# Chapitre V: Espaces vectoriels euclidiens

Dans tout ce chapitre $E$ désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$.

## 1-Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

**Théorème.**
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ un entier et $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ **une famille libre** de $E$. Alors il existe **une famille orthonormale** $(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ de $E$ telle que $\forall k \in \{1, 2, \cdots, p\}$,

$$\text{vect}(u_1, u_2, \cdots, u_k) = \text{vect}(v_1, v_2, \cdots, v_k).$$

**Lemme.**
Soit $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ **une famille orthogonale** et $v \in E$ avec $p \geq 1$. Soit $u \in E$ tel que

$$u = v - \sum_{i=1}^{p} \frac{(v|u_i)}{||u_i||^2} u_i.$$

Alors:
1) $u \perp u_1, u_2, \cdots, u_p$.
2) $\text{vect}\{u, u_1, \cdots, u_p\} = \text{vect}\{v, u_1, \cdots, u_p\}$.
3) $u = 0 \Leftrightarrow v \in \text{vect}\{u_1, \cdots, u_p\}$.

**Preuve.**
1) Soit $k \in \{1, \cdots, p\}$. Alors, puisque la famille $\{u_1, \cdots, u_p\}$ est orthogonale,

$$\begin{aligned} u|u_k &= v|u_k - \sum_{i=1}^{p} \frac{(v|u_i)}{||u_i||^2}(u_i|u_k) \\ &= v|u_k - \frac{(v|u_k)}{||u_k||^2}(u_k|u_k) \\ &= v|u_k - v|u_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

2) On a $u \in \text{vect}\{u_1, \cdots, u_p, v\}$, d'ou $\text{vect}\{u, u_1, \cdots, u_p\} \subseteq \text{vect}\{v, u_1, \cdots, u_p\}$. De même $v = u + \sum_{i=1}^{p} \frac{(v|u_i)}{||u_i||^2}(u_i|u_k)$, d'ou $v \in \text{vect}\{u_1, \cdots, u_p, u\}$ et par suite $\text{vect}\{v, u_1, \cdots, u_p\} \subseteq \text{vect}\{u, u_1, \cdots, u_p\}$. Par conséquent, $\text{vect}\{u, u_1, \cdots, u_p\} = \text{vect}\{v, u_1, \cdots, u_p\}$.

3) On a $u = 0 \Leftrightarrow v = \sum_{i=1}^{p} \frac{(v|u_i)}{||u_i||^2} u_i \Rightarrow v \in \text{vect}\{u_1, \cdots, u_p\}$. Inversement, supposons que $v \in \text{vect}\{u_1, \cdots, u_p\}$, d'ou $u \in \text{vect}\{u_1, \cdots, u_p\}$ et par suite $u = a_1 u_1 + \cdots + a_p u_p$ pour $a_1, \cdots, a_p \in \mathbb{R}$. On a, d'après (1), $0 = u|u_k = a_k ||u_k||^2$ et par suite $a_k = 0$ pour tout $k$. Par conséquent $u = 0$. D'ou le résultat.

**Preuve du théorème.**
On construit par récurrence une famille orthogonale $\{v_1, \cdots, v_p\}$ telle que, pour tout $k = 1, \cdots, p$

$$\text{vect}(u_1, u_2, \cdots, u_k) = \text{vect}(v_1, v_2, \cdots, v_k).$$

Soit $v_1 = u_1$. On considère $v_2 = u_2 - \frac{(u_2|u_1)}{||u_1||^2} u_1$. D'après le lemme, $v_2 | v_1 = 0$, c'est à dire que $v_2 \perp v_1$. On suppose que $p \geq 2$ et il existe $v_1, \cdots, v_k \in E$, $1 \leq k \leq p-1$, telle que $\{v_1, \cdots, v_k\}$ soit orthogonale et $\text{vect}\{v_1, \cdots, v_k\} = \text{vect}\{u_1, \cdots, u_k\}$. Soit $v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(u_{k+1}|v_i)}{||v_i||^2} u_i$. D'après le lemme, on a $v_{k+1} \perp v_1, \cdots, v_k$ et $\text{vect}\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}\} = \text{vect}\{v_1, \cdots, v_k, u_{k+1}\}$. Par suite la famille $\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}\}$ est orthogonale et $\text{vect}\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}\} = \text{vect}\{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}\}$. Par conséquent il existe une famille orthogonale $\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ telle que $\text{vect}\{v_1, \cdots, v_k\} = \text{vect}\{u_1, \cdots, u_k\}$ pour tout $k \in \{1, \cdots, p\}$. Par suite la famille $\left\{\frac{v_1}{||v_1||}, \cdots, \frac{v_p}{||v_p||}\right\}$ est une famille orthonormale vérifiant les conditions du théorème. D'ou le résultat.

