

ou encore

$$Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-s)}Bu(s)ds = Ce^{A(t-t_0)}x'_0 + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-s)}Bu(s)ds.$$

Ce qui donne $Ce^{A(t-t_0)}(x'_0 - x_0) = 0$.

En dérivant $(n-1)$ fois $Ce^{A(t-t_0)}(x'_0 - x_0)$ par rapport à t et $t = t_0$ on obtient $CA^k(x'_0 - x_0) = 0$ pour tout $k = 0, ..., n-1$. Or $\operatorname{rang} Q = n$ implique que $x'_0 - x_0 = 0$. D'où le résultat. ■

Proposition 2.1.1 .

Le système (2.1-4) est initialement observable sur $[t_0, t_1]$ *si et seulement si* $y(t, t_0, x_0, 0) = 0$ *sur* $[t_0, t_1] \Longrightarrow x_0 = 0$

La preuve est évidente.

Ensembles non observables

Définition 2.1.3 .

Un état $x_0 \in I\!R^n$ *est dit non observable sur* $[t_0, t_1]$ *si* $y(t, t_0, x_0, 0) = 0$ *sur* $]t_0, t_1[$

On note par $\mathcal{N}(t)$ l'ensemble des états non observables sur $[0, t]$:

$$\mathcal{N}(t) = \{x_0 \in I\!R^n / y(t', 0, x_0, 0) = 0 \ t' \in [0, t]\}$$

Définition 2.1.4 .

On appelle espace non observable du système (2.1-4), le sous-espace linéaire $\mathcal{N}$ *des états* x_0 *tel que* $y(t, 0, x_0, 0) = 0$ *pour tout* $t > 0$. *Soit* $\mathcal{N} = \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{N}(t)$

Propriété 2.1.1 .

1) Si $t < s$ alors $\mathcal{N}(s) \subset \mathcal{N}(t)$.

De plus si $\mathcal{N}(s) = \mathcal{N}(t)$ alors $\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(\tau)$, $\forall \tau > t$.

2) Le système linéaire (2.1-4) est initialement observable si et seulement si $\mathcal{N} = \{0\}$ et initialement observable sur $[0, t]$ si et seulement si $\mathcal{N}(t) = \{0\}$.

3) Le système linéaire (2.1-4) est finalement observable sur $[0, t]$ si et seulement si $\mathcal{N}(t) \subset \operatorname{Ker} \Phi(t)$, où l'application $\Phi(t)$ définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ par $\Phi(t)x = x(t, 0, x, 0)$.

Remarque 2.1.1 .

Puisque l'espace d'état $\mathbb{R}^n$ est de dimension fini, d'après 1) de la propriété ci-dessus, il existe $t > 0$ tel que $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t)$.

Proposition 2.1.2 .

Soit $t > 0$.

$\mathcal{N} = \mathcal{N}(t) = \ker Q = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} CA^{i-1}$

Preuve

Soit $x_0 \in \mathcal{N}(t)$ alors $y(s, 0, x_0, 0) = Ce^{As}x_0 = 0$ pour tout $\forall s \in [t, 0]$.

En dérivant $(n-1)$ fois $Ce^{As}x_0$ par rapport à s et pour $s = 0$ on obtient $CA^k x_0 = 0$ pour tout $k = 0, ..., n-1$, ou encore $x_0 \in \ker Q$.

$x_0 \in \mathcal{N}$ si et seulement si $y(t, 0, x_0, 0) = Ce^{At}x_0 = 0\ forall t > 0$.

Or $Ce^{At}x_0 = C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} x_0$.

Soit $x_0 \in \ker Q$. Alors d'après Cayley-Hamilton, on conclut que $CA^i x_0 = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. ■

Remarque 2.1.2 .

La proposition ci-dessus montre que pour le cas linéaire continu, le système est initialement (resp finalement) observable sur un intervalle $[0, t]$ ne dépend pas du temps t.

Propriété 2.1.2 .

$\mathcal{N}$ est invariant par A.

