DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL-MEKNÈS

Exercices résolus d'Analyse 2

Filière : SMIA

(Semestre II)

(Ce document ne peut en aucun cas remplacer les séances de TD en présentiel)

Mohamed ZITANE & Jawad H'michane

Année universitaire :2021–2022

Table des matières

1

Intégrale de Riemann

Définition : Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si,

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \psi, \phi \in \mathcal{E}([a,b];\mathbb{R}) \quad \text{telles que} \quad \phi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi - \phi)\, dx \leq \varepsilon,$$

où $\mathcal{E}([a,b];\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Théorème : Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann- intégrable si et seulement si

$$\mathcal{I}^-(f) = \mathcal{I}^+(f) := \int_a^b f(x)\ dx,$$

où

$$\mathcal{I}^-(f) := \sup\left\{ \int_a^b \phi(x)\, dx \ / \ \phi \in \mathcal{E}([a,b];\mathbb{R}) \ , \ \phi \leq f \quad \text{sur } [a,b] \right\}$$

et

$$\mathcal{I}^+(f) := \inf\left\{ \int_a^b \psi(x)\, dx \ / \ \psi \in \mathcal{E}([a,b];\mathbb{R}) \ , \ \psi \geq f \quad \text{sur } [a,b] \right\}.$$

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que la fonction $f : x \to E\left(\frac{1}{x}\right)$ est en escalier sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$.
2. Calculer $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$.

Solution.

1. Considérons une subdivision uniforme $\sigma = \left(\frac{1}{k}\right)_{1\leq k\leq n}$ de $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ adaptée à f. On a

$$f(x) = k, \forall x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], \quad k \in \{1, \cdots, n-1\} (n > 1), \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

   D'où f est en escalier sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$.

2. Par la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier, on a

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Exercice 2

Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \varphi, \mu \in \mathcal{E}([a, b]; \mathbb{R}) \quad \text{telles que} \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \mu(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(x)\, dx \leq \varepsilon.$$

Solution. Supposons que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $(g, h) \in \mathcal{E}([a, b]; \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in [a, b]$, on ait :

$$g \leq f \leq h \quad \text{et} \quad \int_a^b [h(x) - g(x)]\, dx \leq \epsilon.$$

Il suffit de prendre $\varphi = (g+h)/2$ et $\mu = (h-g)/2$.

Réciproquement, soit $\epsilon > 0$, supposons qu'il exite $\varphi, \mu \in \mathcal{E}([a,b];\mathbb{R})$ vérifiant

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \mu(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(x)dx \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Il suffit de prendre $g = \varphi - \mu$ et $h = \varphi + \mu$.

Exercice 3

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

1. Montrer que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists \psi_n, \phi_n \in \mathcal{E}([a,b];\mathbb{R}))$ telles que

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx < \frac{1}{n}.$$

2. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\ dx.$

Solution.

1. Supposons que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, donc $\forall \varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $(\psi_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \in \mathcal{E}([a,b];\mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, on ait :

$$\psi_\varepsilon \leq f \leq \phi_\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)dx \leq \epsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, il existe $\psi_n, \phi_n \in \mathcal{E}([a,b];\mathbb{R})$ telles que

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx \leq \frac{1}{n}. \quad (*)$$

Réciproquement supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $\psi_n, \phi_n \in \mathcal{E}([a,b];\mathbb{R})$

telles que

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx \leq \frac{1}{n}.$$

et montrons que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$, d'après la propriété d'Archimède, il exite $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Or d'après les hypothèses pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $\psi_n, \phi_n \in \mathcal{E}([a, b]; \mathbb{R})$ telles que

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon.$$

Donc f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

2. Montrons maintenant que $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\ dx.$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après $(*)$ on a :

$$0 \leq \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx \leq \frac{1}{n}.$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx = 0$$

La linéarité de l'intégrale donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\ dx \quad (**)$$

Or on a :

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{alors} \quad \int_a^b \psi_n(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \phi_n(x)dx$$

Par passage à la limite et $(**)$ on déduit que :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\ dx.$$

Exercice 4 (Approximation par une suite de fonctions en escalier)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose qu'il existe deux suites (ψ_n) et (ϕ_n) de fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ telles que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx = 0.$$

Montrer que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\ dx.$$

Solution. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose qu'il existe deux suites (ψ_n) et (ϕ_n) de fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ telles que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx = 0.$$

– Montrer que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$: Soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de montrer qu'il existe deux fonctions en escalier ψ et ϕ sur $[a,b]$ vérifiant :

$$\phi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi - \phi)(x)dx \leq \varepsilon. \tag{1.1}$$

Par hypothèse, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx = 0$. Par définition de la limite, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\int_a^b (\psi_m - \phi_m)(x)dx \leq \varepsilon$ pour tout $m > n$. Fixons un tel entier n. Comme ψ_n est intégrable sur $[a,b]$, il existe deux fonctions en escalier c_n et d_n telles que

$$c_n \leq \psi_n \leq d_n \quad \text{et} \quad \int_a^b (d_n - c_n)(x)dx \leq \varepsilon,$$

donc a fortiori $\int_a^b (d_n - \psi_n)(x)dx \leq \varepsilon$.
De même, puisque ϕ_n est intégrable sur $[a,b]$, il existe deux fonctions en escalier a_n et b_n telles que

$$a_n \leq \phi_n \leq b_n \quad \text{et} \quad \int_a^b (b_n - a_n)(x)dx \leq \varepsilon,$$

donc a fortiori $\int_a^b (d_n - \psi_n)(x)dx \leq \varepsilon$.
On a ainsi trouvé des fonctions en escalier a_n et d_n sur $[a,b]$ vérifiant :

$$a_n \leq \phi_n \leq f \leq \psi_n \leq d_n,$$

et

$$\int_a^b (d_n - a_n)(x)\, dx = \int_a^b (d_n - \psi_n)(x)\, dx + \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)\, dx + \int_a^b (\phi_n - a_n)(x)\, dx \leq 3\varepsilon.$$

En prenant $\phi = a_n$ et $\psi = d_n$ on a bien les relations (1.1), ce qui montre que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
– Calculons l'intégrable de f sur $[a,b]$: D'après l'exercice 3, on a

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b a_n(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b d_n(x)\, dx,$$

et comme

$$\int_a^b a_n(x)\, dx \leq \int_a^b \phi_n(x)\, dx \leq \int_a^b \psi_n(x)\, dx \leq \int_a^b d_n(x)\, dx,$$

par passage à la limite, on déduit le resultat dérisé :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\ dx.$$

Remarque : C'est ainsi qu'on peut montrer que les fonctions $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ et $x \mapsto \frac{1}{x} - E(\frac{1}{x})$ sont Riemann intégrables sur $[0,1]$ bien qu'elles ne soient pas continues par morceaux.

Exercice 5

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et soit $g : E \to \mathbb{R}$ (où $f([0,1]) \subset E \subset \mathbb{R}$) une fonction k–lipschitzienne. Montrer que la fonction composée gof est intégrable sur $[0,1]$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, montrer que $\sqrt{f}$ est intégrable sur $[a,b]$. (Indication : montrer que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \quad |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leq \sqrt{|\alpha - \beta|}$.)

Solution.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque, f est intégrable sur $[0,1]$, on peut trouver des fonctions φ et μ en escalier sur $[0,1]$ telles que

$$|f - \varphi| \leq \mu \quad \text{et} \quad \int_0^1 \mu(x)\, dx \leq \varepsilon.$$

Or, $go\varphi$ est une fonction en escalier sur $[0,1]$ puisque, si $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ est une subdivision quelconque de $[0,1]$ telle que $\varphi(x) = \lambda_i$ pour tout $x \in]a_{i-1}, a_i[$, alors

$$(go\varphi)(x) = g(\lambda_i)$$

pour tout $x \in]a_{i-1}, a_i[$ et tout $i \in \{1, ..., n\}$. D'autre part, puisque g est k–lipschitzienne, on a

$$|(gof)(x) - (go\varphi)(x)| \leq k|f(x) - \varphi(x)| \leq k\mu(x),$$

avec

$$\int_0^1 k\mu\, dx \leq k\varepsilon.$$

On en conclut que la fonction gof est intégrable sur $[0,1]$.

2. – Montrons que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \quad |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leq \sqrt{|\alpha - \beta|}$: On sait que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \tag{1.2}$$

$*$ Si $\alpha \geq \beta$. En prenant $x = \beta$ et $y = \alpha - \beta$ dans (1.2), on obtient :

$$\sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha - \beta}.$$

$*$ Si $\alpha \leq \beta$. En prenant $x = \alpha$ et $y = \beta - \alpha$ dans (1.2), on obtient :

$$\sqrt{\beta} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta - \alpha}.$$

On a démontrer donc le résultat désiré.

– Montrons que $\sqrt{f}$ est intégrable sur $[a,b]$: Puisque, f est intégrable sur $[a,b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ et μ en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$|f - \varphi| \leq \mu \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(x)\, dx \leq \varepsilon.$$

Or $|\varphi|$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, d'après l'inégalité précédente, on a

$$|\sqrt{f} - \sqrt{|\varphi|}| \leq \sqrt{|f - |\varphi||}.$$

Comme de plus

$$|f - |\varphi|| \leq |f - \varphi| \leq \mu,$$

on déduit que

$$|\sqrt{f} - \sqrt{|\varphi|}| \leq \sqrt{\mu},$$

où $\sqrt{\mu}$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\int_a^b \sqrt{\mu}(x)\, dx \leq \left(\int_a^b 1\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \mu(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

On a donc démontré que $\sqrt{f}$ est intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 6 (Application de l'inégalité de Schwarz)

1. Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[0,1]$, on suppose en outre que $fg \geq 1$. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) \geq 1.$$

2. Étant donné a et b tels que $0 < a < b$. Montrer que

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{ab}}.$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{2n})$, et soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i + \int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + \int_a^b f^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \beta_i^2 + \int_a^b g^2\right).$$

Solution.

