DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL-MEKNÈS

COURS D'ANALYSE 2

FILIÈRE : SMIA

(SEMESTRE II)

(Ce document ne peut en aucun cas remplacer les séances de cours en présentiel)

Mohamed ZITANE & Jawad H'michane

Année universitaire :2019–2020

Table des matières

Chapitre 1

Intégrale de Riemann

Dans tout ce chapitre, on se placera sur un intervalle compact (c'est-à-dire fermé et borné) $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, non vide ni réduit à un point ($-\infty < a < b < +\infty$).

1.1 Intégrale des Fonctions en Escalier

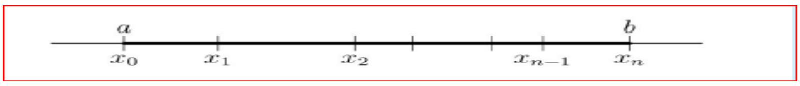
1.1.1 Espace vectoriel des fonctions en escalier

Définition 1.1. — On appelle subdivision de l'intervalle $[a, b]$, toute suite finie et strictement croissante $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de point de $[a, b]$ telle que

$$x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b.$$

— Le nombre $\delta = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{x_i - x_{i-1}\}$ s'appelle le pas de la subdivision.

— Une subdivision est dite uniforme si la distance $x_i - x_{i-1}$ est constante pour tout $1 \leq i \leq n$.



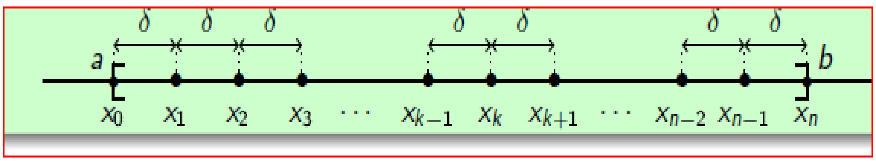
Exemple 1.2. 1. Soit $I = [0, 1]$

— $\sigma = \{0, \frac{1}{3}, 1\}$ est une subdivision de I et son pas $\delta = \frac{2}{3}$.

— $\sigma_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ est une autre subdivision de I et son pas $\delta_1 = \frac{1}{3}$

— $\sigma_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, ..., 1\}$ est une subdivision uniforme de pas $\delta_n = \frac{1}{n}$.

2. Dans le cas général $I = [a, b]$, on peut construire la subdivision uniforme suivante : $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ avec $x_k = a + \frac{k}{n}(b - a)$ $\forall k \in \{0, 2, ..., n\}$ de pas $\delta_n = \dfrac{b-a}{n}$



Définition 1.3. Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que σ' est plus fine que σ si tous les points de σ appartiennent a σ' et on note $\sigma \subset \sigma'$.

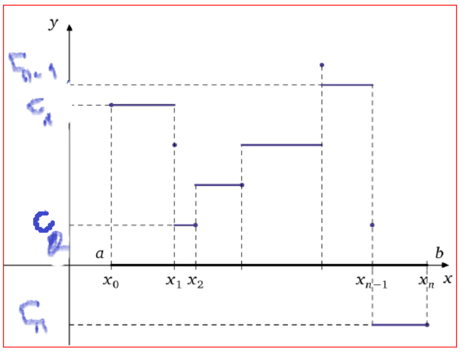
Remarque 1.4.
1. σ' s'obtient à partir de σ en lui ajoutant autres points de l'intervalle $[a, b]$ et en ordonnant la nouvelle famille de points obtenue.
2. À partir de deux subdivisions σ et σ', on peut définir une nouvelle subdivision $\sigma \cup \sigma'$ qui est la réunion de σ et σ' en prenant tous les points apparaissant dans σ ou dans σ' puis en les rangeant dans un ordre strictement croissant.

Exemple 1.5. Dans le cas $I = [0, 1]$, on a $\sigma' = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ est une subdivision plus fine que $\sigma = \{0, \frac{1}{3}, 1\}$.

Définition 1.6. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier, s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ et des réels $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ tels que

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \quad \forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \quad f(x) = \lambda_i.$$

On dit alors que σ est une subdivision adaptée à f.



Remarque 1.7.
1. Il n'y a pas de conditions portant sur les valeurs que prend la fonction f aux différents points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$.
2. Si σ est une subdivision associée à f alors toute subdivision σ' plus fine que σ est également adaptée à f.

Exemple 1.8. La fonction f définie par $f(x) = E(x)$ (partie entière de x), est une fonction en escalier sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Notation : On note $\mathcal{E}([a, b]\,;\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Propriété 1.9

— Si $f \in \mathcal{E}([a, b]\,;\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{E}([a, b]\,;\mathbb{R})$ alors $f + g \in \mathcal{E}([a, b]\,;\mathbb{R})$.
— Si $f \in \mathcal{E}([a, b]\,;\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha.f \in \mathcal{E}([a, b]\,;\mathbb{R})$.
— Si $f \in \mathcal{E}([a, b]\,;\mathbb{R})$ alors $|f| \in \mathcal{E}([a, b]\,;\mathbb{R})$

1.1.2 Construction de l'intégrale d'une fonction en escalier

Théorème 1.10

Soient $f \in \mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})$ et $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. on note λ_i la valeur de f sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[\quad (1 \leq i \leq n)$. Alors le nombre réel $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_{i-1})$ ne dépend pas de la subdivision adaptée à f considérée. On l'appelle l'intégrale de f sur $[a,b]$ et on le note :

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_{i-1})$$

Démonstration. Notons σ la subdivision $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ et posons

$$I(f,\sigma) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_{i-1}).$$

Soit σ' la subdivision de $[a,b]$ obtenue en ajoutant un seul élément c à σ, distinct des éléments de σ. Il existe un entier $j \in \{1,...,n\}$ tel que $c \in]a_{j-1}, a_j[$. La fonction f est constante et égale à λ_j sur $]a_{j-1}, a_j[$ donc sur $]a_{j-1}, c[$ et sur $]c, a_j[$. La subdivision σ' est donc adaptée à f et on a

$$\lambda_j \left(a_j - a_{j-1}\right) = \lambda_j (c - a_{i-1}) + \lambda_j \left(a_j - c\right).$$

On en déduit que $I(f,\sigma) = I(f,\sigma')$.
Il en résulte par récurrence sur le nombre fini d'éléments de $[a,b]$ à adjoindre à σ, que $I(f,\sigma) = I(f,\sigma')$ si σ' est plus fine que σ.
Enfin, si σ et σ' sont deux subdivisions quelconques adaptées à la fonction f, les deux nombres réels $I(f,\sigma)$ et $I(f,\sigma')$ sont l'un et l'autre égaux à $I(f,\sigma\cup\sigma')$.