Preuve

Si $x_0 \in \mathcal{N}$ alors $x_0 \in \ker Q$. Ce qui donne $CA^l x_0 = 0$ pour tout $l = 0, ..., n-1$. D'après Cayley-Hamilton on $CA^l x_0 = 0$ pour tout l qu'on peut encore écrire $CA^{l-1}Ax_0 = 0$ pour tout $l \geq 1$. Il vient $CA^l(Ax_0) = 0$ pour tout l. On conclut que $Ax_0 \in \mathcal{N}$. ■

Proposition 2.1.3 .

Si $y(t, t_0, x_0, u) = y(t, t_0, x_1, u)$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$ alors $x_1 - x_0 \in \mathcal{N}$ et $x(t_1, t_0, x_0, u) - x(t_1, t_0, x_1, u) \in \mathcal{N}$

Preuve

Si $y(t, t_0, x_0, u) = y(t, t_0, x_1, u)$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$ alors
$Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s)ds = Ce^{A(t-t_0)}x_1 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s)ds.$
On déduit que $y(t, t_0, x_0 - x_1, 0) = 0$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$, c'est à dire $x_1 - x_0 \in \mathcal{N}$.
De même

$$\begin{aligned} x(t_1, t_0, x_0, u) &= e^{A(t_1-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds \\ &= x(t_1, t_0, x_1, u) + e^{A(t_1-t_0)}(x_0 - x_1) \end{aligned}$$

et puisque $\mathcal{N}$ est invariant par A, alors $e^{A(t_1-t_0)}(x_0 - x_1) \in \mathcal{N}$. ■

Définition 2.1.5 .

Deux paires (A,C) et (A',C') sont équivalentes s'il existe P matrice régulière telle que $A' = PAP^{-1}$ et $C' = CP$.

Théorème 2.1.3 .

Toute paire (A, C) est équivalente à une paire (A', C') de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} A'_{11} & 0 \\ A'_{21} & A'_{22} \end{pmatrix} \quad C' = (C'_1 \ \ 0).$$

où rang$\{{C'_1}^\top, {A'_{11}}^\top {C'_1}^\top, ..., {A'^{n'-1}_{11}}^\top {C'_1}^\top\} = n'$ *et* n' *étant la dimension du bloc* A'_{11}

<u>Preuve</u>

La démonstration est analogue à la méthode de décomposition (cf chap 2) où n' étant le rang de la matrice d'observabilité Q, en considérant le changement de matrice $U = (U_1, U_2)^\top$ où U_1 étant formée par une base de l'espace formé par les lignes de Q et le changement de variable considéré est $x'(t) = Ux(t)$. ■

Remarque 2.1.3 .
Il résulte du théorème ci-dessus que si on pose $x'(t) = (x'_1(t), x'_2(t))^\top$ *où* x'_1 *vecteur d'ordre* n' *et* x'_2 *vecteur d'ordre* $n - n'$ *alors*
$y(t, t_0, x'(t_0), 0) = 0$ *est équivalent à* $x'_1(t_0) = 0$.

Exemple 2.1.1
Un mobile de masse M se déplace suivant un axe, ses déplacements sont représentés par s, les forces exercées sur le mobile sont :
u force exercée par le moteur, H force horizontale et V force verticale. Un pendule inversé de longueur L accroché sur un pivot placé sur le mobile fait un angle Φ avec la force V.
Les lois de la physique donnent :

$$M\ddot{s}(t) = u(t) - F\dot{s}(t)$$

$$\ddot{\Phi}(t) - \frac{g}{L'}\sin\Phi(t) + \frac{1}{L'}\ddot{s}(t)\cos\Phi(t) = 0$$

où F est le coefficient de frottement, $L' = \dfrac{J + ML^2}{ML}$ et J le moment d'inertie.
Le système linéarisé est donné par l'équation suivante :

$$\ddot{\Phi}(t) - \frac{g}{L'}\Phi(t) + \frac{1}{L'}\ddot{s}(t) = 0$$

On pose $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^\top$
avec $x_1(t) = s(t),\ x_2(t) = \dot{s}(t),\ x_3(t) = s(t) + L'\Phi(t),\ x_4(t) = \dot{s}(t) + L'\dot{\Phi}(t)$.
Ce qui donne