1. Les fonctions f et g sont continues et positives sur $[0,1]$, donc $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ sont définies et continues sur $[0,1]$, donc intégrables sur $[0,1]$. Et puisque on a $fg \geq 1$, on a aussi $1 \leq \sqrt{f}\sqrt{g}$. L'inégalité de Schwarz donne :

$$1 = \left(\int_0^1 1\,dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 \sqrt{f}\sqrt{g}\,dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right).$$

2. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Schwarz à $f(x) = 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

3. On a

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i + \int_a^b fg\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i\right)^2 + \left(\int_a^b fg\right)^2 + 2\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i \int_a^b fg.$$

D'après l'inégalité de Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right),$$

et d'après l'inégalité de Schwarz pour les fonctions intégrables, on a

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

Donc

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i + \int_a^b fg\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2 + \int_a^b f^2\int_a^b g^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\int_a^b fg.$$

Or

$$\left(\int_a^b \alpha_i g - \beta_i f\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha_i\beta_i\int_a^b fg \leq \alpha_i^2\int_a^b g^2 + \beta_i^2\int_a^b f^2.$$

En reportant dans la dernière inégalité, on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i + \int_a^b fg\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2 + \int_a^b f^2\int_a^b g^2 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\int_a^b g^2 + \sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\int_a^b f^2,$$

c-à-d

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i + \int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 + \int_a^b f^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2 + \int_a^b g^2\right).$$

Exercice 7 (Première formule de la moyenne)

Soit f une fonction continue au voisinage de 0. Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,dt = \frac{f(0)}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}\,dt = f(0)\ln(2).$$

Solution.

1. On prend $g(t) = t \geq 0$, $\forall t \in [0,x]$ on a $g(t) \geq 0$. D'après la première formule de la moyenne, il existe $c \in [0,x]$ tel que :

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,dt = \frac{1}{x^2}f(c)\int_0^x t\,dt = \frac{1}{x^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x f(c) = \frac{f(c)}{2}.$$

Faisonant tendre $x \to 0^+$, alors $c \to 0^+$. Donc

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,dt = \frac{f(0)}{2}.$$

2. Il suffit de prendre $g(t) = \dfrac{1}{t}$ et appliquer la première formule de la moyenne.

Exercice 8 (Lemme de Riemenn-Lebesgue)

1. Montrer que pour toute fonction en escalier $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0.$$

2. En déduire le resultat pour toute fonction intégrable sur $[a,b]$.

Solution.

1. Puisque f est en escalier sur $[a,b]$, il existe une subdivision adaptée à f

$$\sigma = \{a = a_0, a_1, ..., a_m = b\} \quad (m \geq 1),$$

et des réels $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ tels que

$$\forall i \in \{0,1,2,...,m-1\}, \quad \forall x \in\,]a_i, a_{i+1}[, \quad f(x) = \lambda_i.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_a^b f(x)e^{inx}\,dx = \sum_{k=0}^{m-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)e^{inx}\,dx = \sum_{k=0}^{m-1}\lambda_k \frac{e^{ina_{k+1}} - e^{ina_k}}{in}.$$

D'où

$$0 \leq \left|\int_a^b f(x)e^{inx}\,dx\right| \leq \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{m-1}|\lambda_k|.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)e^{inx}\,dx\right) = 0,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(x)e^{inx}\,dx\right) = 0.$$

2. Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors une fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,dx \leq \varepsilon$. Puisque φ est en escalier, d'après la question précédente, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi(x)e^{inx}\,dx = 0,$$

d'où, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\int_a^b \varphi(x)e^{inx}\,dx\right| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)e^{inx}\,dx\right| &\leq \left|\int_a^b \varphi(x)e^{inx}\,dx\right| + \left|\int_a^b (f(x)-\varphi(x))e^{inx}\,dx\right|\\ &\leq \varepsilon + \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,dx \leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

c-à-d $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)e^{inx}\,dx = 0$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)e^{inx}\,dx\right) = 0,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(x)e^{inx}\,dx\right) = 0.$$

Remarque :

1. Cet exercice nécesi et seulement site des connaissances sur l'intégration des fonctions à valeurs complexes.
2. Ce resultat permet de démontrer la décroissance vers 0 des coefficients de Fourier. Il est particulièrement facile à prouver si f est de classe $\mathcal{C}^1$: par intégration par parties.

Exercice 9 (Sommes de Riemann)

1. Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^x$ sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ puis calculer les deux intégrales $\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\int_0^1 g(x)\,dx$.
2. Calculer les limites des suites définies par le terme général suivant :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\sqrt{\frac{k}{2n+k}}, \quad v_n = \left(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k^2}{n^2})\right)^{\frac{1}{n}}, \quad w_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}E(\sqrt{k}).$$

Solution.

1. Calcul de $\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\int_0^1 g(x)\,dx$:
   Les fonctions f et g sont continues sur tout intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, elles sont donc intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$, de plus, on a :

$* \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n$ avec $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{k}{n})^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2.$

Or

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}.\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}.$$

$* \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n$ avec $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{\frac{1}{n}})^k.$

Or

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Donc

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\frac{1-(e^{\frac{1}{n}})^n}{1-e^{\frac{1}{n}}} == \lim_{n\to+\infty}\frac{1-e}{\frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}} = \frac{1-e}{-1} = e-1.$$

2. $*$ Calcul de $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

   On a $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\sqrt{\frac{\frac{k}{n}}{2+\frac{k}{n}}}$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{x}{2+x}}$ est continue sur $[0,1]$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{x}{2+x}}\,dx \quad \text{(intégrale abélienne de première espèce).}$$

   Le changement de variable $t = \sqrt{\frac{x}{2+x}}$ donne

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4t^2\,dt}{(1+t^2)(1-t^2)} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} - \frac{2}{1+t^2}\,dt = \ln 2 - 2\arctan(\frac{1}{3}).$$

   $*$ Calcul de $\lim_{n\to+\infty} v_n$:

   On a $\ln(v_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k^2}{n^2}) \to_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx.$

L'intégration par parties, donne

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} := \alpha.$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} v_n = e^{\alpha}$.
∗ Calcul de $\lim_{n\to+\infty} w_n$:
On sait que $\forall x \in \mathbb{R} : x - 1 < E(x) \leq x$ En particulier, pour tout entier $k \geq 1$, on a $\sqrt{k} - 1 < E(\sqrt{k}) \leq \sqrt{k}$. Ainsi, , pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{k} - 1) < \frac{E(\sqrt{k})}{n\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$.
Par suite, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}) < \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k}) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

Autrement,

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k}) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,1]$, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, par le lemme de gendarmes, on conclut que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k}) = \frac{2}{3}.$$

Exercice 10

1. En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}\, dt, \qquad B = \int_0^{\pi} e^t \cos(2t)\, dt.$$

2. En utilisant l'intégration par changement de variable, déterminer les primitives suivantes :

$$E(x) = \int \frac{dx}{x(\ln^2(x)-4)}, \quad F(x) = \int \frac{\sin(x)\,dx}{(\cos^2 x + 2\cos x + 5)^2},$$

$$G(x) = \int \frac{e^{3x}+6e^{2x}-e^x}{(e^x-3)^2(e^x-1)}\,dx.$$

Solution.

1. L'intégration par parties :

$\ast$ Calcul de $A = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt$: Posons $\begin{cases} u(t) = & \ln(t) \\ v'(t) = & \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$. D'où $\begin{cases} u'(t) = & \dfrac{1}{t} \\ v(t) = & \dfrac{-1}{t}. \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc

$$A = \left[\frac{-1}{t}\ln t\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{-1}{e} + \left[\frac{-1}{t}\right]_1^e = \frac{-1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

$\ast$ Calcul de $B = \displaystyle\int_0^\pi e^t\cos(2t)\,dt$: Posons $\begin{cases} u(t) = & e^t \\ v'(t) = & \cos(2t) \end{cases}$. D'où $\begin{cases} u'(t) = & e^t \\ v(t) = & \dfrac{1}{2}\sin(2t). \end{cases}$

Comme les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$B = \left[\frac{1}{2}\sin(2t)e^t\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2t)e^t\,dt = 0 - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2t)e^t\,dt.$$

Posons $\begin{cases} u(t) = & e^t \\ v'(t) = & \sin(2t) \end{cases}$. D'où $\begin{cases} u'(t) = & e^t \\ v(t) = & \dfrac{-1}{2}\cos(2t). \end{cases}$. Alors

$$B = \frac{-1}{2}\left(\left[\frac{-1}{2}\cos(2t)e^t\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2t)e^t\,dt\right) = \frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}e^\pi + \frac{1}{2} + \frac{B}{2}\right).$$

c-à-d $\frac{5}{4}B = \frac{1}{4}e^{\pi} - \frac{1}{4}$, donc $B = \frac{e^{\pi}-1}{5}$.

2. L'intégration par changement de variables :
$*$ La primitive $E(x) = \int \frac{dx}{x(\ln^2(x)-4)}$: La fonction $x \mapsto \frac{dx}{x(\ln^2(x)-4)}$ est définie et continue sur $]-\infty, e^{-2}[\cup]e^{-2}, e^{2}[\cup]e^{2}, +\infty[$, elle admet donc des primitives définies sur $]-\infty, e^{-2}[$, $]e^{-2}, e^{2}[$ et sur $]e^{-2}, +\infty[$. Posons $u = \ln x$, d'où $du = \frac{dx}{x}$, donc $E(x) = \int \frac{du}{u^2-4}$. La décomposition en éléments simples de la fraction $F(u) = \frac{1}{u^2-4)} = \frac{1}{(u-2)(u+2)}$ s'écrit sous la forme $F(u) = \frac{a}{u-2} + \frac{b}{u+2}$, avec

$$a = (u-2)F(u)\Big|_{u=2} = \frac{1}{u+2}\Big|_{u=2} = \frac{1}{4}$$

$$b = (u+2)F(u)\Big|_{u=-2} = \frac{1}{u-2}\Big|_{u=-2} = \frac{-1}{4}.$$

D'où

$$E(x) = \int \frac{1}{4}(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2})\,du = \frac{1}{4}(\ln|u-2| - \ln|u+2|) + cte = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + cte.$$

Donc, les primitive de E sont définies sur $]-\infty, e^{-2}[$, $]e^{-2}, e^{2}[$ et sur $]e^{2}, +\infty[$ par :

$$E(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + cte = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}\right| + cte.$$

$*$ La primitive $F(x) = \int \frac{\sin(x)\,dx}{(\cos^2 x + 2\cos x + 5)^2}$: La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)\,dx}{(\cos^2 x + 2\cos x + 5)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives définies sur $\mathbb{R}$. Posons $u = \cos x$, d'où $du = -\sin x dx$, par conséquent, $F(x) = \int \frac{-du}{(u^2+2u+5)^2}$. Ecrivons $u^2 + 2u + 5$ sous la forme canonique : $u^2 + 2u + 5 = (u+1)^2 + 4$, d'où

$$F(x) = \int \frac{-du}{((u+1)^2+4)^2} = \frac{-1}{16}\int \frac{du}{((\frac{u+1}{2})^2+1)^2}.$$

