Département des Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Moulay Ismail
Année Universitaire 2021-2022

S4 : Mathématiques
Module: Algèbre 5

Série 3

Exercice 1.
Soient F, G deux sous espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. Montrer que
a) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
b) $F^{\perp} + G^{\perp} \subseteq (F \cap G)^{\perp}$. Montrer l'égalité si la dimension de E est finie.

Exercice 2.
Soit E un espace euclidien de dimension n.
1) Soit $a \in E$ avec $a \neq 0$. Vérifier que $a^{\perp}$ est un hyperplan.
2) Soit H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe $0 \neq a \in E$ tel que $H = a^{\perp}$.
3) Soient $a, b \in E$ deux éléments non nuls. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que $a^{\perp} = b^{\perp}$.

Exercice 3.
Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$.
1) Montrer que $(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k)^2 \leq n \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$. Etudier le cas d'égalité.
2) On suppose que $x_1, \cdots, x_n > 0$ et que $x_1 + \cdots + x_n = 1$.
Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k} \geq n^2$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 4.
On considère $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ muni du produit scalaire $f|g = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \{f \in E : f(0) = 0\}$. Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice 5.
Soit E un espace euclidien.
1) Soit p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $||p(x)|| \leq ||x||$ pour tout $x \in E$.

2) Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que $\mathrm{Im}(p) \subseteq \mathrm{Im}(q)$ si et seulement si $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$ pour tout $x \in E$.

Exercice 6.

Soient $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Soit G definie par les équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

1) Donner une base orthonormale de G.
2) Déterminer la matrice dans B de la projection orthogonale p_G sur G.
3) Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$. Déterminer la distance de x à G.

Exercice 7.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit p un endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique B de E est donnée par

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera l'équation.
2) Détérminer la distance de $x = (1, 1, 1)$ à ce plan.