**Corollaire.**

Soit $\{u_1, \cdots, u_p\}$ une famille libre de $E$. On construit une famille orthogonale $\{v_1, \cdots, v_p\}$ à partir de $\{u_1, \cdots, u_p\}$ en suivant les étapes suivantes:

1) On prend $v_1 = u_1$,

2) $v_2 = u_2 - \dfrac{(u_2|v_1)}{\|v_1\|^2} v_1$,

3) $v_3 = u_3 - \dfrac{(u_3|v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 - \dfrac{(u_3|v_2)}{\|v_2\|^2} v_2$,

ainsi de suite jusqu'à

p) $v_p = u_p - \dfrac{(u_p|v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 - \dfrac{(u_p|v_2)}{\|v_2\|^2} v_2 - \cdots - \dfrac{(u_p|v_{p-1})}{\|v_{p-1}\|^2} v_{p-1}$.

**Exercice.**

Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la base de $\mathbb{R}^3$ suivante: $u = (1,0,1), v = (1,1,1), w = (-1,-1,0)$.

**Corollaire.**

Dans espace euclidien $E$, toute famille orthonormale (respéctivement orthogonale) peut être complétée en une base orthonormale (respéctivement orthogonale).

**Preuve.**

Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille orthonormale de $E$. On compléte cette famille en une base $(u_1, \cdots, u_n)$ de $E$. Le procédé de Gram-Schmidt permet de donner une nouvelle base $(v_1, \cdots, v_n)$ de $E$ qui est orthonormale et telle que $v_i = u_i$ pour $i = 1, \cdots, p$.

**Corollaire.**

Soit $A$ une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une matrice inversible $P$ telle que $A = {}^tPP$.

**Preuve.**

Notez que $A$ est la matrice d'un produit scalaire $.|.$ sur $E$.

Soit $B = (u_1, \cdots, u_n)$ une base de $E$ telle que $A = M(.|., B)$. Il existe une base orthonormale $B' = (v_1, \cdots, v_n)$ de $E$. Soit $P$ la matrice de passage de $B$ à $B'$. D'ou $M(.|., B') = I_n = {}^tPAP$. Par suite $A = {}^tQQ$ avec $Q = P^{-1}$.

**Théorème.**
Soit $E$ un espace euclidien. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de $E$. Alors, $\forall x \in E$,

$$x = (x|e_1)e_1 + (x|e_2)e_2 + \cdots + (x|e_n)e_n.$$

**Preuve.**
Soit $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. D'ou, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$x|e_i = \alpha_1(e_1|e_i) + \cdots + \alpha_n(e_n|e_i) = \alpha_i.$$

D'ou le résultat.

**Corollaire.**
Soit $E$ un espace euclidien. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de $E$. Soient $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$. Alors,

$$||x|| = \sqrt{x_i^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

et

$$x|y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Dans le théorème suivant on rassemble des propriétés des espaces euclidiens qui étaient déja vu pour les espaces préhilbertiens.

**Théorème.**
soit $E$ un espace euclidien et $F$ un sous espace de $E$. Alors,
1) $F \oplus F^\perp = E$.
2) $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$.
3) $F^{\perp\perp} = F$.

4) Si $(e_1,\cdots,e_p)$ est une base orthonormale de $F$, alors la projection orthogonale $p_F$ existe et, pour tout $x\in E$, on a

$$p_F(x)=(x|e_1)e_1+(x_2|e_2)e_2+\cdots+(x|e_p)e_p.$$

5) $\forall a\in E$, la distance de $a$ à $F$ est

$$d(a,F)=\|a-p_F(a)\|.$$

## 2- Groupe orthogonal

**Théorème.**
Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n$ et $u:E\longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Soit $A$ la matrice de $u$ dans une **base orthonormale** $(e_1,\cdots,e_n)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) $u$ est un automorphisme orthogonal (ou isométrie vectorielle);
2) $u$ conserve le produit scalaire;
3) $u$ conserve la norme;
4) ${}^tAA=I_n$.
5) Il existe une base orthonormale $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ de $E$ telle que $(u(e_1),u(e_2),\cdots,u(e_n))$ est une base orthonormale de $E$.
6) Pour toute base orthonormale $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ de $E$, $(u(e_1),u(e_2),\cdots,u(e_n))$ est une base orthonormale de $E$.