$\dot{x}_1(t) = x_2(t),\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{M}u(t) - \dfrac{F}{M}x_2(t),\ \dot{x}_3(t) = x_4(t),\ \dot{x}_4(t) = \dfrac{g}{L'}[x_3(t) - x_1(t)]$ qui s'écrit sous forme matricielle

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-F}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{-g}{L'} & 0 & \dfrac{g}{L'} & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

On suppose qu'on observe l'angle $\Phi(t)$ et l'équation de sortie s'écrit alors $y(t) = (-\dfrac{1}{L'}, 0, \dfrac{1}{L'}, 0)x(t)$

La matrice d'observabilité est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{L'} & 0 & \dfrac{1}{L'} & 0 \\ 0 & \dfrac{-1}{L'} & 0 & \dfrac{1}{L'} \\ \dfrac{-g}{L'}\dfrac{1}{L'} & \dfrac{F}{M}\dfrac{1}{L'} & \dfrac{g}{L'}\dfrac{1}{L'} & 0 \\ 0 & \dfrac{-g}{L'}\dfrac{1}{L'} - \dfrac{F^2}{M^2}\dfrac{1}{L'} & 0 & \dfrac{g}{L'}\dfrac{1}{L'} \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rang} Q = 3$ donc le système n'est pas initialement observable et le sous-espace d'observabilité est de dimension 3.

Une base de ce sous espace est donnée par

$f_1 = (-1, 0, 1, 0),\ f_2 = (0, -1, 0, 1),\ f_3 = (0, 1, 0, 0)$.

L'espace $\mathcal{N}$ des états non observables est engendré par $(1, 0, 1, 0)^\top$.

On complète la base de $I\!R^4$ par $f_4 = (1, 0, 0, 0)$.

La matrice de changement U et son inverse U^{-1} sont donnés par

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En considérant le changement de variable $x'(t) = Ux(t)$, on trouve que

$$\dot{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{L'} & 0 & \frac{F}{M} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-F}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{M} \\ \frac{1}{M} \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (\frac{1}{L'}, 0, 0, 0)x'(t)$$

On a alors

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_1(t) + x_3(t) &&= L'\Phi(t) \\ x_2'(t) &= -x_2(t) + x_4(t) &&= L'\dot{\Phi}(t) \\ x_3'(t) &= \quad x_2(t) &&= \dot{s}(t) \\ x_4'(t) &= \quad x_1(t) &&= s(t) \end{aligned}$$

De cette représentation, on conclut que la position et la vitesse du pendule relatives au mobile et la vitesse du mobile sont observables, mais la position du mobile ne l'est pas.

2.1-3 Observabilité des systèmes linéaires discrets

Cette section sera consacrée à l'étude de l'observabilité des systèmes linéaires discrets autonomes.

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases} \tag{2.1-5}$$

où $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$, $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ et $u(k) \in \mathbb{R}^m$.

Matrice d'observabilité

On définit de la même manière la matrice d'observabilité par

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Théorème 2.1.4 .

Le système (2.1-5) est initialement observable si et seulement si $\operatorname{rang} Q = n$.

Ensembles non observables

On voudrait caractériser l'espace non observable d'un système linéaire discret défini de la même façon que l'espace non observable d'un système linéaire continu.

$$\mathcal{N}(k) = \{x \in I\!R^n / y(k', 0, x_0, 0) = 0 \; 0 \leq k' \leq k\}$$

$$\mathcal{N} = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{N}(k)$$

Propriété 2.1.3 .

1) Si $k' < k$ *alors* $\mathcal{N}(k) \subset \mathcal{N}(k')$.

De plus si $\mathcal{N}(k') = \mathcal{N}(k)$ *alors* $\mathcal{N}(k') = \mathcal{N}(m)$, $\forall m > k'$.