Remarque 1.11.
- $\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas de la valeur de f aux points de la subdivision.
- $\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas de la subdivision adaptée à f.
- Modifier la valeur de f en un nombre fini de points ne modifie pas la valeur de $\int_a^b f(x)\,dx$.
- Si f et g sont deux fonctions en escalier égales sur $[a,b]$ (sauf peut être en un nombre fini de points,) alors $\int_b^a f(x) = \int_b^a g(x)$.
- L'intégrale d'une fonction en escalier positive est positive.

Exemple 1.12.
1. Si $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ (sauf en un nombre fini de points), alors $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.
2. Si $f(x) = 1 \quad \forall x \in [a,b]$ (sauf en un nombre fini de points), alors $\int_a^b f(x)\,dx = b - a$.
3. Si $f : \left[\frac{-3}{2}, 3\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = E(x)$, alors $\int_{\frac{-3}{2}}^{3} f(x)\,dx = 1$.

Lemme 1.13

Muni des lois usuelles, l'ensemble $\mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}-$sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, et l'application $f \mapsto \int_a^b f(x)\ dx$ de $\mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est linéaire.

Démonstration. Soient α,β deux scalaires et f,g deux éléments de $\mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})$. Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées respectivement à f et à g. Alors, la subdivision $\sigma\cup\sigma'$ est adaptée à la fois à f et à g, et $\alpha f+\beta g$ est constante sur chaque intervalle ouvert de $\sigma\cup\sigma'$, donc $\alpha f+\beta g$ est en escalier sur $[a,b]$.
En calculant l'intégrale de $\alpha f+\beta g$ au moyen de $\sigma\cup\sigma'$, on obtient aussitôt

$$\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

On munit $\mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})$ de la norme uniforme $||.||_\infty$ définie par

$$||f||_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

où le sup est nécessairement fini car f ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Proposition 1.14

1. La forme linéaire $\mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})\to\mathbb{R}\,;\, f\mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ est continue.
2. Si $f,g\in\mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})$, alors $f\le g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.
3. Si $f\in\mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})$, alors $|f|\in\mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})$ et $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Démonstration. 1. Pour $f\in\mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})$ on a

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le (b-a)||f||_\infty$$

ce qui montre que la forme linéaire considérée est continue en 0, donc continue en tout point de $\mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})$.
2. Par Linéarité, il suffit de montrer que $\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx \ge 0$, ce qui découle immédiatement du dernier point de la remarque (1.11).
3. Soit $\sigma=(a_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f telle que f soit constante et égale à λ_i sur chaque intervalle $]a_{i-1},a_i[\quad(1\le i\le n)$. Alors σ est également adapté à $|f|$ et on a

$$\left|\sum_{i=1}^n \lambda_i(a_i-a_{i-1})\right| \le \sum_{i=1}^n |\lambda_i||a_i-a_{i-1}|,$$

d'où le resultat annoncé.

Proposition 1.15

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et c un élément de $]a,b[$. Alors la restriction de f à $[a,c]$ (*resp.* $[c,b]$) est une fonction en escalier sur $[a,c]$ (*resp.* $[c,b]$) et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. Il suffit de considérer une subdivision adaptée à f contenant c.

1.2 Fonctions Intégrables au Sens de Riemann

Nous allons étendre la notion d'intégrale à une classe beaucoup plus générale que celle des fonctions en escalier ; et cette extension sera guidée par le souci de conserver, pour ces nouvelles fonctions, les propriétés acquises au paragraphe précédent pour l'intégrale des fonctions en escalier.

1.2.1 Construction de l'intégrale d'une fonction bornée

Définition 1.16. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si, $\forall \varepsilon > 0; \exists \psi, \phi \in \mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})$ telles que $\phi \le f \le \psi$ et $\int_a^b (\psi - \phi)\,dx \le \varepsilon$.

Remarque 1.17. De cette définition il résulte que toute fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ est nécessairemnt bornée sur ce segment puisque les fonctions en escalier sont elles-mêmes bornées.

Exercice 1.18. Montrer qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ ssi, $\forall \varepsilon > 0; \exists \varphi, \mu \in \mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})$ telles que $|f(x) - \varphi(x)| \le \mu(x)$ et $\int_a^b \mu(x)\,dx \le \varepsilon$.

Rappel : Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite bornée, s'il existe deux reéls m et M tels que $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a,b]$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée quelconque, posons :

$$\mathcal{E}_+(f) := \left\{\psi \in \mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R}) \;/\; \psi \ge f\right\}$$

$$\mathcal{E}_-(f) := \left\{\phi \in \mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R}) \;/\; \phi \le f\right\}$$

$$\mathcal{U}(f) := \left\{\int_a^b \psi(x)\,dx \;/\; \psi \in \mathcal{E}_+(f)\right\}$$

$$\mathcal{L}(f) := \left\{\int_a^b \phi(x)\,dx \;/\; \phi \in \mathcal{E}_-(f)\right\}$$

$$\mathcal{I}^-(f) = \sup \mathcal{L}(f) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^+(f) = \inf \mathcal{U}(f)$$