**Preuve.**
Supposons que $u$ conserve la norme. Montrons que $u$ est un automorphisme de $E$. En effet, soit $x\in E$ tel que $u(x)=0$. D'où $\|u(x)\|=\|x\|=0$. D'où $x=0$. Par suite $u$ est injectif et donc $u$ est un automorphisme de $E$. Par conséquent, on a 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3).
3) $\Leftrightarrow$ 4) Soit $x\in E$. Notez que la matrice du produit scalaire dans une base orthonormale est $I_n$. D'où, pour tout $x\in E$, $\|u(x)\|^2=\|x\|^2$ si et seulement si ${}^t(AX)I_n(AX)={}^tXI_nX$ pour

tout $X$ si et seulement si ${}^tX({}^tAA)X = {}^tXX$, pour tout $X$ (avec ${}^tAA$ est une matrice symétrique) si et seulement si ${}^tAA = I_n$.
2) $\Rightarrow$ 5) est claire.
5) $\Rightarrow$ 3) Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de $E$ telle que $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ soit une base orthonormale de $E$. Soit $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. D'ou $u(x) = x_1u(e_1) + \cdots + x_nu(e_n)$ et par suite $u(x)|u(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = x|x$. D'ou $\|u(x)\| = \|x\|$.
2) $\Leftrightarrow$ 6) est claire aussi.

**<u>Corollaire.</u>**
Soit $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$. Soit $A$ la matrice de $u$ dans une base orthonormale. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:
1) $u$ est un automorphisme orthogonal;
2) $u^{-1}$ est un automorphisme orthogonal;
3) $A^{-1} = {}^tA$.

**Preuve.**
1) $\Leftrightarrow$ 2) Supposons que $u$ est un automorphisme orthogonal. Soit $x \in E$. D'ou $\|u^{-1}(x)\| = \|u(u^{-1}(x))\| = \|x\|$ et par suite $u^{-1}$ conserve la norme. Par conséquent, d'après le théorème précédent, $u^{-1}$ est un automorphisme orthogonal.
1) $\Rightarrow$ 3) Supposons que $u$ est orthogonale. D'ou, d'après le théorème précédent, ${}^tAA = I_n$. Aussi, comme $u^{-1}$ est orthogonal, ${}^tA^{-1}A^{-1} = I_n$. D'ou $(A{}^tA)^{-1} = I_n$ ce qui donne que $A{}^tA = I_n$. Par suite $A^{-1} = A$.
3) $\Rightarrow$ 1) Voir Théorème.

**<u>Definition.</u>**
Une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie ${}^tAA = A{}^tA = I_n$, c'est

à dire que $A$ est inversible et $A^{-1} = {}^tA$, s'appelle **une matrice orthogonale**.
L'ensemble des matrices orthogonaux se note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \circ)$ le groupe des matrices inversibles d'ordre $n$ à coefficients réels.

**Exemple.**
$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

**Corollaire.**
Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:
1) $A$ est orthogonale;
2) ${}^tA$ est orthogonale;
3) $A$ est la matrice d'un automorphisme orthogonale $u$ dans une base orthonormale;
4) Les vecteurs colonnes de $A$ forment une base orthonormale;
5) Les vecteurs lignes de $A$ forment une base orthonormale.
6) $A$ est la matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale.

**Preuve.**
1) $\Leftrightarrow$ 2) Par définition.
1) $\Leftrightarrow$ 3) Voir le corollaire précédent.
3) $\Leftrightarrow$ 4) Voir Théorème puisque l'image d'une base orthonormale par un automorphisme orthogonal est une base orthonormale.
2) $\Leftrightarrow$ 5) Même démonstration que pour (3)$\Leftrightarrow$ (4).
4) $\Leftrightarrow$ 6) Elle est vraie d'après le théorème précédent.

__**Lemme.**__
Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

__**Preuve.**__
Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tAA = I_n$ et par suite $\det(A)^2 = 1$. D'où le résultat.

La réciproque est fausse. Une matrice de déterminant 1 ou $-1$ n'est pas forcément orthogonale. En Effet, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = 1$ alors que $A$ n'est pas orthogonale puisque les vecteurs lignes (1,0), (1,1) ne sont pas orthogonaux.

__**Definition.**__
1) Une matrice orthogonale de déterminant 1 (resp., $-1$) s'appelle **matrice orthogonale positive** (resp., matrice orthogonale négative).
2) L'ensemble des matrices orthogonales positives (resp., négative) se note $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ (resp., $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$).
3) $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Aussi $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ le groupe spécial linéaire d'ordre $n$ constitué de matrices de déterminant égale à 1. $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ est aussi noté $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe spécial orthogonal.
4) Un automorphisme orthogonal dont la matrice est de déterminant 1 (resp., -1) est un automorphisme orthogonal positif (resp., négatif).
5) L'ensemble des automorphismes orthogonaux positifs (resp., négatifs) est noté $\mathcal{O}^+(E)$ (resp., $\mathcal{O}^-(E)$). $\mathcal{O}^+(E)$ est un sous groupe de $O(E)$. Aussi $\mathcal{O}^+(E)$ est un sous groupe de $\mathrm{SL}(E)$ (le groupe spécial linéaire de $E$) le groupe des automorphismes de déterminant 1.