2) Le système linéaire (2.1-5) est initialement observable si et seulement si $\mathcal{N} = \{0\}$ *et initialement observable sur* $[0, k] \cap I\!N$ *si et seulement si* $\mathcal{N}(k) = \{0\}$.

Proposition 2.1.4 .

$\forall k \geq n-1 \; \mathcal{N} = \mathcal{N}(k) = \cap_{i=1}^{n} \ker CA^{i-1}$

Preuve.

Soit $x_0 \in I\!R^n$, $x(i) = A^i x_0$ $(u = 0)$.

x_0 est non observable sur $I\!N$ si et seulement si $CA^i x_0 = 0 \; \forall i \in I\!N$, d'après Cayley-Hamilton ceci est équivalent à $CA^i x_0 = 0 \; \forall i = 0, ..., n-1$. Donc $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker CA^{i-1}$. De plus la suite $\mathcal{N}(k)$ est décroissante et par suite devient stationnaire au plus après $n-1$ étapes puisque $\dim I\!R^n = n$. ■

Remarque 2.1.4 .

$\mathcal{N}$ *est invariant par* A *et le système (2.1-5) est initialement observable si et seulement si il est initialement observable sur* k *étapes,* $\forall k \geq n-1$.

2.2 Détectabilité des systèmes linéaires

Dans la section sur l'observabilité, nous avons vu que si le système linéaire n'est pas complétement observable alors il y avait toujours une incertitude sur l'état du système et cette incertitude appartient à l'ensenble des états non observable $\mathcal{N}$.

Il sera donc souhaitable que chaque état dans $\mathcal{N}$ converge vers zéro lorsque $t \to \infty$; par suite l'erreur ne va jamais croître indéfiniment. On définit alors cette propriété comme suit :

Définition 2.2.1 .

Le système linéaire continu homogène

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} & = Ax + Bu \\ y & = Cx \end{array} \right. \tag{2.2-1}$$

où $C \in \mathcal{L}(I\!R^n, I\!R^p)$

respectivement le sysème discret linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(k+1) & = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) & = Cx(k) \end{array} \right. \tag{2.2-2}$$

est détectable si l'ensemble des états non observables $\mathcal{N}$ *est contenu dans son sous-espace stable.*

i.e. $x_0 \in \mathcal{N} \Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} x(t, x_0, 0) = 0$ *(resp* $\lim\limits_{k\to\infty} x(k, x_0, 0) = 0$*).*

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la définition :

Propriété 2.2.1 .

- Tout système (2.2-1)(resp (2.2-2)) asymptotiquement stable est détectable.

- Tout système (2.2-1) (resp (2.2-2)) complétement observable est détectable.

Les systèmes continus détectables ont la propriété suivante :

Proposition 2.2.1 .

Soit le système transformé de (2.2-1) selon le théorème 1.3

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \begin{pmatrix} A'_{11} & 0 \\ A'_{21} & A'_{22} \end{pmatrix} x' + B'u \\ y &= (C'_1, 0)x' \end{aligned} \tag{2.2-3}$$

où la paire (A'_{11}, C'_1) est complétement observable.
Alors le système (2.2-1) est détectable si et seulement si A'_{22} est asymptotiquement stable.

<u>Preuve</u>

- $\Longrightarrow$] : Le système (2.2-1) détectable,
Soit $x(t, x_0, 0)$ l'état du système (2.2-1) non contrôlé ($u = 0$) et $x'(t)$ l'état transformé correspondant.
Posons $x'(t) = (x'_1(t), x'_2(t))^T$ où la dimension du vecteur x'_1 est égale à n' rang de la matrice d'observabilité de (2.2-1).
Soit $x_0 \in \mathcal{N}$, son état transformé est de la forme $x'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x'_{20} \end{pmatrix}$
Par suite, la trajectoire $x'(t)$ d'état initial x'_{20} est donnée par :

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{A'_{22}t} x'_{20} \end{pmatrix}$$

or $\lim_{t\to\infty} x(t, x_0, 0) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{t\to\infty} x'(t, x'_0, 0) = 0$.
D'où $\lim_{t\to\infty} e^{A'_{22}t} x'_{20} = 0$, donc A'_{22} est asymptotiquement stable.
[$\Longleftarrow$ Soit $x_0 \in \mathcal{N}$ alors son état transformé est de la forme $x'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x'_{20} \end{pmatrix}$
et la trajectoire correspondante à cet état initial est