Quels que soient $u \in \mathcal{L}(f)$ et $v \in \mathcal{U}(f)$, on a évidemment $u \le v$. D'autre part, les ensembles $\mathcal{E}_+(f)$ et $\mathcal{E}_-(f)$ sont tous deux non vides si et seulement si la fonction f est bornée. Dans ce cas, l'ensemble

$\mathcal{L}(f)$ est majoré par tout élément de $\mathcal{U}(f)$ et possède donc une borne supérieure finie, que nous notons $\mathcal{I}^-(f)$; de même l'ensemble $\mathcal{U}(f)$ est minoré par tout élément de $\mathcal{L}(f)$ et possède donc une borne inférieure finie, que nous notons $\mathcal{I}^+(f)$. Pour tout $u \in \mathcal{L}(f)$ et $v \in \mathcal{U}(f)$, on a alors

$$u \leq \mathcal{I}^-(f) \leq \mathcal{I}^+(f) \leq v$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement donné. Si f est intégrable, il existe des éléments

$$u := \int_a^b \phi(x)\,dx \in \mathcal{L}(f) \quad \text{et} \quad v := \int_a^b \psi(x)\,dx \in \mathcal{U}(f)$$

vérifiant $v - u < \varepsilon$; on a donc l'égalité $\mathcal{I}^-(f) = \mathcal{I}^+(f)$.
Réciproquement, si on a $\mathcal{I}^-(f) = \mathcal{I}^+(f)$, les propriétés des bornes supérieure et inférieure entraînent l'existence d'un élément $u \in \mathcal{L}(f)$ et d'un élément $v \in \mathcal{U}(f)$ vérifiant

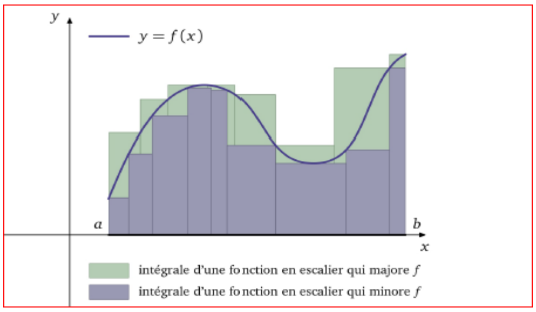
$$u > \mathcal{I}^-(f) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad v < \mathcal{I}^+(f) + \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où $v - u < \varepsilon$, ce qui prouve que f est intégrable. On a donc établi le résultat suivant.

Théorème 1.19

Une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann- intégrable ssi $\mathcal{I}^-(f) = \mathcal{I}^+(f)$.

Notation : L'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ est le nombre réel $\mathcal{I}^-(f) = \mathcal{I}^+(f)$, on le note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.



Remarque 1.20. Toute fonction en escalier sur $[a, b]$ est Riemann intégrable. En effet, si f est en escalier, les ensembles $\mathcal{E}_+(f)$ et $\mathcal{E}_-(f)$ ont en commun l'élément f. On a alors

$$\mathcal{I}^-(f) = \mathcal{I}^+(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Proposition 1.21

Si f est une fonction positive et intégrable sur l'intervalle $[a, b]$, son intégrale est positive (éventuellement nulle).

Démonstration. Puisque f est positive sur $[a, b]$, la fonction nulle appartient à l'ensemble $\mathcal{E}_-(f)$, donc $0 \in \mathcal{L}(f)$, et on a

$$\mathcal{I}^-(f) := \sup \mathcal{L}(f) \geq 0$$

d'où le résultat annoncé.

Exercice 1.22. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

1. Montrer que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $\psi_n, \phi_n \in \mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})$ telles que
$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_n - \phi_n)\, dx < \frac{1}{n}.$$
2. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\, dx.$

1.2.2 Exemples de fonctions intégrables au sens de Riemann

Fonction monotone :

> Proposition 1.23
>
> Toute fonction f monotone sur un intervalle compact $[a,b]$ est intégrable.

Démonstration. Supposons f croissante et considérons une subdivision de $[a,b]$ de la forme $(a, a+h, a+2h, ..., a+nh)$, l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ étant quelconque, et le nombre réel h défini par $a+nh = b$, c'est-à-dire $h = \dfrac{(b-a)}{n}$. Nous définissons deux fonctions ϕ, ψ en escalier sur $[a,b]$ en posant, pour tout x appartenant à $[a+kh, a+(k+1)h[(k = 0, 1, ..., n-1)$:
$$\phi(x) = f(a+kh), \psi(x) = f(a+(k+1)h) \quad \text{et} \quad \phi(b) = \psi(b) = f(b).$$
On a alors $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, et
$$\int_a^b \phi(x)\,(x)\;dx = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh); \quad \int_a^b \psi(x)\,(x)\;dx = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+(k+1)h,$$
d'où
$$\int_a^b [\psi(x) - \phi(x)]\,(x)\;dx = h[f(a+nh) - f(a)] = \frac{(b-a)}{n}[f(b) - f(a)];$$
et pour chaque $\varepsilon > 0$ donné, on peut choisir n assez grand de manière à avoir
$$\frac{(b-a)}{n}[f(b) - f(a)] < \varepsilon;$$
d'où le résultat désiré.

Fonction continue :

Rappel : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite uniformément continue sur I, si $\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0; \forall x, x' \in I$ $, |x - x'| < \eta \Rightarrow \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon.$

Théorème de Heine : f est continue sur un compact $[a,b]$ si, et seulement si, f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Proposition 1.24

Toute fonction f continue sur un intervalle compact $[a, b]$ est intégrable.