Posons $t = \frac{u+1}{2}$, d'où $dt = \frac{1}{2}du$, donc $F(x) = \frac{-1}{8}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{-1}{8}J_2$. Pour trouver J_2, on doit intégrer par parties J_1 :

$$\begin{aligned}
J_1 = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}(t)'\,dt &= \left[\frac{t}{t^2+1}\right] + 2\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt \\
&=\left[\frac{t}{t^2+1}\right] + 2\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt - 2\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt \\
&=\left[\frac{t}{t^2+1}\right] + 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt.
\end{aligned}$$

Donc,

$$J_2 = \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^2+1}\right] + \frac{1}{2}\arctan t + \text{cte}.$$

On remplace t par $\frac{u+1}{2}$ et u par $\cos x$, on obtient

$$\begin{aligned}
F(x) =& \frac{-1}{8}J_2 = \frac{-1}{16}\left(\frac{\frac{u+1}{2}}{(\frac{u+1}{2})^2+1} + \arctan(\frac{u+1}{2})\right) + \text{cte} \\
=& \frac{-1}{16}\left(\frac{\frac{\cos x+1}{2}}{(\frac{\cos x+1}{2})^2+1} + \arctan(\frac{\cos x+1}{2})\right) + \text{cte}.
\end{aligned}$$

$*$ La primitive $G(x) = \int \frac{e^{3x}+6e^{2x}-e^x}{(e^x-3)^2(e^x-1)}\,dx$: La fonction $x \mapsto \frac{e^{3x}+6e^{2x}-e^x}{(e^x-3)^2(e^x-1)}$ est définie et continue sur $]-\infty,0[\cup]0,\ln 3[\cup]\ln 3,+\infty[$, elle admet donc des primitives définies sur $]-\infty,0[$, $]0,\ln 3[$ et sur $]\ln 3,+\infty[$. Posons $u = e^x$, d'où $du = e^x dx$, par conséquent

$$G(x) = \int \frac{[(e^x)^2+6e^x-1]e^x}{(e^x-3)^2(e^x-1)}\,dx = \int \frac{u^2+6u-1}{(u-3)^2(u-1)}\,du.$$

La décomposition en éléments simples de la fraction $F(u) = \frac{u^2+6u-1}{(u-3)^2(u-1)}$ s'écrit sous la forme $F(u) = \frac{a}{(u-3)^2} + \frac{b}{u-3} + \frac{c}{u-1}$, avec $a = 13, B = \frac{-1}{2}$ et $c = \frac{3}{2}$. D'où

$$G(x) = \frac{-13}{u-3} - \frac{1}{2}\ln|u-3| + \frac{3}{2}\ln|u-1| + cte = \frac{-13}{e^x-3} - \frac{1}{2}\ln|e^x-3| + \frac{3}{2}\ln|e^x-1| + cte.$$

Exercice 11 (Intégrale de Wallis)

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$

1. Montrer que $I_n = J_n$.
2. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
3. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
4. Montrer que $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout entier n.
5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$. En déduire qu'au voisinage de l'infini $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

Solution.

1. Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad I_n = J_n$: En effectuant le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$, $dx = -du$, on obtient :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\;dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\sin^n(\frac{\pi}{2} - u)\;du = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n u\;du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\;dx = J_n.$$

2. Une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} : Soint $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin^{n+1} t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Par une intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
I_{n+2} = &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin^{n+1} t\;dt = \Big[\cos t \cdot \sin^{n+1} t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot (n+1)(-\cos t \sin^n t)\;dt\\
=&(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t\;dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t(1-\sin^2 t)\;dt\\
=&(n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
\end{aligned}$$

On en déduit que $(*) \quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n.$

3. Déduisons I_{2p} et I_{2p+1} : De la relation de récurrence $(*)$ de la question précédente,

pour $p \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{2p} =& \frac{2p-1}{2p} \cdot I_{2p-2} \quad (2p = n+2 \Rightarrow n = 2p-2)\\
=& \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdot I_{2p-4} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdot \frac{2p-5}{2p-4} \cdot I_{2p-6} = \cdots\\
=& \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdot \frac{2p-5}{2p-4} \times \cdots \times \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{(2p-1)(2p-3)\times\cdots\times 3\times 1}{(2p)(2p-2)\times\cdots\times 4\times 2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (I_0 = \frac{\pi}{2})\\
=& \frac{[(2p-1)(2p-3)\times\cdots\times 3\times 1]\times[(2p)(2p-2)\times\cdots\times 4\times 2]}{[(2p)(2p-2)\times\cdots\times 4\times 2]^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2}.
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
I_{2p+1} =& \frac{2p}{2p+1} \cdot I_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdot I_{2p-3} = \cdots\\
=& \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdot \frac{2p-4}{2p-3} \times \cdots \times \frac{2}{3} \cdot I_1\\
=& \frac{[(2p)(2p-2)\times\cdots\times 4\times 2]^2}{[(2p+1)(2p-1)\times\cdots\times 5\times 3]\times[(2p)(2p-2)\times\cdots\times 4\times 2]} \quad (I_1 = 1)\\
=& \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}.
\end{aligned}$$

4. Montrons que $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout entier n : Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (n+1)I_{n+1}I_n$. On a

$$w_{n+1} - w_n = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} - (n+1)I_{n+1}I_n = (n+1)I_{n+1}I_n - (n+1)I_{n+1}I_n (\text{d'après}(*)) = 0.$$

Donc la suite (w_n) est constante de valeur $w_n = w_0 = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$.

5. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ et que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$: Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ car la suite (w_n) est décroissante. Comme $I_n > 0$, on en déduit que $\frac{n+2}{n+1} = \frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Par passage à la limite, on obtient $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, c-à-d $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$, donc $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$. Par suite $w_n \underset{+\infty}{\sim} nI_n^2$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{\pi}{2}$,

alors $nI_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$, ainsi $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 12

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2}}\,dt$.

1. Montrer que f est bien définie et impaire.
2. Montrer que $0 \le f(x) \le \dfrac{1}{2x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer sa dérivée et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que $f(x) \le \ln(2)$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et en déduire que f admet une limite finie à droite en 0.

Solution.

1. $*$ Vérifions que f est bien définie : La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

   • Si $x>0$, alors $[x,2x] \subset \mathbb{R}_+^*$, d'où $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2}}\,dt$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

   • Si $x<0$, alors $[2x,x] \subset \mathbb{R}_-^*$, d'où $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2}}\,dt$ existe pour la même raison.

   $*$ Montrons que f est impaire : Pour étudier la parité d'une fonction définie par une intégrale, la méthode générale consiste à effectuer le changement de variable $u=-t$ sur l'expresi et seulement sion intégrale de $f(-x)$.

   • Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $-x \in \mathbb{R}^*$.

   • Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2}}\,dt = \int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{(-u)^4+(-u)^2}} = -\int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{(-u)^4+(-u)^2}} = -f(x).$$

   Donc, f est impaire sur $\mathbb{R}^*$.

2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*), 0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2x}$: Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $t \in [x, 2x]$ on a

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^4}} = \frac{1}{t^2}.$$

   Ainsi, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}.$$

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$, d'après le lemme de gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculons $f'(x)$: La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet donc une primitive G sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = G(2x) - G(x).$$

   G est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que primitive d'une fonction continue sur cette intervalle et parsuite, par composition avec la fonction affine $x \mapsto 2x$ et par soustraction, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) =& (G(2x))' - (G(x))' = 2G'(2x) - G'(x) \\ =& 2g(2x) - g(x) \quad (G'(x) = g(x) \quad \text{car } G \text{ est primitive de } g) \\ =& \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2}} \\ =& \frac{1}{\sqrt{4x^4+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2}}. \end{aligned}$$

   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{4x^4+x^2} > \sqrt{x^4+x^2}$, alors $f'(x) < 0$ c-à-d f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) f(x) \leq \ln(2)$: Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in [x, 2x]$ on a

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^2}.$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \Big[\ln t\Big]_x^{2x} = \ln 2x - \ln x = \ln 2.$$

La fonction f est décroissante et majorée sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, par le théorème de limite monotone, f admet une limite finie à droite en 0.

Exercice 13

1. Prouver que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}, \quad k \geq 0.$$

2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left[\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right] = \frac{f'(1)-f'(0)}{24}.$$

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n+3} + \ldots + \frac{2}{4n-1} - \ln 2\right) = \frac{-1}{32}.$$

Solution.

1. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}$: Soit f une fonction

de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, considérons une subdivision uniforme de $[0,1]$

$$\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n} \quad \text{avec} \quad a_i = 0 + \frac{i}{n}(1-0) = \frac{i}{n} \quad \forall i \in \{0,1,\cdots,n\}.$$

Observons d'abord que :

$$\begin{aligned}
n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) &= n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx\right) \text{(Relation de Chasle)}\\
&= n\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\left(f(\frac{i}{n}) - f(x)\right)dx\\
&= n\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\left(f(a_i) - f(x)\right)dx\\
&= n\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f'(c_i(x))(a_i - x)\,dx \quad (*).
\end{aligned}$$

La dernière égalité provenant du T.A.F. Si on pose

$$m_i = \inf\left\{f'(x) : x \in [a_{i-1}, a_i]\right\}, \quad M_i = \sup\left\{f'(x) : x \in [a_{i-1}, a_i]\right\}.$$

On obtient

$$m_i\int_{a_{i-1}}^{a_i}(a_i - x)\,dx \leq \int_{a_{i-1}}^{a_i} f'(c_i(x))(a_i - x)\,dx \leq M_i\int_{a_{i-1}}^{a_i}(a_i - x)\,dx.$$

c-à-d

$$m_i\left[a_x x - \frac{x^2}{2}\right]_{a_{i-1}}^{a_i} \leq \int_{a_{i-1}}^{a_i} f'(c_i(x))(a_i - x)\,dx \leq M_i\left[a_i x - \frac{x^2}{2}\right]_{a_{i-1}}^{a_i}.$$

Or

$$\left[a_i x - \frac{x^2}{2}\right]_{a_{i-1}}^{a_i} = a_i^2 - \frac{a_i^2}{2} - a_i a_{i-1} + \frac{a_{i-1}^2}{2} = \frac{1}{2}(a_i - a_{i-1})^2 = \frac{1}{2n^2}.$$

Donc

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} m_i \leq n\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f'(c_i(x))(a_i - x)\,dx \leq \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} M_i \quad (**)$$

Puisque f' est continue sur $[0,1]$ alors elle est intégrable sur $[0,1]$ et on a

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i.$$

De $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} m_i \le n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) \le \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Par passage à la limite, on a

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx \le \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) \le \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx.$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

• En appliquant le resultat obtenu à $f(x) = x^k$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} n^2\left[\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right] = \frac{f'(1)-f'(0)}{24}$: Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, considérons la même subdivision de $[0,1]$. D'après la formule de Taylor, on a :

$$f(x) - f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) = f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x - \frac{2i-1}{2n}\right) + \frac{1}{2}f''(c_i(x))\left(x - \frac{2i-1}{2n}\right)^2.$$

D'où

$$\begin{aligned} n^2\left[\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right] =& n^2\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx-\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)dx\right] \\ =& n^2\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\left(f(x)-f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right)dx \\ =& n^2\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)dx \\ &+\frac{n^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f''(c_i(x))\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)^2 dx \quad (***). \end{aligned}$$

On remarque que chacune des intégrales

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)dx=0.$$

Posons

$$m_i=\inf\left\{f''(x) : x\in[a_{i-1},a_i]\right\},\quad M_i=\sup\left\{f''(x) : x\in[a_{i-1},a_i]\right\}.$$

Puisque f'' est Riemann intégrable sur $[0,1]$, alors

$$\int_0^1 f''(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i.$$

De $(***)$, on obtient :

$$\frac{1}{24n}\sum_{i=1}^{n} m_i\le\frac{n^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f''(c_i(x))\left(x-\frac{2i-1}{2n}\right)^2 dx\le\frac{1}{24n}\sum_{i=1}^{n} M_i.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la dernière inégalité, on obtient le resultat désiré.