**Proposition.**

1)

$$\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \text{ tel que } a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

est le groupe des rotations vectorielles. $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est la matrice d'une rotation vectorielle d'angle $\theta$ dans une base orthonormée.

2)

$$\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \text{ tel que } a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

est constitué de réflexions (symétries axiales). $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ est la matrice dans une base orthonormée d'une réflexion d'axe d'équation $y = \tan(\frac{\theta}{2})x$.

3)

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{-1, 1\} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{-1, 1\} \text{ tel que } a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

le groupe orthogonal.

**Preuve.**

1) Soit $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{O}_2^+$ dans une base orthonormée. D'où $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $(a, b) \perp (c, d)$ et

$ad-bc=1$. Soient $\theta,\theta'\in\mathbb{R}$ tels que $a=\cos(\theta), b=\sin(\theta), c=\cos(\theta'), d=\sin(\theta')$. Donc puisque $(a,b)\perp(c,d)$, on a $\theta'=\frac{\pi}{2}+\theta$ ou $\theta=\frac{\pi}{2}+\theta'$. Si $\theta=\frac{\pi}{2}+\theta'$, alors $\cos(\theta)=-\sin(\theta')$ et $\sin(\theta)=\cos(\theta')$ et par suite

$$ad-bc=-\sin^2(\theta')-\cos^2(\theta')=-1$$

ce qui est absurde. D'où $\theta'=\frac{\pi}{2}+\theta$ et donc $\cos(\theta')=-\sin(\theta)$ et $\sin(\theta')=\cos(\theta)$. Soit $x=re^{i\alpha}=(r\cos(\alpha),r\sin(\alpha))\in\mathbb{R}^2$. D'où

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos(\alpha)\\ r\sin(\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r(\cos(\theta)\cos(\alpha)-\sin(\theta)\sin(\alpha))\\ r(\sin(\theta)\cos(\alpha)+\cos(\theta)\sin(\alpha))\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} r\cos(\theta+\alpha)\\ r\sin(\theta+\alpha))\end{pmatrix}=re^{i(\alpha+\theta)}$$

Alors $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$ est la matrice d'une rotation vectorielle d'angle $\theta$.

2) Soit $A=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ une matrice de $O_2^-$ dans une base orthonormée. Avec les mêmes calculs que dans (1), on montre que $A=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$. Soit $x=re^{i\alpha}=(r\cos(\alpha),r\sin(\alpha))\in\mathbb{R}^2$. D'où

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos(\alpha)\\ r\sin(\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r(\cos(\theta)\cos(\alpha)+\sin(\theta)\sin(\alpha))\\ r(\sin(\theta)\cos(\alpha)-\cos(\theta)\sin(\alpha))\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} r\cos(\theta-\alpha)\\ r\sin(\theta-\alpha))\end{pmatrix}=re^{i(\theta-\alpha)}$$

On remarque que si $\alpha\leq\frac{\theta}{2}$, alors $\theta-\alpha\geq\alpha$ et $\theta-\alpha\geq\frac{\theta}{2}$, et donc $\alpha\leq\frac{\theta}{2}\leq\theta-\alpha$. De même, si $\frac{\theta}{2}\leq\alpha$, alors $\theta-\alpha\leq\frac{\theta}{2}\leq\alpha$.

Par suite $\dfrac{\theta}{2}$ est toujours entre les deux valeurs $\alpha$ et $\theta - \alpha$ avec

$$\alpha - \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} - (\theta - \alpha).$$

Par conséquent $A$ est la matrice d'une réfléxion d'axe de symétrie la droite d'équation $y = \tan(\dfrac{\theta}{2})x$.

**Symétrie orthogonale et projection orthogonale**

**Définition.**

1) Soit $s : E \longrightarrow E$ un endomorphisme. $s$ est dite **une symétrie** s'il existe deux espaces supplémentaires $F$ et $G$, $E = F \oplus G$, telles que

$$s(x+y) = x - y, \forall x \in F, \forall y \in G.$$

$s$ est la symétrie par rapport à $F$ parallélement à $G$.
2) Soit $F$ un sous espace vectoriel de $E$. On appelle **symétrie orthogonale par rapport à** $F$ l'application $s_F : E = F \oplus F^{\perp} \longrightarrow E$ telle que

$$s_F(x+y) = x - y, \forall x \in F, \forall y \in F^{\perp}.$$

**Proposition.**

Soit $F$ un sous espace de $E$ et $\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$ une base orthogonale de $F$. Alors
1) $\forall x \in E$,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{x|e_i}{||e_i||^2} e_i.$$

2) $\forall x \in E$,

$$s_F(x) = 2\sum_{i=1}^{r} \frac{x|e_i}{||e_i||^2} e_i - x.$$

**Preuve.**

1) On compléte $\{e_1, \cdots, e_r\}$ en une base orthogonale $\{e_1, \cdots, e_n\}$

de $E$. D'où, si $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x|e_i}{||e_i||^2} e_i$, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{x|e_i}{||e_i||^2} e_i$.
2) On a, $\forall x \in E$, $s_F(x) + x = 2p_F(x)$. D'où le résultat.