Démonstration. Soit f continue sur le compact $[a, b]$, d'après le théorème de Heine la fonction f est uniformément continue sur cet intervalle. Quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$ il existe donc un nombre $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [a, b]$ vérifiant $|x - y| < \eta$, on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Considérons alors une subdivision $(a_0 = a, a_1, ..., a_n = b)$ de $[a, b]$, de pas inférieur η. On obtient deux fonctions ϕ et ψ en escalier sur $[a, b]$ en posant

$$\phi(a_i) = \psi(a_i) = f(a_i) \quad \text{et} \quad \phi(x) = f(a_i) - \varepsilon; \quad \psi(x) = f(a_i) + \varepsilon.$$

pour tout $x \in]a_{i-1}, a_i[\quad (i = 1, ..., n - 1)$. Or la subdivision $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ a été choisie de manière que l'on ait $|f(x) - f(a_i)| < \varepsilon$ pour tout x élément de $[a_{i-1}, a_i]$. On a donc, pour tout $x \in [a, b]$

$$\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

et

$$\int_a^b [\psi(x) - \phi(x)](x)\ dx = \int_a^b 2\varepsilon\, dx = 2\varepsilon(b - a).$$

Le nombre ε étant arbitraire, on conclut que la fonction f est intégrable sur $[a, b]$.

Définition 1.25 (Fonction réglée)**.** Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite réglée si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier ϕ sur $[a, b]$ vérifiant :

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon.$$

En donnant à ε une suite de valeurs tendant vers zéro, on voit immédiatement que cette définition équivaut à la suivante.

Définition 1.26. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite réglée s'il existe une suite de fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.

Remarque 1.27. 1) On dispose d'une caractérisation très utile des fonctions réglées : pour qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ soit réglée, il faut et il suffit que f admette une limite à droite en tout point de $[a, b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a, b]$.
2) Une fonction réglée admet un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuité.

Théorème 1.28

Toute fonction réglée sur un intervalle compact $[a, b]$ est intégrable.

Démonstration. f est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite (φ_n) de fonctions en escalier. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \geq n_0$ on ait

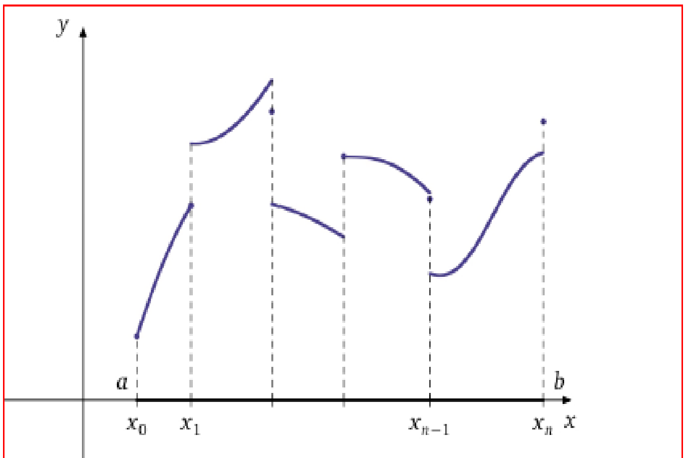
$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b - a)}.$$

Notons u la fonction égale à $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ sur $[a,b]$, et posons $\psi = \varphi_{n_0} + u$ et $\phi = \varphi_{n_0} - u$. Les fonctions ϕ et ψ sont en escalier sur $[a,b]$ et vérifient

$$\phi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b [\psi(x) - \phi(x)]\,(x)\ dx = \varepsilon.$$

On en conclut que f est intégrable sur $[a,b]$.

Définition 1.29 (Fonction continue par morceaux)**.** Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(a_0 = a, a_1, ..., a_n = b)$ de $[a,b]$, telle que, pour tout $i \in \{0, 1..., n-1\}$, f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ et admet une limite finie à droite au point a_i, et une limite finie à gauche au point a_{i+1}.



Fonction continue par morceaux sur un segment.

Exercice 1.30. Montrer que toute fonction continue par morceaux est réglée.

Corollaire 1.31

Toute fonction continue par morceaux sur un intervalle compact $[a,b]$ est intégrable.

Définition 1.32 (Fonction localement intégrable)**.** Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite localement intégrable sur I si f est intégrable sur tout segment inclus dans I.

Exemple 1.33. Toute fonction continue sur I est localement intégrable ; toute fonction monotone sur I est localement intégrable.

Le résultat qui suit est d'une grande utilité en pratique.

Proposition 1.34

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $]a,b[$ et bornée sur $[a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$.

Démonstration. Soit $M > 0$ tel que $|f(x)| < M$ pour tout $x \in [a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel suffisamment petit pour que $\varepsilon < \dfrac{(b-a)}{2}$. On sait que f est intégrable sur $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, donc il existe deux fonctions en escalier φ et μ sur $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ telles que

$$\forall x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon], \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \mu(x) \quad \text{et} \quad \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \mu(x)\, dx \leq \varepsilon.$$

Considérons alors les fonctions définies sur $[a, b]$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [a, a+\varepsilon] \cup]b-\varepsilon, b], \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon], \end{cases}$$

et

$$\eta(x) = \begin{cases} M & \text{si } x \in [a, a+\varepsilon] \cup]b-\varepsilon, b], \\ \mu(x) & \text{si } x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]. \end{cases}$$

Les fonctions ψ et η sont en escalier et vérifient $|f - \psi| \leq \eta$ sur $[a, b]$. De plus,

$$\begin{aligned} \int_a^b \eta(x)\, dx &= \int_a^{a+\varepsilon} M\, dx + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \mu(x)\, dx + \int_{b-\varepsilon}^{b} M\, dx \\ &\leq M\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon = (2M+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci prouve que f est intégrable sur $[a, b]$.

Corollaire 1.35

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée sur $[a, b]$ et continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Remarque 1.36. Si f est une fonction bornée sur $[a, b]$ et continue sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$ alors f est intégrable sur [a,b]. En particulier, si f est continue sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur [a,b].

Exemple : Fonction intégrable non réglée : La fonction f définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

n'est pas réglée puisque les limites à droite et à gauche de zéro n'existent pas mais elle est intégrable car elle est bornée et admet l'origine pour seul point de discontinuité.