- Posons $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$; $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2 \quad \text{et} \quad \frac{2}{2n+1}+\frac{2}{2n+3}+\ldots+\frac{2}{4n-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right).$$

Donc, par application du resultat précédent, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{2n+3}+\ldots+\frac{2}{4n-1}-\ln 2\right) = \frac{-1}{32}.$$

Exercice 14 (facultatif)

Calculer la limite des suites de terme géneral suivant :

$$u_n = n^{\frac{-3}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k}, \quad v_n = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}, \quad w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k e^{\frac{-k}{n}},$$

$$x_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\right)^{\frac{1}{n}}, \quad y_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 15 (facultatif)

Calculer les primitives suivantes sur leurs ensembles de définition :

$$\int \frac{x^4+3x^3+x}{(x-1)^3(x^2-x+1)^2}dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}, \quad \int \frac{x}{(2x+1)\sqrt{x+1}}dx, \quad \int \tan x\,dx,$$

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}dx, \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx, \quad \int \frac{dx}{5\cosh x+3\sinh x+4}, \quad \int \frac{\cosh x}{2\cosh x+\sinh x}dx$$

$$\int \frac{\cosh x-1}{\cosh x+1}e^x dx, \quad \int \frac{dx}{1+\tanh x}, \quad \int x\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}dx.$$

Exercice 16 (facultatif)

Soit F la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

1. Calculer $F'(x)$.
2. Calculer $F(0)$ et montrer que la fonction F est impaire.
3. Étudier les variations de F.
4. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x) = 0$.
5. Calculer le développement limité de F en 0 à l'ordre 3 et desi et seulement siner la courbe de F.

Exercice 17 (facultatif)

1. $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_0^{\Pi/2} e^{-R\sin x} dx$ (Etablir et utiliser $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.)
2. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n x^n e^{-nx} dx, \quad \lim_{x \to 0} \int_{3x}^{x} \frac{\cos t}{t} dt, \quad \lim_{R \to +\infty} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} e^{-R\sin x} dx.$$

   (Etablir et utiliser : $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}^+$).
3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{x+n} dx, \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx, \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx} dx.$$

2

Intégrales Généralisées

Exercice 1

1. En utilisant les primitives usuelles, déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,dx, \qquad B=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx, \qquad C=\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx.$$

2. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$A=\int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\,dx, \quad B=\int_1^{+\infty} x^{2020}e^{-x}\,dx, \quad C=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2-cos(x)}dx,$$

$$D=\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\,dx, \quad E=\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}\,dx, \quad F=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin(x))\,dx.$$

$$G=\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx, \quad H=\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos(x)}}{x}\,dx, \quad I=\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$J=\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx.$$

3. Montrer la convergence et calculer :

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \quad (a<b) \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx.$$

Solution.

1. $*$ La nature de $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\, dx$:

   La fonction $t \mapsto \tan(x)$ est localement intégrable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ car elle est continue. Il y a donc un problème en $\frac{\pi}{2}$.

$$A = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \int_0^t \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \Big[-\ln(|\cos(x)|)\Big]_0^t = -\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \ln(|\cos(t)|) = +\infty.$$

   Donc, l'intégrale A est divergente.

   $*$ La nature de $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx$:

   La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ est localement intégrable sur $]0; \frac{\pi}{4}]$ (car continue). Pour étudier la convergence de cette intégrale, il suffit de se préoccuper du comportement au voisinage de 0. Soit $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$. L'integrand est de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u = \sin$ donc se primitive en $2\sqrt{u}$:

$$B = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \Big[2\sqrt{\sin(x)}\Big]_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{\sin(\varepsilon)} = 2^{\frac{3}{4}},$$

   donc l'intégrale B est convergente et $B = 2^{\frac{3}{4}}$.

   $*$ La nature de $C = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$:

   La fonction $t \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$, donc le problème se pose en

$+\infty$ et en $-\infty$. Soit $c \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_c^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_c^A xe^{-x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\,dx\right]_c^A = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2}e^{-A^2}+\frac{1}{2}e^{-c^2} = \frac{1}{2}e^{-c^2},$$

et

$$\int_{-\infty}^c xe^{-x^2}\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^c xe^{-x^2}\,dx = \lim_{A\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\,dx\right]_A^c = -\frac{1}{2}e^{-c^2}+\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}e^{-A^2} = -\frac{1}{2}e^{-c^2}.$$

Donc, les deux intégrales $\displaystyle\int_c^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^c xe^{-x^2}\,dx$ sont convergentes. Par suite, l'intégrale B est convergente et on a

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = 0.$$

2. $*$ La nature de l'intégrale $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\,dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}$ est continue sur $]0,1[$, donc localement intégrable. Soit $0<c<1$.

– Au voisinage de 0 on a : $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ est une intégrale de Riemann convergente (car $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$), par le critère de comparaison, l'integrale $\displaystyle\int_0^c \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\,dx$ converge.

– Au voisinage de 1 on a : $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)} \underset{1^-}{\sim} \dfrac{2}{1-x}$ et $\displaystyle\int_c^1 \frac{2}{1-x}\,dx$ est une intégrale de Riemann divergente (car $\alpha = 1 \geq 1$), par le critère de comparaison, l'integrale $\displaystyle\int_c^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\,dx$ diverge.

Conclusion : l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\,dx$ diverge (CV+DV=DV).

$*$ La nature de l'intégrale $B = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^{2020}e^{-x}\,dx$:

La fonction $x \mapsto x^{2020}e^{-x}$ est continue (donc localement intégrable) sur $[1,+\infty[$.

D'où le problème se pose en $+\infty$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(x^{2020}e^{-x}) = 0$, d'après les règles de Riemann ($\alpha = 2 > 1$), l'intégrale B converge.

$*$ La nature de l'intégrale $C = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\,dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\,dx$ est paire et localement intégrable sur $]-\infty,+\infty[$, donc les deux intégrales $C = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\,dx$ et $C' = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\,dx$ sont de même nature (dans le cas de convergence on a $C = 2C'$).

Au voisinage de $+\infty$ on a : $\dfrac{x^2}{x^4+2-cos(x)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). Donc, d'après le critère de comparaison, l'intégrale C' converge, par suite l'intégrale C converge.

$*$ La nature de l'intégrale $D = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\,dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$, il y a donc deux problèmes en 0 et en $+\infty$. Soit $c \in]0,+\infty[$.

– L'intégrale $D_1 := \displaystyle\int_0^c \frac{\sin^2(x)}{x}\,dx$ est convergente car la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x}$ admet une limite finie en 0 $\left(\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sin^2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \sin(x)\dfrac{\sin(x)}{x} = 0\times 1 = 0\right)$.

– Pour l'intégrale $D_2 := \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\,dx$ on a

$$D_2 = \int_c^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2x}\,dx = \int_c^{+\infty} \frac{1}{2x}\,dx - \int_c^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx := D_2' + D_2''$$

+ D_2' est une intégrale de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leq 1$).

+ Pour D_2'' on va utiliser l'intégration par parties :

$$D_2'' = \left[\frac{-\sin(2x)}{4x^2}\right]_c^{+\infty} + \int_c^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{4x^2}\,dx = \frac{\sin(2c)}{4c^2} + \frac{1}{4}\int_c^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2}\,dx.$$

Comme $\left|\dfrac{\sin(2x)}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, alors D_2'' est convergente, par suite D_2 diverge.

Conclusion : l'intégrale $D = D_1 + D_2$ diverge (CV+DV=DV).

$*$ La nature de l'intégrale $E = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}\, dx$:

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, le problème se pose donc en 0 et en $+\infty$. Soit $c > 0$,

– Au voisinage de 0 on a : $\dfrac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_0^c \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}}\, dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$), donc d'après le critère de comparaison $E_1 = \displaystyle\int_0^c \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}\, dx$ est convergente.

– Pour $x \geq c$ on a $\dfrac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{c}}$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{c}}\, dx$ converge (voir le cours), d'où d'après le critère de comparaison $E_2 = \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}\, dx$ est convergente.

Conclusion : l'intégrale $E = E_1 + E_2$ converge.

$*$ La nature de l'intégrale $F = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin(x))\, dx$:

La fonction $t \mapsto \ln(1 + \sin(x))$ est continue sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, le problème se pose donc en $-\dfrac{\pi}{2}$. Cherchons un équivalent de $\ln(1 + \sin(x))$ au voisinage de $-\dfrac{\pi}{2}$. Posons $u = x + \dfrac{\pi}{2}$, donc

$$\ln(1+\sin(x)) = \ln(1-\cos(u)) = \ln(\frac{u^2}{2} + o(u^2)) = 2\ln(u)\left(1 + \frac{\ln(\frac{1}{2} + o(1))}{2\ln(u)}\right) \underset{0^+}{\sim} 2\ln(u).$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\, dx$ converge (voir le cours), d'après le critère d'équivalence, l'intégrale F est convergente.

$*$ La nature de l'intégrale $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\, dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, il y a donc deux problèmes en 0 et en $+\infty$. Soit $c \in]0,+\infty[$.

– L'intégrale $G_1 := \displaystyle\int_0^c \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx$ est convergente car la fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ admet une limite finie en 0 $\left(\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\right)$.