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{A'_{22}t} x'_{20} \end{pmatrix}$$

Puisque A'_{22} est stable, cette solution converge vers 0, et donc le système est détectable. ■

Exemple 2.2.1
Considérons l'exemple du pendule inversé (traité dans la section observabilité). Dans sa représation transformée, la matrice A'_{22} a pour valeur propre 0, ce qui implique que le système n'est pas détectable. Cela signifie que si initiallement il y a une incertitude sur la position du mobile, alors l'erreur ne tendra pas vers 0, elle restera constante.

2.3 Dualité des systèmes linéaires

D'après le chapitre précédent et celui-ci, nous remarquons qu'il y a une symétrie entre les propriétés de la contrôlabilité des systèmes linéaires et celles de l'observabilté. Cette symétrie peut être expliquée en introduisant la notion de dualité.

Définition 2.3.1 .
Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) & = C(t)x(t) \end{cases} \tag{2.3-1}$$

et le système :

$$\begin{cases} \dot{x}^\star(t) & = A^T(t^\star - t)x^\star(t) + C^T(t^\star - t)u^\star(t) \\ y^\star(t) & = B^T(t^\star - t)x^\star(t) \end{cases} \tag{2.3-2}$$

où $t^\star$ est un temps arbitraire fixé. Alors le système (2.3-2) est le dual du système (2.3-1).

Propriété 2.3.1 .
Le dual du système (2.3-2) est le système original (2.3-1).

Propriété 2.3.2 .
Le système (2.3-1) est exponentiellement stable si et seulement si le système (2.3-2) est exponentiellement stable.

Preuve

Evident. Si la matrice de transition de (2.3-1) est $\Phi(t, 0)$ alors la matrice de transition de son dual (2.3-2) est $\Phi^T(t^\star, t^\star - t)$. ■

Proposition 2.3.1 .
Soit le système linéaire homogène

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = Cx(t) \end{cases} \tag{2.3-3}$$

et $x'(t) = Tx(t)$ où T matrice de transformation inversible.
Alors le dual de (2.3-3) est transformé au dual du système transformé par la transformation $x^\star(t) = T^T x'^\star(t)$.

Preuve

Le dual de (2.3-3) est

$$\begin{cases} \dot{x}^\star(t) & = A^T x^\star(t) + C^T u^\star(t) \\ y^\star(t) & = B^T x^\star(t) \end{cases} \tag{2.3-4}$$

Le système transformé par T est régi par :

$$\begin{cases} \dot{x}'(t) & = TAT^{-1}x'(t) + TBu(t) \\ y(t) & = CT^{-1}x'(t) \end{cases} \tag{2.3-5}$$

Le dual de (2.3-5) est

$$\begin{cases} \dot{x}'^{\star}(t) & = {T^{-1}}^{T}A^{T}T^{T}x'^{\star}(t) + {T^{-1}}^{T}C^{T}u^{\star}(t) \\ y^{\star}(t) & = B^{T}T^{T}x'^{\star}(t) \end{cases} \tag{2.3-6}$$

Le système (2.3-6) est équivalent au système :

$$\begin{cases} T^{T}\dot{x}'^{\star}(t) & = A^{T}T^{T}x'^{\star}(t) + C^{T}u^{\star}(t) \\ y^{\star}(t) & = B^{T}T^{T}x'^{\star}(t) \end{cases}$$

On remarque alors que l'état $T^{T}x'^{\star}(t)$ vérifie l'équation (2.3-4), et par conséquent $x^{\star}(t) = T^{T}x'^{\star}(t)$. ■

Il existe une relation étroite entre l'observabilité et la contrôlabilé d'un système linéaire et son dual.