Exemple : Fonction non intégrable : La fonction f définie sur $[a, b]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Désignons par (ϕ, ψ) un couple quelconque de fonctions en escalier sur $[a, b]$, vérifiant $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ pour tout $x \in [a, b]$; et soit σ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fois à ϕ et à ψ. Chaque intervalle de σ contient à son intérieur des valeurs rationnelles et des valeurs irrationnelles. À l'intérieur de tout intervalle de σ on a donc $\phi(x) \leq 0$ et $\psi(x) \geq 1$, d'où

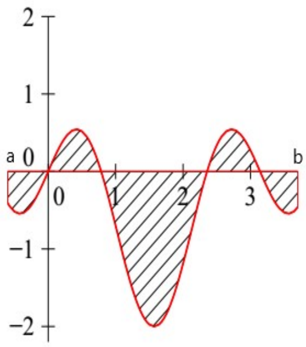
$$\int_a^b [\psi(x) - \phi(x)]\, dx \geq b - a.$$

La fonction f n'est donc pas intégrable.

1.2.3 Interprétation Géométrique

Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a; b]$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

La mesure de l'aire en unité d'aire de la partie hachurée du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et la courbe C est l'intégrale de a à b de la fonction $|f|$. On note $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$ cette aire.



Exercice 1.37. Calculer l'aire de la surface délimitée par la parabole $x \mapsto x^2$, pour $x \in [-1, 1]$.

1.3 Propriétés de l'Intégrale de Riemann

1.3.1 Relation de Chasles

Proposition 1.38

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et c est un point dans $]a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[b, c]$, et on a

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Démonstration. Notons :

$$\mathcal{I}^-(f,[\alpha,\beta]) := \sup\left\{\int_\alpha^\beta \phi(x)\,dx \;/\; \phi\in\mathcal{E}([\alpha,\beta];\mathbb{R}),\ \phi\le f \quad \text{sur } [\alpha,\beta]\right\}$$

et

$$\mathcal{I}^+(f,[\alpha,\beta]) := \inf\left\{\int_\alpha^\beta \psi(x)\,dx \;/\; \psi\in\mathcal{E}([\alpha,\beta];\mathbb{R}),\ \psi\ge f \quad \text{sur } [\alpha,\beta]\right\}.$$

Posons également : $f_1 = f_{|[a,c]}$ et $f_2 = f_{|[c,b]}$.
Soient $\phi,\psi\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telles que $\phi\le f\le\psi$ sur $[a,b]$; et soient

$$\phi_1 := \phi_{|[a,c]}, \psi_1 := \psi_{|[a,c]}, \phi_2 := \phi_{|[c,b]}, \psi_2 := \psi_{|[c,b]}.$$

D'après la proposition (1.15), on a

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = \int_a^c \phi_1(x)\,dx + \int_c^b \phi_2(x)\,dx.$$

De plus,

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \le \mathcal{I}^-(f_1,[a,c]) + \mathcal{I}^-(f_2,[c,b]).$$

En passant au sup sur ϕ, on obtient

$$\mathcal{I}^-(f,[a,b]) \le \mathcal{I}^-(f_1,[a,c]) + \mathcal{I}^-(f_2,[c,b]).$$

De même, on obtient

$$\mathcal{I}^+(f,[a,b]) \le \mathcal{I}^+(f_1,[a,c]) + \mathcal{I}^+(f_2,[c,b]).$$

Mais f étant intégrable sur $[a,b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{I}^-(f,[a,b]) = \mathcal{I}^+(f,[a,b]),$$

donc,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^+(f_1,[a,c]) + \mathcal{I}^+(f_2,[c,b]) &\le \int_a^b f(x)\,dx\\ &\le \mathcal{I}^-(f_1,[a,c]) + \mathcal{I}^-(f_2,[c,b]),\end{aligned}$$

et comme

$$\mathcal{I}^-(f_1,[a,c]) \le \mathcal{I}^+(f_1,[a,c]) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^-(f_2,[c,b] \le \mathcal{I}^+(f_2,[c,b]),$$

alors

$$\mathcal{I}^-(f_1,[a,c]) = \mathcal{I}^+(f_1,[a,c]) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^-(f_2,[c,b] = \mathcal{I}^+(f_2,[c,b]).$$

Donc f_1 est intégrable sur $[a,c]$ et f_2 est intégrable sur $[c,b]$. De plus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f_1(x)\,dx + \int_c^b f_2(x)\,dx.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition.

Exercice résolu 1. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^2 |t-1|\,dt$.

Solution : En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}|t-1|dt &= \int_{-2}^{1}|t-1|\,dt+\int_{1}^{2}|t-1|\,dt\\ &= \int_{-2}^{1}(1-t)\,dt+\int_{1}^{2}(t-1)\,dt\\ &= [t-\frac{t^2}{2}]_{-2}^{1}+[\frac{t^2}{2}-t]_1^2\\ &= 5\end{aligned}$$

1.3.2 Linéarité

Proposition 1.39

Soient f, g deux fonctions intégrables sur un même compact $[a, b]$ et α, β deux réels. Alors, la fonction $\alpha f+\beta g$ est intégrables sur $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$$

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$. Puisque f et g sont intégrables sur $[a, b]$, il existe $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ dans $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que

$$\phi_1\leq f\leq\psi_1 \quad , \quad \phi_2\leq g\leq\psi_2,$$

et

$$\int_a^b[\psi_1(x)-\phi_1(x)]\,dx\leq\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b[\psi_2(x)-\phi_2(x)]\,dx\leq\varepsilon.$$

