

# Cours de Physique Statistique Avancée

Professeur Mabrouk Benhamou  
Faculté des Sciences à Meknès

Public cible  
Étudiants de Licence SMP  
Semestre 6

Année académique 2020

## Chapitre 8

# Hélium liquide à basse température

# Contenu du chapitre 8

- 1. Introduction.**
- 2. Diagramme de phase de l'hélium.**
- 3. Propriétés thermiques de l'hélium 3.**
- 4. Propriétés thermiques de l'hélium 4.**

# 1. Introduction

- L'hélium possède deux isotopes :
  - **Hélium 4** représente 99% de la matière dans l'Univers. Le noyau de l'atome d'hélium 4 contient  $2e^- + 2p + 2n$ . Cet atome est un boson de spin 0.
  - **Hélium 3** représente 1% de la matière dans l'Univers. Le noyau de l'atome d'hélium 3 contient  $2e^- + 2p + 1n$ . Cet atome est un fermion de spin 1/2.

- L'hélium a la particularité de rester liquide jusqu'à la température nulle, aux pressions ordinaires, contrairement aux autres substances qui sont solides à 0 K.
- L'hélium est très utilisé dans le domaine du froid (*cryogénie*).
- Le gel des degrés de liberté de translation rend les effets quantiques importants aux températures inférieures (quelques degrés Kelvin).

- Les deux isotopes de l'hélium sont très différents physiquement.
- L'hélium 4 présente vers 2 K une transition de phase, menant de la phase "liquide normal" à une nouvelle phase "liquide superfluide" (où l'hélium 4 coule sans viscosité). Cette dernière phase a été observée par Kapitza, simultanément avec Allen et Misener.

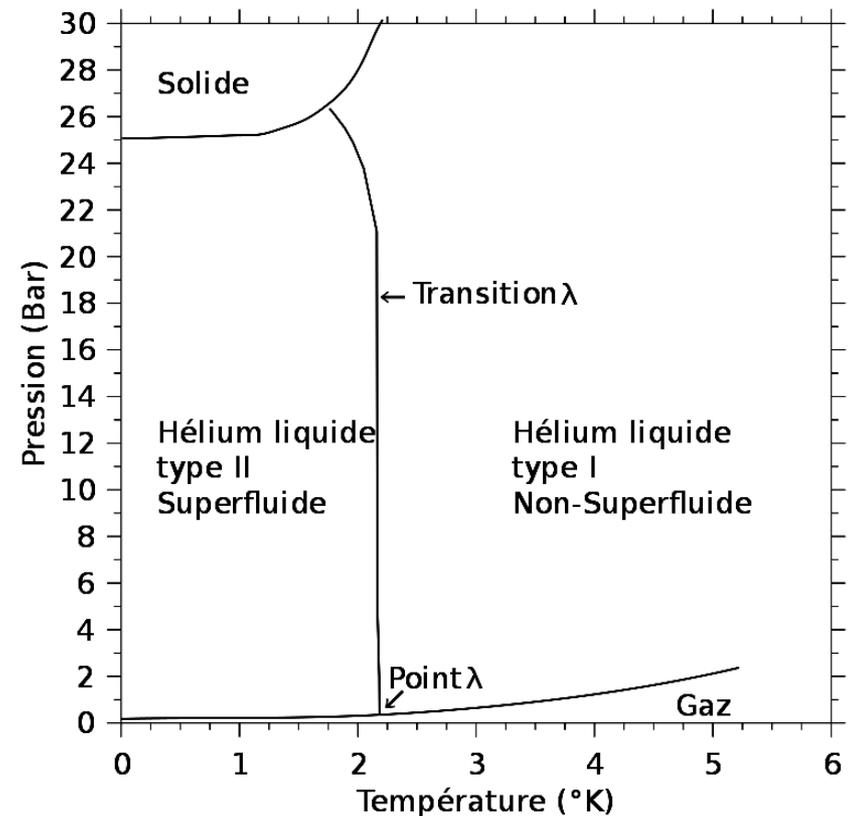
- L'hélium 3 présente également deux phases liquides nouvelles, dont l'une est anisotrope.
- La superfluidité de l'hélium 3 a été observée par Oscheroff, Lee et Richardson, à très basse température (vers 2 mK). L'origine de cette phase est l'association des atomes d'hélium 3 en paires; ce qui donne des particules composites qui sont bosoniques de spin 0.