**Proposition.**
Soit $p$ un projecteur de $E$. Alors $p$ est un projecteur orthogonal si et seulement si

$$||p(x)|| \leq ||x||, \forall x \in E.$$

**Preuve.**
Voir TD.

**Proposition.**
Soit $s$ une symétrie de $E$. Alors $s$ est une symétrie orthogonale de $E$ si et seulement si

$$||s(x)|| = ||x||, \forall x \in E.$$

**Preuve.**
Si $s$ est une symétrie orthogonale, alors elle conserve la norme, d'où le résultat. Invérsement, supposons que $||s(x)|| = ||x||, \forall x \in E$. Soient $F, G$ deux sous espaces de $E$ tels que $E = F \oplus G$ et $s(x+y) = x - y, \forall x \in F, \forall y \in G$. D'où $||x+y|| = ||x-y||, \forall x \in F, \forall y \in G$. Par suite,

$$||x||^2 + ||y||^2 + 2x|y = ||x||^2 + ||y||^2 - 2x|y, \forall x \in F, \forall y \in G.$$

Par conséquent, $x|y = 0, \forall x \in F, \forall y \in G$. D'où $F \perp G$ et par suite $s$ est la projection orthogonale par rapport à $F$.

**Proposition.**
Soit $s$ un endomorphisme de $E$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:
1) $s$ est une symétrie orthogonale;
2) $s$ est une symétrie et un automorphisme orthogonale;

3) La matrice de $s$ dans une base orthonormale est orthogonale et symétrique.

**Lemma (rappel).**

Soit $s$ un endomorphisme de $E$. Alors $s$ est une symétrie de $E$ si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}_E$. Si $s$ est une symétrie, alors

$$E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{id}_E)$$

et

$$s : E \longrightarrow E \text{ tel que}$$

$$s(x+y) = x - y, \forall x \in \ker(s - \mathrm{id}_E), \forall y \in \ker(s + \mathrm{id}_E)$$

$s$ est alors une symétrie de base $\ker(s - \mathrm{id}_E)$ parallélement à $\ker(s + \mathrm{id}_E)$.

**Preuve.**

Supposons que $s$ est une symétrie. Alors il existe deux sev supplémentaires $F, G$ de $E$ tels que $s : E = F \oplus G \longrightarrow E$, $s(x+y) = x - y, \forall x \in F, \forall y \in G$. D'où $(s \circ s)(x+y) = x + y$ et par suite $s \circ s = \mathrm{id}_E$. Invérsement, on suppose que $s \circ s = \mathrm{id}_E$. Soit $F = \ker(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \ker(s + \mathrm{id}_E)$. Soit $x \in E$. D'où $x = \dfrac{1}{2}(x + s(x)) + \dfrac{1}{2}(x - s(x))$ avec

$$s(\frac{1}{2}(x+s(x)) = \frac{1}{2}(s(x)+x) \text{ et } s(\frac{1}{2}(x-s(x))) = \frac{1}{2}(s(x)-x) = -\frac{1}{2}(x-s(x))$$

et donc $\dfrac{1}{2}(x + s(x)) \in F, \dfrac{1}{2}(x - s(x)) \in G$. Alors $E = F + G$. Soit $t \in F \cap G$. Alors $(s + \mathrm{id}_E)(t) = (s - \mathrm{id}_E)(t) = 0$ et par suite $s(t) = -t = t$. D'où $t = 0$ et donc $F \cap G = \{0\}$. On en déduit que $E = F \oplus G$. Aussi, si $x = y + z$ tels que $y \in F$ et $z \in G$ on a

$$s(x) = s(y) + s(z) = y - z.$$

Par conséquent, $s$ est une symétrie de base $F$ parallélement à $G$.

**Corollaire.**
Soit $s$ une symétrie sur $E$. Alors $s$ est diagonalisable et le spéctre de $s$ est contenu dans $\{-1,1\}$. Si $s = \mathrm{id}_E$, alors spéctre$(u) = \{1\}$; si $s = -\mathrm{id}_E$, alors spéctre$(u) = \{-1\}$; si $s \neq \mathrm{id}_E, s \neq -\mathrm{id}_E$, alors spéctre$(u) = \{-1,1\}$.