Théorème 2.3.1 .
Soit le système (2.3-1) et son dual (2.3-2) où $t^{\star}$ est arbitraire.
i) Le système (2.3-1) est (uniformément) complétement contrôlable si et seulement si son dual est (uniformément) complétement observable.
ii) Le système (2.3-1) est (uniformément) complétement observable si et seulement si son dual est (uniformément) complétement contrôlable .
iii) Supposons que (2.3-1) est homogène. Alors (2.3-1) est stabilisable si et seulement si son dual est détectable.
iv) Supposons que (2.3-1) est homogène. Alors (2.3-1) est détectable si et seulement si son dual est stabilisable.

Preuve.

Nous présentons la démonstration seulement pour les systèmes linéaires homogènes.

i) La matrice d'observabilité du système dual est :

$$Q^\star = \begin{pmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ . \\ . \\ . \\ B^T {A^T}^{n-1} \end{pmatrix} = M^T$$

où M est la matrice de contrôlabilité du système (2.3-1). Ce qui montre i).

ii) De même la matrice de contrôlabilité du système dual est :

$$M^\star = (C^T, A^T C^T, ..., {A^T}^{n-1} C^T) = Q^T$$

où Q est la matrice d'observabilité de (2.3-1).

iii) Considérons le système transformé par la transformation $x' = T^{-1}x$ selon le théorème 3.2 cf : chapitre 3 :

$$\begin{aligned} \dot{x'} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (C_1, C_2) x' \end{aligned}$$

où la paire (A_{11}, B_1) est complétement contrôlable et A_{22} est asymptotiquement stable.

Le dual du système transformé est :

$$\begin{aligned} \dot{x'}^\star &= \begin{pmatrix} {A_{11}}^\star & 0 \\ {A_{12}}^\star & {A_{22}}^\star \end{pmatrix} x'^\star + \begin{pmatrix} C_1^\star \\ C_2^\star \end{pmatrix} u^\star \\ y^\star &= ({B_1}^\star, 0) x'^\star \end{aligned} \tag{2.3-7}$$

Puisque (A_{11}, B_1) est complétement contrôlable, d'après i) $(A_{11}^\star, B_1^\star)$ est complétement observable. Et puisque A_{22} est asymptotiquement stabe alors il en est de même pour $A_{22}^\star$. D'où le système (2.3-7) est détectable.

Par la transformation $T^T x^\star = x'^\star$, le système (2.3-7) est transformé au dual du système (2.3-1). Cependant, puisque (2.3-7) est détectable, le dual de (2.3-1) est aussi détectable.

En utilisant le raisonnement inverse, on montre la réciproque.

iv) La démonstration est analogue à iii). ■

Exemple 2.3.1

soit l'équation différentielle scalaire

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + ... + a_1 x = u \tag{2.3-8}$$

Posons

$$x_1 = x,\ \frac{dx_1}{dt} = x_2,\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 ... \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n.$$

Le système (2.3-8) est équivalent à

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

où

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & . & . & . & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & & -a_n \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de contrôlabilité $M = [B, AB, ..., A^{n-1}B]$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite rang $M = n$ et le système (2.3-8) est complétement contrôlable.

D'après le théorème de dualité on déduit que le système

$$\begin{cases} \dot{x} & = A^T x + \overline{B}u \\ \\ y & = Cx \end{cases}$$

où $C = (0, 0, ..., 1)$ et $\overline{B} \in \mathcal{L}(I\!R, I\!R^n)$ quelconque, est complétement observable.

Corollaire 2.3.1 .

Le système (2.3-1) est détectable si et seulement si il existe $K \in \mathcal{L}(I\!R^n, I\!R^p)$ tel que (A-KC) soit asymptotiquement stable.

On dit alors que la paire (A,C) est détectable.