Or $\phi_1+\phi_2$ et $\psi_1+\psi_2$ sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$ et vérifient : $\phi_1+\phi_2\leq f+g\leq\psi_1+\psi_2$ ainsi que

$$\int_a^b[(\psi_1+\psi_2)(x)-(\phi_1+\phi_2)(x)]\,dx\leq 2\varepsilon,$$

donc $f+g$ est intégrable sur $[a, b]$.
D'après le lemme (1.13), on a

$$\int_a^b[\phi_1(x)+\phi_2(x)]\,dx=\int_a^b\phi_1(x)\,dx+\int_a^b\phi_2(x)\,dx,$$

d'où

$$\int_a^b[\phi_1(x)+\phi_2(x)]\,dx\leq\mathcal{I}^-(f)+\mathcal{I}^-(g).$$

Or $\phi_1+\phi_2\leq f+g$, et en passant au sup sur $\phi:=\phi_1+\phi_2$, il vient

$$\mathcal{I}^-(f+g)\leq\mathcal{I}^-(f)+\mathcal{I}^-(g).$$

De même, on obtient

$$\mathcal{I}^+(f+g)\geq\mathcal{I}^+(f)+\mathcal{I}^+(g).$$

Comme f et g sont intégrables sur $[a, b]$, on a

$$\mathcal{I}^-(f) = \mathcal{I}^+(f) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^-(g) = \mathcal{I}^+(g) = \int_a^b g(x)\,dx$$

et de plus

$$\mathcal{I}^-(f+g) \leq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

et

$$\mathcal{I}^+(f+g) \geq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Comme $f + g$ est intégrable sur $[a, b]$, on a

$$\mathcal{I}^-(f+g) = \mathcal{I}^+(f+g) = \int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx,$$

et en reportant dans ce qui précède on déduit que

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Montrons maintenat que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, la fonction λf est intégrable sur $[a, b]$ et $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe ϕ, ψ dans $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que

$$\phi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b [\psi(x) - \phi(x)]\,dx \leq \varepsilon.$$

Puisque $\lambda\phi \leq \lambda f \leq \lambda\psi$ et

$$\int_a^b [\lambda\psi(x) - \lambda\phi(x)]\,dx = \lambda \int_a^b [\psi(x) - \phi(x)]\,dx \leq \lambda\varepsilon.$$

Alors λf est intégrable sur $[a, b]$. D'autre part, on a

$$\int_a^b \lambda\phi(x)\,dx = \lambda \int_a^b \phi(x)\,dx \leq \lambda\mathcal{I}^-(f),$$

en passant au sup sur $\lambda\phi$, il vient : $\mathcal{I}^-(\lambda f) \leq \lambda\mathcal{I}^-(f)$. En procédant de même avec ψ, on obtient : $\mathcal{I}^+(\lambda f) \geq \lambda\mathcal{I}^+(f)$. Donc,

$$\lambda \in \mathbb{R}^+, \int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Supposons à présent que $\lambda \in \mathbb{R}^-$, et posons $\mu = -\lambda$. On alors $\mu \geq 0$, et d'après ce qui précède, μf est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\lambda \in \mathbb{R}^+, \int_a^b \mu f(x)\,dx = \mu \int_a^b f(x)\,dx.$$

Or si g est intégrable, alors $-g$ l'est aussi. En effet, si ϕ et ψ sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$ vérifiant

$$\phi \leq g \leq \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b [\psi(x) - \phi(x)]\,dx \leq \varepsilon,$$

alors $-\psi \leq -g \leq -\phi$ et

$$\int_a^b [(-\phi)(x) - (-\psi)(x)]\, dx \leq \lambda\varepsilon.$$

d'où l'intégrabilité de $-g$. D'autre part,

$$0 = \int_a^b [g(x) + (-g(x))]\, dx = \int_a^b g(x)\, dx + \int_a^b (-g(x))\, dx,$$

d'où

$$\int_a^b -g(x)\, dx = -\int_a^b g(x)\, dx.$$

En appliquant cela à$g = \mu f$, on obtient le résultat désiré.

1.3.3 Intégrale de Riemann et inégalités

Proposition 1.40 (Croissance)

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors on a

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{1.1}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition (1.21) à la fonction intégrale positive $g - f$.

Remarque 1.41. Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, et si leurs valeurs ne diffèrent qu'en un nombre fini de points de $[a, b]$, alors leurs intégrales sont égales ; en effet, leur différence est une fonction en escalier nulle sauf en un nombre fini de points, son intégrale est donc nulle.

Cette remarque montre que l'inégalité (1.1) peut se réduire à une égalité sans que l'on ait $f = g$. Le théorème fondamental suivant montre cependant que ce n'est pas possible si f et g sont continues.

Théorème 1.42

L'intégrale d'une fonction f positive et continue sur $[a, b]$ ne peut être nulle que si cette fonction est partout nulle.

Démonstration. Si f n'est pas la fonction nulle, il existe un point x_0 de $[a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Par continuité de f, il existe des réels $h > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $[x_0 - h, x_0 + h]$ soit inclus dans $[a, b]$ et $f(x) > \alpha$ pour tout $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Considérons alors la fonction en escalier φ sur $[a, b]$ donnée par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x \in [x_0 - h, x_0 + h], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a évidemment $f \geq \varphi$ sur $[a,b]$, d'où

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b \varphi(x)\,dx \geq 2h\alpha > 0.$$

D'où le théorème.

Corollaire 1.43

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

1. Si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$.
2. Si f n'est pas la fonction nulle sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt > 0$.

Proposition 1.44

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$. Alors la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est intégrable sur $[a,b]$ et on a

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Démonstration. on a $|f| = f^+ + f^-$ où f^+ et f^- sont des fonctions positives définies sur $[a,b]$ par

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{si } f(x) \leq 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Il suffit donc de montrer que f^- et f^+ sont intégrables sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant intégrable sur $[a,b]$, on peut trouver ϕ, ψ dans $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telles que

$$\phi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b [\psi(x) - \phi(x)]\,dx \leq \varepsilon.$$

En prenant $\phi^-, \psi^-, \phi^+, \psi^+$ qui sont des éléments de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, on a

$$\phi^- \leq f^- \leq \psi^- \quad \text{et} \quad \phi^+ \leq f^+ \leq \psi^+,$$

ainsi que

$$\int_a^b [\psi^-(x) - \phi^-(x)]\,dx \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_a^b [\psi^+(x) - \phi^+(x)]\,dx \leq \varepsilon.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_a^b [\psi(x) - \phi(x)]\,dx &= \int_a^b [\psi^+(x) - \psi^-(x)] - [\phi^+(x) - \phi^-(x)]\,dx \\ &= \int_a^b [\psi^+(x) - \phi^+(x)]\,dx + \int_a^b [\phi^-(x) - \psi^-(x)]\,dx. \end{aligned}$$

et la démonstration se termine comme pour le cas des fonctions en escalier.