**Preuve de la proposition.**
1) $\Leftrightarrow$ 2) Il provient de la proposition précédente.
2) $\Rightarrow$ 3) Soit $A$ la matrice de $s$ dans une base orthonormée. Puisque $s \circ s = \mathrm{id}_E$, on a $A^2 = I_n$ et par suite $A^{-1} = A$. Comme $u$ est un automorphisme orthogonal, on obtient $A^{-1} = {}^tA$, i.e., $A$ est orthogonale. Par conséquent, $A$ est une matrice orthogonale et $A = {}^tA$, c'est à dire que $A$ est symétrique.
3) $\Rightarrow$ 2) Soit $A$ la matrice de $s$ dans une base orthonormale. D'où $A^{-1} = {}^tA$. Comme $A$ est symétrique, on obtient que $A^{-1} = A$ et donc $s$ est une symétrie et un automorphisme orthogonal.

**Théorème.**
Soit $u$ un automorphisme orthogonale de $E$. Alors
1) spéctre$(u) \subseteq \{-1,1\}$.
2) $\ker(u - \mathrm{id}_E) \perp \ker(u + \mathrm{id}_E)$.
3) $u$ est diagonalisable si et seulement si $u$ est une symétrie orthogonale.
4) $(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E))^{\perp} = \ker(u - \mathrm{id}_E)$.

**Preuve.**
1) Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$ et $x$ un vecteur propre associé non nul. Alors $u(x) = \lambda x$ et $\|u(x)\| = \|x\|$. D'où $|\lambda|\|x\| = \|x\|$. Par suite $|\lambda| = 1$ et alors $\lambda = 1$ ou $-1$.

2) Soient $x \in \ker(u - \mathrm{id}_E)$ et $y \in \ker(u + \mathrm{id}_E)$. D'où

$$x|y = u(x)|u(y) = x|(-y) = -(x|y).$$

Alors $x|y = 0$ et par suite $\ker(u - \mathrm{id}_E) \perp \ker(u + \mathrm{id}_E)$.
3) Supposons que $u$ est diagonalisable. Il y a 3 cas: - Spectre$(u) = \{1\}$. D'où $E = \ker(u - \mathrm{id}_E)$ et donc $u = \mathrm{id}_E$. $u$ est la symétrie orthogonale de base $E$ parallélement à $\{0\}$.
- Spectre$(u) = \{-1\}$. D'où $E = \ker(u + \mathrm{id}_E)$ et donc $u = -\mathrm{id}_E$. $u$ est la symétrie orthogonale de base $\{0\}$ parallément à $E$.
- Spectre$(u) = \{-1, 1\}$. D'où $E = \ker(u - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(u + \mathrm{id}_E)$. Alors $u$ est la symétrie orthogonale de base $\ker(u - \mathrm{id}_E)$ parallélement à $\ker(u + \mathrm{id}_E)$.
La réciproque est déjà établie.
4) Montrons que $(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E))^{\perp} \subseteq \ker(u - \mathrm{id}_E)$. Soit $x \in (\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E))^{\perp}$. D'où, $\forall y \in E$, $x|(u(y) - y) = 0$ et par suite $x|y = x|u(y), \forall y \in E$. Alors

$$x|y = u(u^{-1}(x))|u(y) = u^{-1}(x)|y, \forall y \in E.$$

Ce qui donne que $(x - u^{-1}(x))|y = 0, \forall y \in E$ et alors $x - u^{-1}(x) = 0$. Il s'ensuit que $u(x) - x = (u - \mathrm{id}_E)(x) = 0$. Par conséquent, $x \in \ker(u - \mathrm{id}_E)$. D'où $(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E))^{\perp} \subseteq \ker(u - \mathrm{id}_E)$. Or

$$\dim(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)^{\perp}) = n - \dim(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)) = \dim(\ker(u - \mathrm{id}_E)),$$

par conśequent, $(\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E))^{\perp} = \ker(u - \mathrm{id}_E)$.

## Rotations et Reflexions sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

D'abord on définit une orientation de l'espace $E$.

**Definition.**
Soit $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de $E$. Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $n$-vecteurs de $E$ et $M$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des $X_i$ dans $B$. Alors le déterminant de

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ dans $B$ est

$$\det_B(X_1, \cdots, X_n) = \det(M, B).$$

On note que le déterminant des $X_1, X_2, \cdots, X_n$ dépend de la base choisie. Par exemple, soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2\}$ et soient $u = e_1$ et $v = -e_2$. Alors $B'$ est une base de $E$ avec $\det_B(u, v) = -1$ alors que $\det_{B'}(u, v) = 1$.