– Puisque $|\cos x| \leq 1$, alors

$$\left|\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1+|\cos(x)|}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}, \quad \forall x \in [c,+\infty[.$$

Comme $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), par le critère de comparaison, l'intégrale $G_2 := \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ est convergente.

Conclusion : l'intégrale $G = G_1 + G_2$ est convergente (CV+CV=CV).

$*$ La nature de l'intégrale $H = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos(x)}}{x}\,dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{\cos(x)}}{x}$ est continue sur $]-\infty,-1]$, il suffit donc d'étudier le comportement au voisinage de $-\infty$. Puisque $-1 \leq \cos x \leq 1$, on a $e^{-1} \leq e^{\cos x} \leq e$ et donc

$$\left|\frac{e^{\cos(x)}}{x}\right| = \frac{e^{\cos(x)}}{|x|} \geq \frac{e^{-1}}{|x|} = \frac{e^{-1}}{-x}, \quad \forall x \in]-\infty,-1].$$

Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-1}}{x}\,dx$ est une intégrale de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leq 1$), par le critère de comparaison, l'intégrale H est divergente.

$*$ La nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, il y a donc deux problèmes en 0 et en $+\infty$. Soit $c \in]0,+\infty[$.

– L'intégrale $I_1 := \int_0^c \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx$ est convergente. En effet, puisque $|\cos x| \leq 1$, alors

$$\left|\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{|\cos(x)|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in]0,c].$$

Comme $\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), par le critère de comparaison, l'intégrale I_1 est convergente.

– D'après le critère d'Abel, l'intégrale $I_2 := \int_c^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx$ est convergente. En effet, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ garde un signe constant, décroissante et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

D'autre part, pour tout $t \in [c,+\infty[$: On a $\left|\int_c^t \cos(x)\, dx\right| \leq 2$.

Conclusion : l'intégrale $I = I_1 + I_2$ est convergente (CV+CV=CV).

$*$ La nature de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$:

En faisant le changement de variable $u = x^2$ on obtient $J = \frac{1}{2}I$. Comme l'intégrale I est convergente, alors J l'est aussi.

3. $*$ La convergence et le calcul de $A = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \quad (a<b)$:

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$ est localement intégrable (car continue) sur $]a,b[$.

Il y a donc deux problèmes en a et en b. Or

$$\frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \underset{a^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-a)}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \underset{b^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(b-a)(b-t)}},$$

et $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t-a}}, \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{b-t}}$ sont deux intégrales de Riemann convergentes ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), alors l'intégrale A est convergente.

Pour le calcul, on remarque que A a la forme d'une intégrale abélienne de deuxième espèce. On a

$$\begin{aligned}(t-a)(b-t) &= -t^2+(a+b)t-ab\\ &= -\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad \text{(la forme canonique)}\\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\left[1-\left(\frac{2t}{b-a}-\frac{a+b}{b-a}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Alors, $\dfrac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \dfrac{2}{b-a}\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2t}{b-a}-\dfrac{a+b}{b-a}\right)^2}}$.

Effectuons le changement de variable $u = \dfrac{2t}{b-a}-\dfrac{a+b}{b-a}$, on trouve

$$\begin{aligned}A &= \int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\\ &= 2\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \left(u\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \text{ est paire}\right)\\ &= 2\lim_{x\to 1^-}\Big[\arcsin u\Big]_0^x\\ &= \pi.\end{aligned}$$

$*$ La convergence et le calcul de $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$.

La fonction $x\mapsto \ln(\sin x)$ est localement intégrable (car continue) sur $]0,\frac{\pi}{2}]$. De plus, lorsque $x\to 0^+$, on a

$$\ln(\sin x) = \ln(x+o(x)) = \ln(x)+\ln(1+o(1)) \underset{0^+}{\sim} \ln x.$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ converge (voir le cours), d'après le critère d'équivalence, l'intégrale $B' := \displaystyle\int_0^1 \ln(\sin x)\,dx$ est convergente. Or $B = B' + \displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$ et

$\int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$ converge car la fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est continue sur le compacte $[1, \frac{\pi}{2}]$, donc B est convergente.

Pour le calcul, de $\sin x = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$ on obtient

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\frac{x}{2})\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{x}{2})\, dx \\
&= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\, dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\, dx \quad (\text{poser} \quad u = \frac{\pi}{2} - x) \\
&= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\, dx + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\, du \quad (\text{Relation de Chasle}) \\
&= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx \\
&= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2B.
\end{aligned}$$

D'où $B = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

Exercice 2

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(x)\ln x\, dx$ est absolument convergente.
2. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
3. Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que f' soit bornée. Montrer que $\lim_1 f$ existe.

Solution.

1. Montrons que $\int_0^1 f(x)\ln x\, dx$ est absolument convergente :
   Puisque f est continue sur le compact $[0,1]$, elle y est bornée ; il existe donc $M \geq 0$ tel que $|f(t)\ln t| \leq M|\ln t|$ pour tout $t \in [0,1]$. D'où

$$|f(t)\ln t| \leq M|\ln t|. \tag{2.1}$$

   Or, sur $]0,1]$ on a $|\ln t| = -\ln t$ et l'intégrale $\int_0^1 \ln x\, dx$ est convergente (voir le cours), de l'inégalité (2.1) et le critère de comparaison, on déduit que l'intégrale $\int_0^1 f(x)\ln x\, dx$ est absolument convergente.

2. Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$:
   Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'intégrale de f est convergente, d'après le critère de Cauchy, on a :

$$(\exists A > 0)(\forall x > A), \quad \int_x^{2x} f(t)\, dt < \varepsilon.$$

   Comme la fonction f es décroissante sur $]1,+\infty[$, on a alors

$$(\forall x > A), \quad xf(2x) = \int_x^{2x} f(2x)\, dt \leq \int_x^{2x} f(t)\, dt < \varepsilon.$$

   On en déduit que $0 \leq 2xf(2x) \leq 2\varepsilon$ pour tout $x > A$, ce qui entraîne :

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0.$$

3. Montrons que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe :
   On a $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\, dt$, d'où $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(0) + \lim\limits_{x\to 1}\int_0^x f'(t)\, dt$. Or l'intégrale impropre $\int_0^1 f'(t)\, dt$ est convergente, alors $\lim\limits_{x\to 1}\int_0^x f'(t)\, dt$ existe. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe aussi.

Exercice 3

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ converge et soient $a, b > 0$. Pour tout $x > 0$, on pose :

$$F(x) := \int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\, dt \quad \text{et} \quad G(x) := \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

1. Montrer que $F = G$.
2. Montrer que si une fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et nulle en 0, alors $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t}\, dt = 0$.
3. Déduire des deux questions précédentes que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\, dt = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

4. Application : Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt = \ln \frac{b}{a}$.

Solution.

1. Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{f(at)}{t}\, dt - \int_x^{+\infty} \frac{f(bt)}{t}\, dt \\
&= \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\, du - \int_{bx}^{+\infty} \frac{f(v)}{v}\, dv \quad (\text{poser} \quad u = at \quad \text{et} \quad v = bt) \\
&= \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\, du + \int_{+\infty}^{bx} \frac{f(v)}{v}\, dv \quad (\text{Ralation de Chasle}) \\
&= G(x).
\end{aligned}$$

2. En supposant, sans perte de généralité, $b \geq a$. La fonction $t \mapsto g(t)$ est continue sur $[ax, bx]$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{t}$ est positive sur $[ax, bx]$, donc, d'après la première

formule de la moyenne, il existe $c_x \in [ax, bx]$ tel que

$$\int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t}\, dt = g(c_x) \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\, dt = g(c_x) \ln(\frac{b}{a}).$$

Comme $c_x \to 0$ quad $x \to 0$, alors,

$$\lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t}\, dt = \lim_{c_x \to 0} g(c_x) \ln(\frac{b}{a}) = g(0)\ln(\frac{b}{a}) = 0.$$

3. On considère la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) := f(x) - f(0)$. Cette fonction est continue et nulle en 0. D'où,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\, dt &= \lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} G(x) \quad \text{(D'après la première question)} \\
&= \lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\, dt \\
&= \lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(0) + g(t)}{t}\, dt \\
&= \lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t}\, dt + \lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t}\, dt \\
&= f(0) \lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\, dt + 0 \quad \text{(D'après la deuxième question)} \\
&= f(0)\ln(\frac{b}{a}).
\end{aligned}$$

4. Appliquer le resultat de la question précédente à la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ qui vérifie les hypothèses.

Exercice 4

Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{4x^2 + x + 1}}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} 2^{-x} x^4\, dx,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{(\tan x - x)^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha(1-x)^\beta}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\arctan x}}\,dx.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx, \quad \int_0^1 \sin(1/x)\,dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x},$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^\alpha)\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx,$$

$$\int_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin x\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,dx.$$

Solution.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{4x^2+x+1}}\,dx$: L'intégrande est positif, continu sur $[1,+\infty[$ et majoré par $\dfrac{1}{2x^2}$ donc, d'après le critère de comparaison, l'intégrale est (absolument) convergente.

Remarque : une autre façon de montrer que cette intégrale converge est de la transformer, par le changement de variable $\tan\theta = \dfrac{8x+1}{\sqrt{15}}$, en une intégrale non impropre, que l'on peut même calculer.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$: Au voisinage de 0, on a $\dfrac{e^{-x}}{x} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x} > 0$ donc, d'après le critère d'équivalence, l'intégrale diverge. (en $+\infty$, elle est absolument convergente car $0 < \dfrac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$ pour $x \geq 1$).

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$: L'intégrande est continu sur $[0,+\infty[$ et $\dfrac{|\cos x|}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ donc l'intégrale est absolument convergente, d'après le critère de comparaison.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2^{-x}x^4\,dx$: Le problème se pose en $+\infty$. On a $2^{-x} = e^{-x\ln 2}$ et $\ln 2 > 0$ d'où

$$\lim_{x\to+\infty} x^4.2^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-x\ln 2} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x\ln 2} = 0.$$

Donc, d'après les règles de Riemann, l'intégrale converge (absolument).

$*$ La nature de $\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$: Par changement de variable et équivalence, l'intégrale en 1 est de même nature que celle de $\frac{1}{y}$ en 0 donc divergente.

$*$ La nature de $\int_0^1 \frac{dx}{(\tan x - x)^\alpha}$: En 0, par équivalence, l'intégrale est de même nature que celle de $\frac{1}{x^{3\alpha}}$ donc, elle converge (absolument) si et seulement si $3\alpha < 1$, c'est-à-dire $\alpha < 1/3$ (elle n'est même pas impropre si $\alpha \leq 0$).