Corollaire 1.45

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ telle que pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M$ où $M \in \mathbb{R}^+$. On a alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a).$$

Proposition 1.46

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, leur produit fg est intégrable sur $[a,b]$.

Démonstration. Supposons d'abord f et g positives sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ dans $\mathcal{E}([a,b]\,,\mathbb{R})$ telles que

$$0 \leq \phi_1 \leq f \leq \psi_1 \leq M \quad \text{et} \quad \int_a^b [\psi_1(x) - \phi_1(x)]\,dx \leq \varepsilon$$

ainsi que

$$0 \leq \phi_2 \leq g \leq \psi_2 \leq M \quad \text{et} \quad \int_a^b [\psi_2(x) - \phi_2(x)]\,dx \leq \varepsilon$$

où M est un majorant commun à f et g. On a alors

$$0 \leq \phi_1\phi_2 \leq fg \leq \psi_1\psi_2$$

avec $\phi_1\phi_2$ et $\psi_1\psi_2$ sont en escalier sur $[a,b]$ et vérifient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b [\psi_1(x)\psi_2(x) - \phi_1(x)\phi_2(x)]\,dx &= \int_a^b \Big[[\psi_1(x) - \phi_1(x)]\psi_2(x) + [\psi_2(x) - \phi_2(x)]\phi_1(x)\Big]\,dx \\
&\leq \int_a^b M\Big[[\psi_1(x) - \phi_1(x)]\Big] + M\Big[[\psi_2(x) - \phi_2(x)]\Big]\,dx \\
&\leq M\int_a^b \Big[[\psi_1(x) - \phi_1(x)]\Big]\,dx + \int_a^b \Big[[\psi_2(x) - \phi_2(x)]\Big]\,dx \\
&\leq 2M\varepsilon.
\end{aligned}$$

On a donc établi la proposition dans le cas où f et g sont positives. Si f et g sont quelconques alors, en écrivant $f = f^+ - f^-$ et $g = g^+ - g^-$, on obtient

$$fg = f^+g^+ - f^-g^+ - f^+g^- + f^-g^-.$$

Comme f et g sont intégrables sur $[a,b]$, f^+, f^-, g^+, g^- le sont aussi, et d'après le cas étudié précédemment, les fonctions f^+g^+, f^-g^+, f^+g^- et f^-g^- sont intégrables. Comme toute somme de fonctions intégrables est intégrable, on conclut que fg est intégrable sur $[a,b]$.

Proposition 1.47 (Inégalité de Schwarz)

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Alors

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2\,dx}\sqrt{\int_a^b (g(x))^2\,dx}.$$

Démonstration. Pour tout réel λ, de $(\lambda f+g)^2 = \lambda^2 f^2 + 2\lambda fg + g^2$ on déduit

$$\int_a^b (\lambda f(x)+g(x))^2\,dx = \lambda^2\int_a^b (f(x))^2\,dx + 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b (g(x))^2\,dx.$$

Soit $P : \lambda \mapsto \int_a^b (\lambda f+g)^2$. C'est une fonction polynôme qui ne prend que des valeurs positives.
le polynôme réel P est de degré 2. Puisqu'il ne prend que des valeurs positives, son discriminent (réduit) est négatif ou nul :

$$\Delta' = \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right) \leq 0$$

d'où l'inégalité désirée.

Corollaire 1.48 (Inégalité de Minkowski)

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Alors

$$\sqrt{\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)^2\,dx} \leq \sqrt{\int_a^b \Big(f(x)\Big)^2\,dx} + \sqrt{\int_a^b \Big(g(x)\Big)^2\,dx}.$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)^2\,dx &= \int_a^b \Big(f(x)\Big)^2\,dx + 2\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b \Big(g(x)\Big)^2\,dx\\ &\leq \int_a^b \Big(f(x)\Big)^2\,dx + 2\sqrt{\int_a^b \Big(f(x)\Big)^2\,dx}\sqrt{\int_a^b \Big(g(x)\Big)^2\,dx} + \int_a^b \Big(g(x)\Big)^2\,dx\\ &\leq \left(\sqrt{\int_a^b \Big(f(x)\Big)^2\,dx} + \sqrt{\int_a^b \Big(g(x)\Big)^2\,dx}\right)^2.\end{aligned}$$

ce qui n'est autre que l'inégalité de Minkowski.

Exercice 1.49.

1. Justifier que $(\forall k \geq 1)$, $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$. En déduire la nature de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\geq 1}$.
2. Montrer par intégration successives que : $\forall t>0,\ t-\dfrac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t$, et calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{\sin t - t}{t^3}$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{\cos(xt)\arctan(t)}{x^2+t}\,dt = 0$.

1.3.4 Formule de la Moyenne

Théorème 1.50 (Inégalité de la Moyenne)

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Si g est positive sur $[a, b]$ et si $m \leq f \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$m \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx. \tag{1.2}$$

Démonstration. On a $m \leq f \leq M$ et $g \geq 0$ donc $mg \leq fg \leq Mg$, par linéarité et croissance de l'intégrale, on obtient (1.2).

Théorème 1.51 (Première Formule de la Moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx. \tag{1.3}$$

Démonstration. Supposons que f est continue sur $[a, b]$.
$\star$ Si $\int_a^b g(x)\, dx = 0$, les inégalités (1.2) donnent $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, et l'égalité (1.3) est alors vraie pour tout $c \in [a, b]$.
$\star$ Si $\int_a^b g(x)\, dx \neq 0$, alors

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\, dx \right) \left(\int_a^b g(x)\, dx \right)^{-1} \in [m, M],$$

et comme f est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un point $c \in [a, b]$ tel que (1.3) soit satisfaite.