Preuve

Le système (2.3-1) est détectable si et seulement si son dual (2.3-2) est stabilisable. Et d'après le corollaire 2.2, ceci est équivalent à (A^T, C^T) est stabilisable. Donc $\exists F$ tel que $A^T - C^T F$ est asymptotiquement stable et par suite, $A - F^T C$ est asymptotiquement stable. D'où le résultat. ■

2.4 Observateur asymptotique des systèmes linéaires

La nécessité de connaître à chaque instant les valeurs du vecteur d'état apparaît clairement lorsque le contrôle est fonction de l'état. L'information sur l'état est obtenue par l'intermédiaire des observations dont le nombre, est en général, est inférieur au nombre de variables d'état, et constitue la fonction de sortie.
Aussi faut-il pouvoir construire un certain estimateur, appelé observateur, dont les entrées sont le contrôle et la fonction sortie et dont l'objectif est de reconstruire l'état.

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} & = Ax + Bu \\ x(0) & = x_0 \in I\!R^n \\ y & = Cx \quad y(t) \in I\!R^p \end{cases}$$

où $A \in \mathcal{L}(I\!R^n)$, $B \in \mathcal{L}(I\!R^m, I\!R^n)$ et $C \in \mathcal{L}(I\!R^n, I\!R^p)$.

Pour ce système, nous désignons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} & = Fz + Hy + Gu \\ z(0) & = z_0 \in I\!R^r \end{cases}$$

où $F \in \mathcal{L}(I\!R^r, I\!R^r)$, $H \in \mathcal{L}(I\!R^p, I\!R^r)$ et $G \in \mathcal{L}(I\!R^m, I\!R^r)$.

Soit

$$w = Sx + Ry$$

où $S \in \mathcal{L}(I\!R^n, I\!R^n)$ et $R \in \mathcal{L}(I\!R^p, I\!R^n)$

Définition 2.4.1 .

Soit $K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r)$ Le système (2.4) est dit K-observateur asymptotique pour le système (2.4) si

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \parallel z(t) - Kx(t) \parallel = 0 \;\; \forall u(.), \; x_0, \; z_0.$$

Si $K = I_n$ $(r = n)$ le système (2.4) est dit observateur asymptotique ou observateur identité pour le système (2.4) et $z(t)$ est appelé estimé de $x(t)$.
Lorsque $u = 0$, l'observateur asymptotique est appelé observateur de Luemberger.
w est appelé estimateur asymptotique de x si $\lim_{t \longrightarrow \infty} \parallel w(t) - x(t) \parallel = 0$.

Théorème 2.4.1 .

Sous les hypothèses suivantes :

1. *Toutes les valeurs propres de F ont la partie réelle négative.*
2. *$KA - FK = HC$.*
3. *$G = KB$*

le système (2.4) est K-observateur asymptotique pour le système (2.4).

preuve.

Posons $e = z - Kx$.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{z} - K\dot{x} \\ &= Fz + HCx + Gu - KAx - KBu \\ &= Fz - FKx + [FK - KA + HC]x + [G - KB]u \\ \dot{e} &= Fe \quad \text{d'après les hypothèses} \end{aligned}$$

Par suite $e(t) = e^{Ft}(z_0 - Kx_0)$.
D'après 1. $\lim_{t \longrightarrow \infty} \parallel e(t) \parallel = 0$. ■

Observateur identité

Proposition 2.4.1 .

Sous les conditions du théorème 4.1 et si

1. *$r + p \geq n$*

2. $\text{rang}[C,K]^T = n$

alors il existe un estimateur asymptotique de l'état du système (2.4).

preuve.

$\text{rang}[C,K]^T = n$, il existe alors deux matrices R et S de dimension appropriée telles que :

$$x = RCx + SKx$$

ou encore

$$RC + SK = I_n.$$

Soit alors $\hat{x} = Sz + Ry$.

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - \hat{x} \\ &= Ry + SKx - Ry - Sz \\ \bar{x} &= S(Kx - z) \end{aligned}$$

On a alors $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \| \bar{x}(t) \| = \lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \| S(Kx - z) \| = 0.$ ■.

Dans le cas où $K = I_n$, nous avons

Proposition 2.4.2 .

Si la paire (A,C) est détectable, alors il existe un observateur asymptotique pour le système (2.4).

preuve.

$K = I_n$.