$*$ La nature de $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha(1-x)^\beta}\,dx$: L'intégrande est équivalent à $\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ en 0 et à $\frac{\ln 2}{(1-x)^\beta}$ en 1. D'après le critère d'équivalence, l'intégrale est donc convergente (absolument) si et seulement si $\alpha - 1$ et β sont strictement inférieurs à 1, c'est-à-dire $\alpha < 2$ et $\beta < 1$.

$*$ La nature de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\arctan x}}\,dx$: On a $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\arctan x}} = 1$ car $\arctan x . \ln x \underset{0^+}{\sim} x \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Par conséquent, l'intégrale est convergente en 0 car l'intégrande admet une limite finie en 0.
Au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{x^{\arctan x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\pi/2}}$ (car quand $y := \frac{1}{x} \to 0^+$, $\frac{x^{\pi/2}}{x^{\arctan x}} = y^{-\pi/2+\arctan(1/y)} = y^{-\arctan(y)} = \frac{1}{y^{\arctan y}} \to 1$). Puisque $\pi/2 > 1$, l'intégrale converge donc aussi en $+\infty$.

$*$ La nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ et de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$: En 0, par équivalence, on a $\frac{\cos x}{x^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$ et $\frac{\sin x}{x^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$. D'où, la première intégrale converge (absolument) si et seulement si $\alpha < 1$ et la seconde si et seulement si $\alpha < 2$.

En $+\infty$, pour chacune des deux intégrales, on a :

$\star$ convergence absolue si $\alpha > 1$ (Voir le cours).

$\star$ convergence simple si et seulement si $\alpha > 0$. En effet, cette condition est non seulement nécessaire (car si $\beta := -\alpha \geq 0$ alors $\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi/2} x^\beta \sin x\,\mathrm{d}x$ et $\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi/2} x^\beta \cos x\,\mathrm{d}x$, minorées par $(2k\pi)^\beta$, ne tendent pas vers 0) mais aussi suffisante, d'après le critère d'Abel.

En résumé :

– la première intégrale converge lorsque $0 < \alpha < 1$ et sa convergence n'est jamais absolue ;

– la seconde converge lorsque $0 < \alpha < 2$ mais sa convergence n'est absolue que si $\alpha > 1$.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^1 \sin(1/x)\, dx$: Par changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$, cette intégrale est absolument convergente, comme celle de $\dfrac{\sin y}{y^2}$ en $+\infty$.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$: Par changement de variable $y = \arccos x$, cette intégrale est absolument convergente, car $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\, dy$ ($\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\, dy$ est faussement impropre, car l'intégrande admet une limite finie en 0).

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$: Par changement de variable $y = x^2$, cette intégrale est semi-convergente, comme celle de $\dfrac{\sin y}{y^{1/2}}$ en $+\infty$.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^\alpha)\, dx$: Supposons $\alpha \neq 0$ (sinon, l'intégrale diverge évidemment). Par changement de variable $y = x^\alpha$, cette intégrale est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{y^\beta}\, \mathrm{d}y$ avec $\beta = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$. Elle est donc convergente si et seulement si $0 < 1 - \dfrac{1}{\alpha} < 1$, c'est-à-dire $\alpha > 1$, et sa convergence n'est jamais absolue.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$: En 0, l'intégrale est faussement impropre (l'intégrande tend vers 0). En $+\infty$, elle diverge, puisque $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$ et que l'intégrale en $+\infty$ de $\dfrac{\cos(2x)}{x}$ est semi-convergente (par changement de variable $y = 2x$) tandis que celle de $\dfrac{1}{x}$ est divergente.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sin x\, dx$: L'intégrande est continu sur $[1, +\infty[$. Vérifions

les hypothèses de la règle d'Abel. $x \mapsto 1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$ et nulle à l'infini, et $x \mapsto \int_1^x \sin t\,\mathrm{d}t = \cos 1 - \cos x$ est bornée. Par conséquent, l'intégrale converge.
Mais elle est seulement semi-convergente car $\left|\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin x\right| \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{|\sin x|}{2x}$, non intégrable en $+\infty$.
Autre Solution : $\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin x = \left(\frac{1}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\sin x = \frac{\sin x}{2x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc l'intégrale est semi-convergente, comme somme d'une intégrale semi-convergente et d'une intégrale absolument convergente.

$*$ La nature de $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,dx$: En 0, la fonction (positive) $\frac{1-\cos x}{x^\alpha} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{2x^{\alpha-2}}$ est intégrable si et seulement si $\alpha-2<1$, c'est-à-dire $\alpha<3$. En $+\infty$, l'intégrale converge si $\alpha>1$ (car $0 \le \frac{1-\cos x}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}$) et diverge si $\alpha \le 1$ (car $\int_{2k\pi+\pi/2}^{2k\pi+3\pi/2}\frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ge \int_{2k\pi+\pi/2}^{2k\pi+3\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\frac{2k\pi+3\pi/2}{2k\pi+\pi/2} \sim \frac{1}{2k}$). Finalement, $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $1<\alpha<3$.

Exercice 5

Soient $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction localement intégrable, et $I_n = \int_0^n f(x)\,dx$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = I \in \mathbb{R}$. Est-il vrai que sous cette hypothèse :

1. Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge alors $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = I$.
2. Si f est positive alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge ?
3. Si f est positive alors $\lim\limits_{+\infty} f = 0$?
4. f admet en $+\infty$ une limite (finie ou infinie), alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge ?
5. Si f est dérivable et de dérivée bornée, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge ?

Solution.

1. Vrai car si $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\,dx = J$ alors $\lim I_n = J$.
2. Vrai car $\forall A\in\mathbb{R}^+ \quad I_{[A]} \le \int_0^A f(x)\,dx \le I_{[A]+1}$ (où $[A]$ désigne la partie entière de A) donc $\left|\int_0^A f(x)\,dx - I\right| \le \max\left(\left|I_{[A]}-I\right|, \left|I_{[A]+1}-I\right|\right) \to 0$ quand $A\to+\infty$.
3. Faux, bien que l'intégrale converge d'après le point précédent, car $\lim\limits_{+\infty} f$ peut ne pas exister. On peut construire un contre-exemple où, de plus, la fonction positive f n'est pas bornée :

$$f(x)=\begin{cases} ng(n^3(x-n)) & \text{si} \quad n\le x\le n+\dfrac{1}{n^3} \text{ pour un } n\in\mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

   pour n'importe quelle fonction non nulle intégrable $g:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ (par construction, $I_{n+1} = G\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$, avec $G=\int_0^1 g(t)\,dt$).
4. Vrai : ⋆ Montrons d'abord que cette limite ℓ est forcément 0. Pour tout entier naturel n, puisque $I_{n+1}-I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$, on a : $\inf\limits_{x\ge n} f(x) \le I_{n+1}-I_n \le \sup\limits_{x\ge n} f(x)$. Par passage à la limite, on en déduit : $\ell\le 0\le\ell$.

   ⋆ Sachant maintenant que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, montrons que l'intégrale converge. Pour tout $A\in\mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^A f(x)\,dx - I_{[A]}\right| = \left|\int_{[A]}^A f(x)\,dx\right| &\le \int_{[A]}^A |f(x)|\,dx \\ &\le (A-[A])\sup_{[A]\le x\le A}|f(x)| \\ &\le \sup_{x\ge[A]}|f(x)|\end{aligned}$$

   donc

$$\left|\int_0^A f(x)\,dx - I\right| \le \sup_{x\ge[A]}|f(x)| + \left|I_{[A]}-I\right| \to 0 \quad \text{quand} \quad A\to+\infty.$$

5. Faux. Exemple : $f(x)=\sin(2\pi x)$.

Exercice 6

Montrer la convergence et calculer :

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2},\quad \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}},\quad \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+1)(t+2)},\quad \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1},\quad \int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)},\quad \int_3^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-3x+2)^2},\quad \int_0^{+\infty}e^{-t}\cos t\,dt,\quad \int_4^5\frac{dt}{\sqrt{(t-4)(5-t)}},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\,dt,\quad (\alpha\in\mathbb{R}),\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(a+x^2)(b+x^2)}\quad (a,b>0).$$

Solution. La convergence et le calcul de :

$*\ A=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$: On a $A=[\arctan t]_0^{+\infty}=\pi/2$.

$*\ B=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}$: On a $B=\left[2\sqrt{t}\right]_0^1=2$.

$*\ C=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+1)(t+2)}$: La Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de l'intégrande est

$$\frac{1}{(X+1)(X+2)}=\frac{1}{X+1}-\frac{1}{X+2}.$$

Une primitive sur $]-1,+\infty[$ est donc : $F(t)=\ln\dfrac{t+1}{t+2}$. Puisque $\lim\limits_{+\infty}F=0\in\mathbb{R}$, l'intégrale converge et $C=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t+1)(t+2)}=0-F(0)=\ln 2$.

$*\ D=\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$: Par un raisonnement analogue, avec

$$\frac{1}{X^2-1}=\frac{1/2}{X-1}-\frac{1/2}{X+1},$$

$F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}$ (sur $]1,+\infty[$) et $D=\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}=0-F(2)=\frac{\ln 3}{2}$.

$* \; E = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$: Par un raisonnement analogue, avec

$$\frac{1}{(X+1)(X+2)(X+3)} = \frac{1/2}{X+1} - \frac{1}{X+2} + \frac{1/2}{X+3},$$

$F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$ (sur $]-1,+\infty[$) et $E = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0 - F(0) = \frac{\ln(4/3)}{2}$.

$* \; F = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-3x+2)^2}$: Par un raisonnement analogue, avec

$$\frac{1}{(X^2-3X+2)^2} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{2}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2},$$

$F(x) = 2\ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-2}$ (sur $]-\infty,1[$, $]1,2[$ et $]2,+\infty[$) et

$$F = \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-3x+2)^2} = 0 - F(3) = \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

$* \; G = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$: Par équivalence, l'intégrale converge en 0 car $\gamma > -1$. Par changement de variable $s = 1/t$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ln t \; dt$ est l'opposée de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ln t \; dt$ (donc, comme elle, convergente), si bien que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ln t\,\mathrm{d}t$ est convergente et nulle.