**Definition.**
1) On dit que deux bases $B$ et $B'$ sont de même **orientation** si $\det_B(B') > 0$, i.e., le déterminant de la matrice de passage de $B$ à $B'$ est $> 0$.
2) Fixer l'orientation de $E$ revient donc à fixer une base $B$. Une autre base $B'$ est dite **directe** si elle a la même orientation que $B$ et dite **indirecte** sinon.
3) L'orientation canonique de $\mathbb{R}^n$ est celle donnée par la base canonique $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.

**Definition.**
Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n$ orienté par une base $B$.
1) **Une rotation vectorielle**, ou automorphisme orthogonal positif, est un automorphisme orthogonal dont la matrice dans $B$ est de déterminant égal à 1.
2) **Une reflexion** est une symetrie orthogonale $s$ par rapport à un hyperplan, c'est à dire, $\ker(s - \mathrm{id}_E)$ est un hyperplan.

## Etude du groupe orthogonal en dimension 2

**Théorème.**
Soit $E$ un espace euclidien orienté de dimension 2.

1) Le groupe des rotations vectorielles sur $\mathbb{R}^2$ est donné par

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}) &= \left\{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \text{ tel que } a^2 + b^2 = 1\right\}\end{aligned}$$

2) L'ensemble des réflexions est

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}) &= \left\{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a\end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \text{ tel que } a^2 + b^2 = 1\right\}\end{aligned}$$

et si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a\end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ ( avec $a^2 + b^2 = 1$), alors $A$ est la matrice d'une réflexion $s$ telle que

i) Si $a = 1$, $b = 0$, alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ et $\ker(s - \mathrm{id}_E) = \mathrm{vect}\{(1,0)\}$.

ii) Si $a = -1$, $b = 0$, alors $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\ker(s - \mathrm{id}_E) = \{(0,1)\}$.

iii) Si $a \neq 1$ et $a \neq -1$, alors $\ker(s - \mathrm{id}_E) = \mathrm{vect}\{(\frac{b}{1-a}, 1)\}$.

3) Si $s$ est une réflexion de $E$, alors il existe une base orthogonale (resp., orthonormale) $\{u, v\}$ dont la quelle la matrice de $s$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$

**Proposition.**

Soit $E$ un espace euclidien orienté de dimension 2.

1) Toute rotation est la composée de deux réflexions.

2) La composée de deux réflexions est une rotation.

3) La composée d'une rotation et d'une réflexion est une

réflexion.
4) Le groupe $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions, c'est à dire, toute isométrie de $E$ est la composée de réflexions.

**Preuve.**
1) Soit $r$ une rotation et soit $s$ une réflexion. Soit $t = s^{-1} \circ r$. $t$ est une isométrie et $\det(M(t,B)) = \det_B(M(s^{-1},B))\det_B(M(r,B)) = -1$. D'où $t$ est une réflexion et par suite $r = s \circ t$ est la composée de deux réflexions.
2), 3) et 4) sont directs.

On présente une classification des isométries d'un espace euclidien orienté de dimension 2 par leurs spectres.

**Proposition.**
Soit $E$ un espace euclidien orienté de dimension 2 et de base d'orientation $B$. Soient $u$ une isométrie de $E$ et $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de $u$. Alors
1) Si $\mathrm{Sp}(u) = \emptyset$, alors $u$ est une rotation différente de $\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E$.
2) Si $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$, alors $u = \mathrm{id}_E$.
3) Si $\mathrm{Sp}(u) = \{-1\}$, alors $u = -\mathrm{id}_E$.
4) Si $\mathrm{Sp}(u) = \{-1, 1\}$, alors $u$ est une réflexion.

**Preuve.**
Soit $M = M(u,B)$. Supposons que $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$. Alors $P_u(X) = \begin{vmatrix} a-X & -b \\ b & a-X \end{vmatrix} = (X-a)^2 + b^2$. D'où $P_u(x) = 0$ si et seulement si $x = a$ et $b = 0$ si seulement si $x = a \in \{-1, 1\}$ et $b = 0$. Alors, il y a au plus une valeur propre. Si $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$, alors $a = 1, b = 0$ et donc $u = \mathrm{id}_E$. Si $\mathrm{Sp}(u) = \{-1\}$, alors $a = -1, b = 0$ et

donc $u = -\mathrm{id}_E$. Si $\mathrm{Sp}(u) = \{-1, 1\}$, alors $u$ est une rotation différente de $\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E$.

D'un autre côté, supposons que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$. Alors $P_u(X) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ b & -a - X \end{vmatrix} = -(a^2 - X^2) - b^2 = X^2 - a^2 - b^2 = X^2 - 1$. D'où $\mathrm{Sp}(u) = \{-1, 1\}$.

**Corollaire.**
Soit $E$ un espace euclidien orienté de dimension 2. Alors toute rotation $u$ de $E$ différente de $\mathrm{id}_E, -\mathrm{id}_E$ n'est pas diagonalisable.