(A,C) est détectable, il existe alors $H \in \mathcal{L}(I\!R^p, I\!R^n)$ tel que $F = A - HC$ soit asymptotiquement stable.

soit alors le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} &= Fz + Hy + Bu \\ z(0) &= z_0 \in I\!R^n \end{cases}$$

Les matrices F, H et B vérifient les hypothèses 1, 2 et 3 du théorème 4.1. D'où le résultat. ■

Proposition 2.4.3 .

Les valeurs propres de F=A-HC peuvent être fixées arbitrairement si et seulement si la paire (A,C) est observable

<u>Conséquences</u>.

Le choix de la matrice H est large. De façon générale, on la choisit telle que les valeurs propres de F aient des parties réelles négatives plus grandes en module que celles des valeurs propres de A. Toutefois, on doit tenir compte du choix de façon à assurer une dynamique convenable à l'observateur.

Observateur d'ordre minimal

La construction d'un observateur d'ordre minimal correspond au cas où $r = n - p$.

On suppose que $\text{rang}[C, K]^T = n$.

Soit $\bar{x} = Kx$, alors

$$\begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} x$$

$\text{rang}[C, K] = n \Longrightarrow [C, K]$ est inversible

$$x = \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ \bar{x} \end{bmatrix}$$

Soit

$$[R, S] = \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix}^{-1}$$

L'hypothèse 1. du théorème 4.1 devient :

$$KA - FK = HC \Longleftrightarrow \begin{array}{rl} KA & = HC + FK \\ & = [H, F] \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} \end{array}$$

$\Longrightarrow \quad [H, F] = KA[R, S]$

$\Longrightarrow \begin{cases} H & = KAR \\ F & = KAS \end{cases}$

Décomposons le sysème (2.4)en deux sous-systèmes dont un est connu à partir de la fonction sortie y.

$$x = [x_1, x_2]^T \quad x_1 \in I\!R^p, \quad x_2 \in I\!R^{n-p}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$y = C[x_1, x_2]^T = [I_p, 0][x_1, x_2]^T = x_1$

Considérons :

$$\bar{x} = K_{11}x_1 + K_{12}x_2$$

où K_{12} est supposé inversible.

On obtient alors

$$K_{12}^{-1}\bar{x} = K_{12}^{-1}K_{11}x_1 + x_2$$

Ceci permet alors de considérer le vecteur d'état :

$$\bar{x} = Tx_1 + I_{n-p}x_2$$

par suite :

$$\begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ T & I_{n-p} \end{bmatrix}$$

$$[R, S] = \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -T & I_{n-p} \end{bmatrix}$$

Soit alors $R = [I_p, -T]^T$ et $R = [0, I_{n-p}]^T$.

Ainsi :

$$KA = [T, I_{n-p}] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = [TA_{11} + A_{21}, TA_{12} + A_{22}]$$

Soit alors :

$$\begin{cases} H & = KAR & = A_{12} + TA_{11} - A_{22}T - TA_{12}T \\ F & = KAS & = A_{22} + TA_{12} \\ G & = KB & = B_2 + TB_1 \end{cases}$$

Comme pour le cas identité, il suffit de choisir T de telle façon que les valeurs propres de $A_{22} + TA_{12}$ aient des parties réelles strictememt négatives. D'où le résultat

Théorème 2.4.2 .

S'il existe une matrice T (n-p)×p telle que toutes les valeurs propres de $TA_{12} + A_{22}$ ont la partie réelle négative alors le système régi par :

$$\begin{cases} \dot{z} & = TA_{12} + A_{22}z + (A_{12} + TA_{11} - A_{22}T - TA_{12}T)y + (B_2 + TB_1)u \\ z(0) & = z_0 \in I\!R^{n-p} \end{cases}$$

est un observateur d'ordre minimal pour le système (2.4) preuve.

D'après ce qui précède, on a

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}[\bar{x}(t) - z(t)] =$$
$$\lim_{t\longrightarrow\infty}[Tx_1(t) + I_{n-p}x_2(t) - z(t)] = 0.$$

Comme $x_1 = y$, Tx_1 est connu et par suite $z + Tx_1$ estime x_2. ∎