## 2. Diagramme de phase de l'hélium

### 2.1. Diagramme de phase de l'hélium 4.

Le diagramme de phase pression-température de l'hélium 4 est comme suit :

Diagramme P(T) de l'Hélium

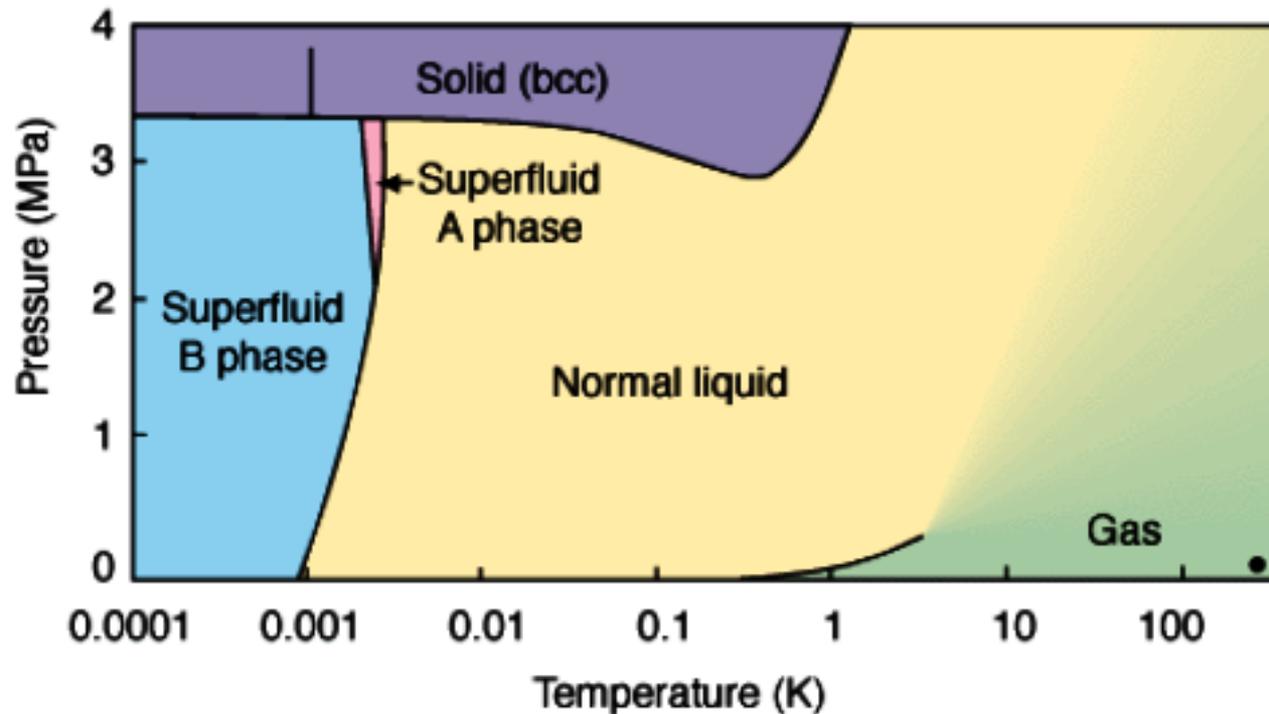


# Commentaires :

- Vers 2,17 K, l'hélium 4 subit une transition- $\lambda$  de la phase liquide I (fluide) à la phase liquide II (superfluide).
- Mais pour  $P < 25$  atm, l'hélium 4 est à l'état liquide.
- Pour  $P > 25$  atm, il est à l'état solide.
- La courbe de vaporisation (courbe d'en bas) se termine par un *point critique*, à l'instar des autres substances.

## 2.2. Diagramme de phase de l'hélium 3.

Le diagramme de phase pression-température de l'hélium 3 est le suivant :



# Commentaires :

- L'hélium 3 ne présente pas de transition- $\lambda$ , contrairement à l'hélium 4.
- Mais il présente deux phases A et B dont un est anisotrope.
- Une particularité est que la courbe de solidification présente un minimum à  $P = 30$  atm.
- Dans la phase solide, l'hélium 3 a deux phases solides distinctes.
- L'hélium 3 présente aussi un *point critique*.

### 3. Propriétés thermiques de l'hélium 3

- Du point de vue de la Physique Statistique, l'hélium 3 est régi par la *Statistique de Fermi-Dirac*, étudié en détails au Chapitre 4.
- Toutes les formules (propriétés thermiques) du Chapitre 5, relatives à un gaz électronique, restent valables, ici, à condition de remplacer la masse de l'électron,  $m$ , par la masse de l'atome de l'hélium 3,  $m_{H3}$ .