$* \; H = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos t \; dt$: Par une double intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-t}(\sin t - \cos t)}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

$* \; I = \displaystyle\int_4^5 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-4)(5-t)}}$: Par le changement de variable $s = 2t - 9$,

$$\int_4^5 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-4)(5-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}} = [\arcsin s]_{-1}^1 = \pi.$$

$* \; J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\, dt$: Par le changement de variable $s = \sqrt{1-t}$,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \ln(1-s^2)\,\mathrm{d}s = 2\left[G(1+s) - G(1-s)\right]_0^1,$$

avec $G(x) = x\ln x - x$, continue sur $]0, +\infty[$. Puisque $\lim\limits_0 G = 0 \in \mathbb{R}$, l'intégrale est donc convergente et vaut $2\,(G(2) - 0) = 4\,(\ln 2 - 1)$.

$* \; K_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)\,(1+t^\alpha)}\, dt, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$: L'intégrande (positif et continu sur $]0, +\infty[$) est majoré par $\dfrac{1}{1+t^2}$, donc l'intégrale converge. Par changement de variable $s = 1/t$,

$$K_\alpha := \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)\,(1+t^\alpha)}\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{(1+s^{-2})\,(1+s^{-\alpha})}\,\frac{-\mathrm{d}s}{s^2} = \int_0^{+\infty} \frac{s^\alpha}{(1+s^2)\,(1+s^\alpha)}\,\mathrm{d}s =: K'_\alpha$$

donc $K_\alpha = \dfrac{K_\alpha + K'_\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{4} = K_0$.

$* \; L = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)(b+x^2)} \quad (a, b > 0)$:

L'intégrale converge en $\pm\infty$ comme celle de $\dfrac{1}{x^4}$.

– Cas général : $b \neq a$. L'intégrande s'écrit alors $\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{x^2+a} - \dfrac{1}{x^2+b}\right)$ donc admet pour primitive

$$F(x) := \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\arctan\frac{x}{\sqrt{b}}\right).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)(b+x^2)} = \lim_{+\infty} F - \lim_{-\infty} F = 2\lim_{+\infty} F = \frac{\pi}{b-a}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right) = \frac{\pi}{b\sqrt{a} + a\sqrt{b}}.$$

– Cas particulier : $b = a$. Par changement de variable $x = y\sqrt{a}$ puis $y = \tan t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)^2} = \frac{1}{a\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{a\sqrt{a}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{2a\sqrt{a}}.$$

Exercice 7

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \, dt$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Pour $\varepsilon > 0$, établir la relation :
$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \, dt = \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} \, dt.$$
3. En déduire le calcule de I (utiliser la première formule de la moyenne).
4. En déduire le calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} \, dx$ (Poser $x = e^{-t}$).

Solution.

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, le problème se pose donc en 0 et en $+\infty$. Soit $c > 0$,
– En 0 : l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \, dt$ est convergente car la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ se prolonge par continuité en 0 (elle admet une limite finie en 0^+). En effet,
$$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = \lim_{t \to 0^+} e^{-t} . \frac{e^{-t} - 1}{-t} = 1.$$
Ou bien, En effectuant un développement limité en 0, on a
$$e^{-t} - e^{-2t} = (1-t) - (1-2t) + o(t) = t + o(t),$$
d'où, $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = 1$.

– En $+\infty$: d'après les règles de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$ converge, en effet,

$$\lim_{t\to+\infty} t^3\Big(\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\Big) = 0, \quad (\alpha = 3 > 1).$$

Conclusion : l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^c \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt + \int_c^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$ est convergente.

2. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\, dt.$$

Par le changement de variable $u = 2t$, on obtient

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\, dt = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2u}\, 2du = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt,$$

d'où,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

3. On a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[\varepsilon, 2\varepsilon]$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est positive sur $[\varepsilon, 2\varepsilon]$, donc, d'après la première formule de la moyenne, il existe $c_\varepsilon \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ tel que

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = e^{-c_\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{1}{t}\, dt = e^{-c_\varepsilon} \ln(2).$$

Comme $c_\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, alors,

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \lim_{c_{\varepsilon\to 0}} e^{-c_\varepsilon} \ln(2) = \ln(2).$$

4. Le changement de variable $x = e^{-t}$ donne :

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,dx = I = \ln(2).$$

Exercice 8

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^3+1)^n}$, où n est un entier naturel.

1. Étudier pour quelles valeurs de n l'intégrale I_n converge.
2. Calculer I_1.
3. Montrer que si $n \geq 1$, on a : $I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$.
4. En déduire l'expresi et seulement sion de I_n.

Solution.

1. On a $\dfrac{1}{(t^3+1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3n}}$. Donc, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^3+1)^n}$ converge si et seulement si $3n > 1$ c-à-d $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculons $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1}$.

   La décomposition en éléments simples de la fraction $F(t) = \dfrac{1}{t^3+1} = \dfrac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}$ s'écrit :

   $$F(t) = \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}.$$

   Avec :
   $a = (t+1)F(t)\Big|_{t=-1} = \dfrac{1}{t^2-t+1}\Big|_{t=-1} = \dfrac{1}{3}.$
   $F(0) = 1 = a + c \Rightarrow c = 1 - a = \dfrac{2}{3}.$
   $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} tF(t) = 0 = a + b \Rightarrow b = -a = \frac{-1}{3}.$
   Donc,

   $$\int_0^x \frac{dt}{t^3+1} = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{3}\int_0^x \frac{t-2}{t^2-t+1}\,dt,$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln(x+1)}{3} - \frac{1}{6}\int_0^x \frac{(t^2-t+1)'}{t^2-t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{t^2-t+1},\\
&= \frac{\ln(x+1)}{3} - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}},\\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^x \frac{dt}{(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})^2+1}, \quad (u=\frac{2t-1}{\sqrt{3}}),\\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) - \arctan(\frac{-1}{\sqrt{3}})\right),\\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $I_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{dt}{t^3+1} = 0 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

3. Soit $n \geq 1$, par une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{(t)'}{(t^3+1)^n}\,dt,\\
&= \left[\frac{t}{(t^3+1)^n}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{3nt^3}{(t^3+1)^{n+1}}\,dt,\\
&= 3n\left(\int_0^{+\infty} \frac{t^3+1}{(t^3+1)^{n+1}}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^3+1)^{n+1}}\,dt\right),\\
&= 3n(I_n - I_{n+1}).
\end{aligned}$$

D'où, pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}I_n$.

4. Pour tout $n \geq 1$, on a $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}I_n$. Donc :

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{3n-4}{3n-3}I_{n-1},\\
I_{n-1} &= \frac{3n-7}{3n-6}I_{n-2},\\
I_{n-2} &= \frac{3n-10}{3n-9}I_{n-3},\\
. &= .\\
. &= .
\end{aligned}$$

$$. = .$$

$$I_2 = \frac{2}{3} I_1.$$

Multiplions ces égalités, membre à membre, on obtient :

$$(\forall n \geq 2), \quad I_n = \frac{3n-4}{3n-3} \cdot \frac{3n-7}{3n-6} \cdot \frac{3n-10}{3n-9} \cdots \frac{2}{3} . I_1 = \frac{3n-4}{3n-3} \cdot \frac{3n-7}{3n-6} \cdot \frac{3n-10}{3n-9} \cdots \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Exercice 9

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)}$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Calculer $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.
3. En déduire I (poser $x = \sqrt{t}$).

Solution.

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(t^2+1)}$ est continue sur $]0, +\infty[$, le problème se pose donc en 0 et en $+\infty$. Soit $c > 0$,
   – En 0, on a $\dfrac{1}{\sqrt{t}(t^2+1)} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0^c \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$), donc, d'après le citère d'équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)}$ est convergente.
   – En $+\infty$, on a $\dfrac{1}{t^{\frac{5}{2}}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0^c \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \dfrac{5}{2} > 1$), donc, d'après le citère d'équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)}$ est convergente.
   onclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)} = \int_0^c \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)} + \int_c^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)}$ converge.
2. Pour calculer l'intégrale J il faut décomposer la fraction $F(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$ en éléménts

simples. On a

$$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

D'où

$$F(x)=\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}=\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Comme la fonction F est paire, alors $c=-a$ et $d=b$, d'où

$$F(x)=\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}=\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{-ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

On a $F(0)=1=2b$, alors $b=\dfrac{1}{2}$.
De $F(1)=\dfrac{1}{2}=\dfrac{a+\frac{1}{2}}{2+\sqrt{2}}+\dfrac{-a+\frac{1}{2}}{2-\sqrt{2}}$, on obtient $a=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^t \frac{(x^2+\sqrt{2}x+1)'+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx,\\
&= \frac{\ln(t^2+\sqrt{2}t+1)}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\int_0^t \frac{dx}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}},\\
&= \frac{\ln(t^2+\sqrt{2}t+1)}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{dx}{(\sqrt{2}x+1)^2+1} \quad (u=\sqrt{2}x+1),\\
&= \frac{\ln(t^2+\sqrt{2}t+1)}{4\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\arctan(\sqrt{2}t+1)-\arctan(1)\Big),\\
&= \frac{\ln(t^2+\sqrt{2}t+1)}{4\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}t+1)-\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Et,

$$\int_0^t \frac{-ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx=-\frac{\ln(t^2-\sqrt{2}t+1)}{4\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(-\sqrt{2}t+1)+\frac{\pi}{4}.$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
J &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{dx}{x^4+1},\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{t^2+\sqrt{2}t+1)}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan(\sqrt{2}t+1)-\arctan(-\sqrt{2}t+1)\right)\right],\\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}
$$

3. Par le changement de variable $x=\sqrt{t}$ dans I, on trouve que $I = 2J = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

3

Équations Différentielles Linéaires

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(E_1) : $(1+x)y'+y-2=0$,

(E_2) : $y''-3y'+2y=1+2e^x$.

Solution.