**Preuve.**
C'est clair puisque $\mathrm{Sp}(u) = \emptyset$.

## Etude du groupe orthogonal en dimension 3

**Proposition.**
Soit $E$ un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit $u$ une isométrie de $E$. Alors 1 ou $-1$ est une valeur propre de $u$, c'est à dire, il existe $0 \neq x \in E$ tel que $u(x) = x$ ou $u(x) = -x$.

**Preuve.**
On $P_u(X)$ est un polynôme de degré 3. D'où $P_u$ admet une racine réelle. Comme les seules valeurs propres possibles de $u$ sont 1 et $-1$, on obtient que 1 ou $-1$ est une valeur propre de $u$.

**Proposition.**
Soit $E$ un espace euclidien et $F$ un sous espace de $E$. Soit $u$ une isométrie de $E$.
1) Si $F$ est stable par $u$, alors $F^{\perp}$ est stable par $u$.
2) Si $F$ est stable par $u$, alors la restriction $u_{/F}$ est une

isométrie de $F$ et la restriction $u_{/F^\perp}$ est une isométrie de $F^\perp$.

**Preuve.**
1) Déja fait comme exercice.
2) Supposons que $F$ est stable par $u$. $(F, |.|_{/F})$ est un espace euclidien et $\|u_{/F}(x)\|_{/F} = \|u(x)\| = \|x\| = \|x\|_{/F}$. Alors $u_{/F}$ est une isométrie.

**Théorème.**
Soit $E$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit $u$ une isométrie de $E$. Soit $v_3 \in E$ un vecteur unitaire tel que $u(v_3) = v_3$ ou $-v_3$. Soit $F = v_3^\perp$. vect$\{v_3\}$ est stable par $u$, d'où $F$ est stable par $u$. Alors $u_{/F}$ est une isométrie de $F$ et $\dim(F) = 2$. Il y a alors 4 casà étudier:

i) $u(v_3) = v_3$ et $u_{/F}$ est une rotation. Pour toute base orthonormale $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ la matrice de $u$ dans $B$ est

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$u$ est la rotation d'axe vect$\{v_3\}$ et d'angle $\theta$.
ii) $u(v_3) = -v_3$ et $u_{/F}$ est une rotation. Pour toute base orthonormale $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ la matrice de $u$ dans $B$ est

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$u$ est la composée de la réflexion par rapport au plan vect$\{v_1, v_2\}$ et de la rotation d'axe vect$\{v_3\}$ est d'angle $\theta$.

iii) $u(v_3) = v_3$ et $u_{/F}$ est une réflexion. Il existe $v_1, v_2 \in F$ tels que $u_{/F}(v_1) = v_1$, $u_{/F}(v_2) = -v_2$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base orthonormale de $E$ et la matrice de $u$ relativement à $B$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$u$ est alors le réflexion par rapport au plan vect$\{v_1, v_3\}$.

iv) $u(v_3) = -v_3$ et $u_{/F}$ est une réflexion. Il existe $v_1, v_2 \in F$ tels que $u_{/F}(v_1) = v_1$, $u_{/F}(v_2) = -v_2$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base orthonormale de $E$ et la matrice de $u$ relativement à $B$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$u$ est alors la symétrie orthogonale par rapport à la droite vect$\{v_1\}$.

## <u>**Plan d'étude d'une rotation en dimension** 3</u>

1) On vérifie que la matrice donnée dans une base orthonormale $A \in O_2^+(\mathbb{R}^3)$ en montrant que $A$ est une matrice orthonormale telle que $\det(A) = 1$. Soit $u$ l'automorphisme orthogonal de matrice $A$ relativement à la base orthonormale.
2) Dans toute base orthonormale $\{v_1, v_2, d\}$ la matrice de $u$ relativement à cette base s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On détermine l'axe et l'angle de rotation de $u$. On a $tr(A) = 2\cos(\theta) + 1$. Alors

$$\cos(\theta) = \frac{tr(A) - 1}{2}.$$

3) On cherche un vecteur unitaire fixe $d$ de $u$, i.e., $u(d) = d$, qui va engendrer l'axe de rotation.
4) On détermine un vecteur unitaire $v_1 \in F = d^\perp$ et on considère une base orthonormale $\{v_1, v_2\}$ ($v_2$ à ne pas déterminer) de $F = d^\perp$. Relativement à la base orthonormale $\{v_1, v_2, v_3\}$, on a alors

$$\det(v_1, u(v_1), d) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin(\theta).$$

Alors $\sin(\theta) = \det(v_1, u(v_1), d)$. En connaissant $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, on tire l'angle $\theta$ de rotation.

**Exemple.**

Etudier la matrice

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$