# Propriétés au zéro absolu :

L'énergie de Fermi, la température de Fermi, l'énergie interne de Fermi, le grand potentiel de Fermi et la pression de Fermi sont donnés par :

$$\epsilon_F = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_{H3}} \left(\frac{N}{\Omega}\right)^{2/3}, \quad T_F = \frac{\epsilon_F}{k_B}$$

$$U_F = \frac{3}{5} N \epsilon_F, \quad A_F = -\frac{2}{5} N \epsilon_F$$

$$P_F = \frac{2}{3} \frac{U_F}{\Omega} = \frac{1}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_{H3}} \left(\frac{N}{\Omega}\right)^{5/3}$$

Ici,  $m_{H3}$  désigne la masse d'un atome d'hélium 3. Comme cette masse est plus grande que celle de l'électron, les quantités précédentes restent inférieures à leurs homologues relatives à un gaz électronique, à la même densité. En particulier, la température de Fermi a la valeur :

$$T_F = 2,7 \text{ K}$$

Donc, cette température de Fermi est 10.000 plus faible que celle relative aux métaux.

# Propriétés au-dessus du zéro absolu :

**Énergie interne :**

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right]$$

**Grand potentiel :**

$$A = -\frac{2}{5} N \epsilon_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right]$$

## Chaleur spécifique :

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} N k_B \frac{T}{T_F}$$

qui est supérieure à celle des métaux.

## Entropie :

$$S = \frac{\pi^2}{2} N k_B \frac{T}{T_F}$$

qui est aussi supérieure à celle des métaux.

# Équation d'état :

Par analogie avec le gaz électronique, la pression est donnée par :

$$P\Omega = \frac{2}{5} N \epsilon_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right]$$

Noter que  $P\Omega = 2U/3$ .

## 4. Propriétés thermiques de l'hélium 4

- L'hélium 4 est régi par la *Statistique de Bose-Einstein* et sa masse atomique est supérieure à celle de l'hélium 3.
- Toutes les formules en relation avec les propriétés thermiques reste les mêmes que celles décrites au Chapitre 6, mais avec  $g = 1$ .

# Température de Bose :

- L'important est que l'hélium 4 est aussi sujet d'une Condensation de Bose-Einstein (CBE) se produisant à une température de Bose donnée par (voir Chapitre 6, avec  $g = 1$ ) :

$$T_\lambda = \frac{1}{k_B} \frac{3,31 \hbar^2}{m_{H4}} \left( \frac{N}{\Omega} \right)^{2/3}$$

## Nombre de particules dans un condensat :

$$N_{\epsilon=0} = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_\lambda} \right)^{3/2} \right]$$

# Énergie interne :

Elle s'exprime par :

$$\frac{U}{\Omega} = \frac{(2m_{H4})^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\epsilon/k_B T} - 1} d\epsilon$$

Soit,

$$\frac{U}{\Omega} = 0,128 \frac{(m_{H4})^{3/2}}{\hbar^3} (k_B T)^{5/2}$$

L'énergie interne croît avec la température,  
pour  $T < T_\lambda$ , comme  $T^{5/2}$ .

# Entropie :

Elle est donnée par (voir Chapitre 6, avec  $g = 1$ ) :

$$S = \frac{5}{3} \frac{U}{T}$$

Explicitement,

$$S = 3,35 k_B \Omega \left( \frac{m_{H_4} k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}, \quad T < T_\lambda$$

L'entropie augmente avec la température, pour  $T < T_\lambda$ , comme  $T^{3/2}$ , mais elle est proportionnelle au volume (*extensivité*).

# Chaleur spécifique :

Elle s'exprime par (voir Chapitre 6, avec  $g = 1$ ) :

$$C_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\Omega, N} = \frac{5}{2} \frac{U}{T}$$