1. $*$ On commence par résoudre l'équation homogène $(1+x)y'+y=0$. On a

$$\begin{aligned}
(1+x)y'+y=0 &\Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{-dx}{1+x},\\
&\Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{-dx}{1+x},\\
&\Rightarrow \ln|y|=-\ln(|x+1|)+\text{cte},\quad x\in]-\infty,-1[\quad\text{ou bien}\quad x\in]-1,+\infty[,\\
&\Rightarrow y=\frac{C}{|x+1|},\quad\text{avec}\quad C\in\mathbb{R},\quad x\in]-\infty,-1[\quad\text{ou bien}\quad x\in]-1,+\infty[,\\
&\Rightarrow y=\begin{cases}\dfrac{C}{x+1} & \text{pour}\quad x\in]-1,+\infty[,\\ \dfrac{C_1}{x+1} & \text{pour}\quad x\in]-\infty,-1[.\end{cases}\qquad\text{avec}\quad C,C_1\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

$*$ On cherche maintenant une solution particulière de (E_1) ; sur $]-1,+\infty[$ sous la forme $y_p = \dfrac{C(x)}{x+1}$; par la méthode de variation de la constante :

$$\begin{aligned}
y_p \text{ est solution de } (E_1) \Rightarrow &\quad (1+x)y_p' + y_p + 2 = 0 \\
\Rightarrow &\quad (1+x).\frac{C'(x)(1+x) - C(x)}{(1+x)^2} + \frac{C(x)}{1+x} = -2, \\
\Rightarrow &\quad C'(x) = -2 \\
\Rightarrow &\quad C(x) = \int -2\, dx \\
\Rightarrow &\quad C(x) = -2x \\
\Rightarrow &\quad y_p = \frac{C(x)}{x+1} = \frac{-2x}{x+1}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation (E_1) sur $]-1, +\infty[$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C}{x+1} + \frac{-2x}{x+1} = \frac{C-2x}{x+1}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Et sur $]-\infty, -1[$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C_1}{x+1} + \frac{-2x}{x+1} = \frac{C_1-2x}{x+1}, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène associée $y''-3y'+2y = 0$. l'équation caractéristique est : $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont le $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$, alors elle admet deux racines réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Donc, la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h = Ae^x + Be^{2x}; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière, on peut utiliser :

1- Principe de Superposition : le second membre de l'équation (E_2) est de la forme $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, avec $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = 2e^x$. On cherche une solution particulière y_{p_i} $(i=1,2)$ des équations

$$(E_2'): \quad y''-3y'+2y=1, \quad \text{et} \quad (E_2''): \quad y''-3y'+2y=2e^x.$$

On remarque que $y_{p_1}(x)=\dfrac{1}{2}$ est solution particulière de l'équation $(E_2'): \quad y''-3y'+2y=1$.

Le second membre de l'équation (E_2'') est de la forme $e^{mx}\Big(P_0(x)\cos(\omega x)+Q_{-\infty}(x)\sin(\omega x)\Big)$ avec $m=1$, $\omega=0$, $P_0(x)=2$ et $Q_{-\infty}(x)=0$. Or $m+i\omega=1$ est racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_{p_2}=xe^{mx}\Big(R_0(x)\cos(\omega x)+T_0(x)\sin(\omega x)\Big)=axe^x.$$

Puisque

$$y_{p_2}''-3y_{p_2}'+2y_{p_2}=-ae^x=2e^x.$$

Par identification, on obtient $a=-2$, par conséquent,

$$y_{p_2}(x)=-2xe^x.$$

Donc, Une solution particulière y_p de (E_2) est donnée par

$$y_p(x)=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)=\frac{1}{2}-2xe^x.$$

Et la solution générale de (E_2) est

$$y=y_h+y_p=Ae^x+Be^{2x}-2xe^x+\frac{1}{2}; \qquad A,B\in\mathbb{R}.$$

2- Méthode de Variation de la Constante : la solution générale de l'équation homogène associée à (E_2) est donnée par :

$$y_h(x)=Ae^x+Be^{2x}; \quad A,B\in\mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p(x) = A(x)e^x + B(x)e^{2x}, \quad \text{avec} \quad A, B \quad \text{sont deux fonctions dérivables.}$$

On a

$$y_p'(x) = A'(x)e^x + B'(x)e^{2x} + A(x)e^x + 2B(x)e^{2x}.$$

On impose la condition

$$A'(x)e^x + B'(x)e^{2x} = 0,$$

Ce qui donne

$$y_p'(x) = A(x)e^x + 2B(x)e^{2x}.$$

On calcule ensuite y'' (utiliser le fait que $y_1 = e^x$ et $y_2 = e^{2x}$ sont deux solutions de l'équation homogène, c-à-d $e^x - 3e^x + 2e^x = 0$ et $4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0$), on remplace dans l'équation (E_2) on trouve que

$$A'(x)e^x + 2B'(x)e^{2x} = 1 + 2e^x.$$

Résolvons donc le système

$$\begin{cases} A'(x)e^x + B'(x)e^x = 0, \\ A'(x)e^x + 2B'(x)e^{2x} = 1 + 2e^x. \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} A'(x) = -2 - e^{-x}, \\ B'(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}. \end{cases}$$

C'est à dire $A(x) = -2x + e^{-x}$ et $B(x) = -\dfrac{e^{-2x}}{2} - 2e^{-x}$.

Donc, une solution particulière de l'équation (E_2) est donnée par

$$y_p(x) = (-2x + e^{-x})e^x + (-\frac{e^{-2x}}{2} - 2e^{-x})e^{2x} = \frac{1}{2} - 2xe^x - 2e^x.$$

Par conséquent, la solution générale de (E_2) est

$$y(x) = y_h(x)+y_p(x) = Ae^x+Be^{2x}+\frac{1}{2}-2xe^x-2e^x = Ce^x+Be^{2x}-2xe^x+\frac{1}{2}; \quad A,B,C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(Sep) : $\quad (\cos t)y' = (\sin t)y^4$,

(Ber) : $\quad y' = y + ty^3$,

(Ric) : $\quad y' = (t-1)y + y^2 - t$, sachant qu'elle admet une solution particulière constante.

Solution.

1. (Sep) : $\quad (\cos t)y' = (\sin t)y^4$ est une équation à variables séparées. On a

$$\begin{aligned}
(\cos t)y' = (\sin t)y^4 \Rightarrow &\quad (\cos t)\frac{dy}{dt} = (\sin t)y^4 \\
\Rightarrow &\quad \frac{dy}{y^4} = -\frac{\sin t}{\cos t}\,dt, \\
\Rightarrow &\quad \int \frac{dy}{y^4} = -\int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt, \quad \text{sur} \quad I =]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[\quad (k \in \mathbb{Z}), \\
\Rightarrow &\quad \frac{y^{-3}}{-3} = -\ln(|\cos t|) + \text{cte}, \quad \text{sur} \quad I =]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[\quad (k \in \mathbb{Z}), \\
\Rightarrow &\quad y = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{1}{3\ln(|\cos t|)+c_1}},, & \text{sur un intervalle} \quad J \subset I \\ -\sqrt[3]{\dfrac{-1}{3\ln(|\cos t|)+c_2}}, & \text{sur un intervalle} \quad J' \subset I, \end{cases}
\end{aligned}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. (Ber) : $y' = y + ty^3$ est une équation de Bernoulli avec $n = 3$, divisons tous les termes par y^3, on obtient l'équation suivante

$$(Ber') : \quad y'y^{-3} - y^{-2} = t.$$

Introduisant la nouvelle fonction $u = y^{-2}$, d'où $u' = -2y'y^{-3}$, portons ces expresi et seulement sions dans l'équation (Ber'), nous obtenons l'équation différentielle linéaire

$$(E) : \quad u' + 2u = -2t,$$

qu'on peut résoudre facilement. En effet, la solution de l'équation homogène $u' + 2u = 0$ est $u_h(t) = Ce^{-2t}$ et par la méthode de variation de la constante on trouve que $u_p(t) = -t + \frac{1}{2}$ est une solution particulière de (E), d'où la solution générale de (E) est

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = Ce^{-2t} - t + \frac{1}{2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Comme $y^{-2} = u$, donc $y = \frac{\pm 1}{\sqrt{u}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{Ce^{-2t} - t + \frac{1}{2}}}$ sur un intervalle I.

3. (Ric) : $y' = (t-1)y + y^2 - t$ est une équation de Riccati qui admet une solution particulière constante $y_p = c$. En remplaçant dans l'équation (Ric) y par c, on obtient

$$(\forall t \in \mathbb{R}) : \quad 0 = (t-1)c + c^2 - t, \quad \text{c-à-d} \quad (\forall t \in \mathbb{R}) : \quad t(c-1) + (c^2 - c) = 0,$$

d'où $c - 1 = 0$ et $c^2 - c = 0$, donc $c = 1$, par conséquent, $y_p = 1$.
Soit le changement de variables :

$$y = y_p + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{z}.$$

D'où $y' = -\frac{z'}{z^2}$. Substituons cette expresi et seulement sion dans l'équation (Ric), afin d'obtenir une équation linéaire non homogène de la forme

$$(E): \quad z' + (t+1)z = -1,$$

la solution de l'équation homogène $z' + (t+1)z = 0$ est $z_h(t) = Ce^{-(\frac{t^2}{2}+t)}$ et par la méthode de variation de la constante on trouve que $C'(x) = -e^{(\frac{t^2}{2}+t)}$ c-à-d $C(x) = -\int e^{(\frac{t^2}{2}+t)}\, dt$. Donc $z_p(t) = -e^{-(\frac{t^2}{2}+t)}.\int e^{(\frac{t^2}{2}+t)}\, dt$ est une solution particulière de (E), d'où la solution générale de (E) est

$$z(x) = z_h(x) + z_p(x) = e^{-(\frac{t^2}{2}+t)}\left(C - \int e^{(\frac{t^2}{2}+t)}\, dt\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Comme $y = 1 + \frac{1}{z}$, donc

$$y = 1 + \frac{1}{e^{-(\frac{t^2}{2}+t)}\left(C - \int e^{(\frac{t^2}{2}+t)}\, dt\right)} \quad \text{sur un intervalle} \quad I.$$

Remarque : On ne peut pas exprimer la primitive $\int e^{(\frac{t^2}{2}+t)}\, dt$ en termes de fonctions usuelles!!!.

Exercice 3

En posant $u(x) = (1+x^2)y(x)$, résoudre l'équation différentielle suivantes :

$$(E): \quad (1+x^2)y'' + 4xy' + (1-x^2)y = 0.$$

Solution. Posons $u(x) = (1+x^2)y(x)$, donc

$$u'(x) = 2xy(x) + (1+x^2)y'(x) \quad \text{et} \quad u''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + (1+x^2)y''(x).$$

D'où $(1+x^2)y''(x)+4xy'(x) = u''(x)-2y(x)$.
En reportant dans l'équation (E) , on obtient l'équation linéaire suivante :

$$(E) \Leftrightarrow u''(x)-2y(x)+(1-x^2)y = 0 \Leftrightarrow u''(x)-(1+x^2)y = 0 \Leftrightarrow (E'): \quad u''(x)-u(x) = 0.$$

l'équation caractéristique $r^2-1 = 0$ admet deux racines réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. Donc, la solution générale de l'équation (E') est

$$y_h = Ae^x + Be^{-x}; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Comme $u(x) = (1+x^2)y(x)$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$y(x) = \frac{u(x)}{1+x^2} = \frac{Ae^x + Be^{-x}}{1+x^2}; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$