Explicitement,

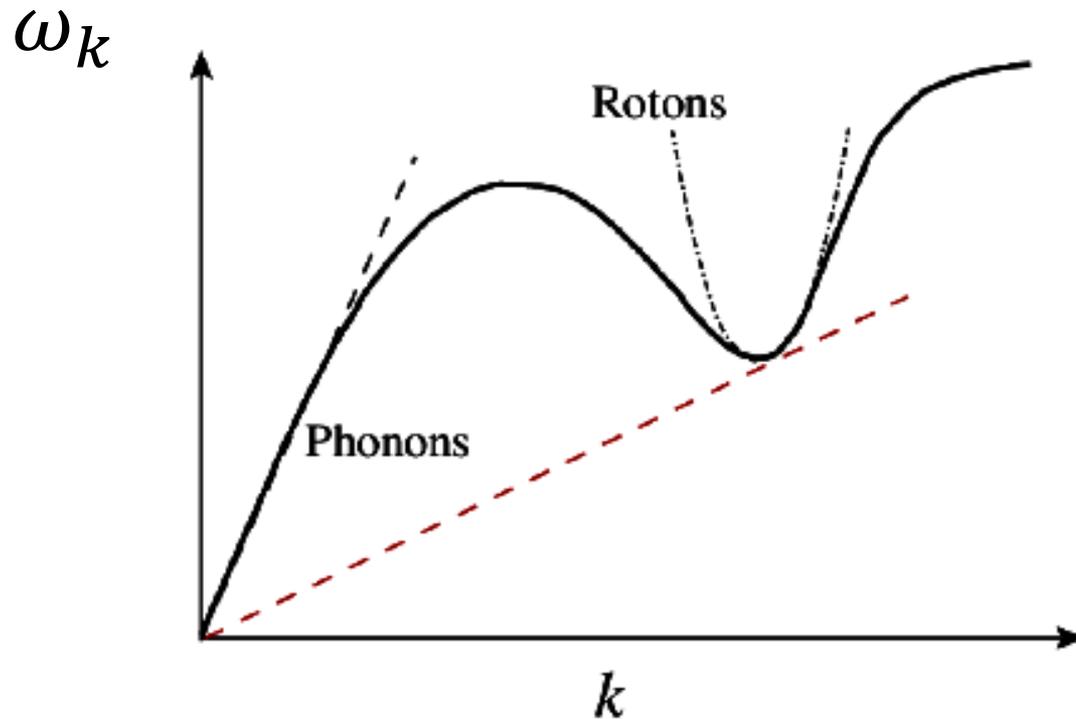
$$C_V = 1,92 N k_B \left( \frac{T}{T_\lambda} \right)^{3/2}, \quad T < T_\lambda$$

## Remarque :

- Expérimentalement, la chaleur spécifique croît plutôt comme  $T^3$ , au lieu de  $T^{3/2}$ . Ce comportement est dû aux interactions entre les atomes de l'hélium 4.
- Selon la théorie de Landau-Kapitza, une fois l'hélium 4 est sollicité par une onde sonore, la pulsation de l'onde,  $\omega_k$ , varie en fonction du module de vecteur d'onde,  $k$ , comme suit (*loi de dispersion*) :

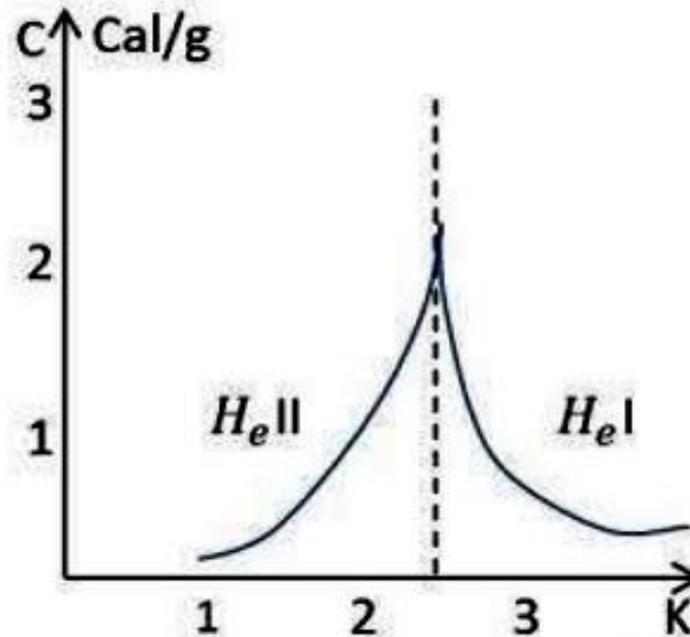
$$\omega_k = vk, \quad k < k_0$$

$$\omega_k = \Delta + \frac{\hbar^2}{2m_0} (k - k_0)^2, \quad k > k_0$$



- Le mode  $k_0$  est appelé "roton". Ici,  $v$  est la vitesse du son dans l'hélium 4,  $m_0$  représente une échelle de masse et  $\Delta$  est une certaine constante.
- Les rotons sont des quanta liés à l'apparition des *vortex*, responsables de la superfluidité de l'hélium, à très basse température.
- Sur la courbe précédente, c'est la branche optique ( $\omega_k = vk$ ) qui donne naissance à la loi en  $T^3$  de la chaleur spécifique (voir Chapitre 9).

On reporte ci-dessous la variation de la chaleur spécifique de l'hélium 4, en fonction de la température :



Comme montré par cette figure, cette chaleur spécifique présente un pic à la température de transition  $T_\lambda$ .

# Équation d'état :

La pression est donnée par :

$$P = \frac{2}{3} \frac{U}{\Omega}$$

Explicitement,

$$P = 1,34 \left( \frac{m_{H4}}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (k_B T)^{5/2}, \quad T < T_\lambda$$

La pression augmente avec la température, pour  $T < T_\lambda$ , comme  $T^{5/2}$ , et s'annule à  $T = 0$  K, qui est une signature d'une CBE. ■