Remarque 1.52. La formule de la moyenne est vraie si g est de signe constant sur $[a, b]$, on utilise $fg = (-f)(-g)$ pour se ramener au cas d'une fonction positive.

En appliquant le théorème précédent à la fonction g constante égale à 1 sur $[a, b]$, on obtient aussitôt :

Corollaire 1.53

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et si on a $m \leq f \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \leq M.$$

Corollaire 1.54

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = f(c).$$

Définition 1.55. On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le nombre réel μ_f défini par

$$\mu_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Exercice résolu 2. On admet que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

Prouver que pour entier naturel n, $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$, puis en déduire que la suite (I_n) est convergente.

Solution : Soit n un entier naturel. Puisque f est décroissant sur $[0, +\infty[$, elle est sur $[n, n+1]$. Ainsi, pour tout réel $t \in [n, n+1]$, on a

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n).$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a alors

$$f(n+1)(n+1-n) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)(n+1-n).$$

soit

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$$

Constatons enfin que

$$\lim_{n\to+\infty} f(n+1) = \lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

Par le théorème d'encadrement, on déduit que la suite (I_n) est convergente, et que sa limite vaut 0.

Exercice résolu 3. :Calculer la limite de $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{\cos t}{t}\,dt$ lorsque a tend vers 0.

Solution : Pour $a \neq 0$, $\dfrac{1}{t}$ est de signe constant sur $[a, 3a]$. La première formule de la moyenne nous montre l'existence de $c \in [a, 3a]$ tel que $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{\cos t}{t}\,dt = \cos c \int_a^{3a} \frac{dt}{t}$.

En notant que $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{dt}{t} = \ln|3a| - \ln|a| = \ln 3$, il vient $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{\cos t}{t}\,dt = (\ln 3)\cos c$, avec $\cos c \in [\cos(3a), \cos a]$ et $\lim_{a\to0} \cos a = \lim_{a\to0} \cos(3a) = 1$, on obtient $\displaystyle\lim_{a\to0}\int_a^{3a} \frac{\cos t}{t}\,dt = \ln 3$.

Exercice 1.56. Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to1}\int_a^{a^2} \frac{dt}{\ln t} = \ln 2$.

1.3.5 Sommes de Riemann

Définition 1.57. Soit f une fonction bornée sur un intervalle $[a, b]$ et soit $\sigma = (a_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision de $[a, b]$ et $\xi = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$ tels que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$. On appelle somme de Riemann de f relative à (σ, ξ), le nombre $S(f, \sigma, \xi)$ défini par

$$S(f, \sigma, \xi) := \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i).$$

Remarque 1.58. Lorsque f est une fonction en escalier sur $[a, b]$ et que σ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f on a exactement, avec $\xi_i \in]a_{i-1}, a_i[$:

$$S(f, \sigma, \xi) := \int_a^b f(x)\, dx.$$

Théorème 1.59

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soient $\sigma = (a_i)_{0\le i\le n}$ une subdivision de $[a, b]$ et $(\xi_i)_{0\le i\le n}$ une famille de points tels que $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Alors

$$\lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i) = \int_a^b f(x)\, dx, \tag{1.4}$$

où h désigne le pas de la subdivision σ. En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1.5}$$

Démonstration. Puisque f est continue sur le compact $[a, b]$, elle y est uniformément continue d'après le théorème de Heine, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il donc un réel $\eta > 0$ tel que, pour tous

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |x - y| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

On suppose que le pas h de la subdivision est tel que $0 < h < \eta$. On a alors $a_i - a_{i-1} < \eta$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. D'où

$$\forall x \in [a_{i-1}, a_i], \quad |x - \xi_i| \le a_i - a_{i-1} < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i)\right| &\le \left|\sum_{i=1}^{n} \left[\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\, dx - (a_i - a_{i-1}) f(\xi_i)\right]\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{a_{i-1}}^{a_i} [f(x) - f(\xi_i)]\, dx\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f(x) - f(\xi_i)|\, dx \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} (a_i - a_{i-1}) \le \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui établit (1.4).
La limite (1.5) s'obtient en prenant dans (1.4) $a_i = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et $\xi = a_i$.

Remarque 1.60. Le théorème ci-dessus est encore vrai si on remplace f continue sur $[a,b]$ par f continue par morceaux sur $[a,b]$. En pratique, il permet notamment le calcul de la limite de certaines suites.

Exercice résolu 4. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ est intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Solution : En utilisant les sommes de Riemann, on sait que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ est la limite quand $(n \to +\infty)$ de $S_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$. Or $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}$.
Alors $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

Exercice résolu 5. Calculer la limite de la suite $S_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+....+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Solution : On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$, où f est la fonction définie et continue sur $[1,0]$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
En prenant $a = 0$ et $b = 1$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$.

Exercice 1.61. Calculer la limite des suites de terme géneral suivant :

$$u_n = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}, \quad v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{\frac{-k}{n}}, \quad w_n = \frac{1^3+2^3+....+n^3}{n^4},$$

$$x_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\right)^{\frac{1}{n}}, \quad y_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k^2-k}, \quad z_n = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}.$$

1.3.6 Notations et extension de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Dans tout ce qui précède nous avons défini l'intégrale de f sur $[a,b]$ pour tout couple (a,b) de nombres réels vérifiant $a < b$. En fait, on peut s'affranchir de cette condition sur (a,b) en adoptant la définition suivante.

Définition 1.62. Si $a > b$ et si f est une fonction intégrable sur $[b,a]$, on pose

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Si $a = b$, on pose

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0.$$

Ces conventions permettent d'obtenir une version plus générale de la relation de Chasles.

Théorème 1.63 (Relation de Chasles)

Soient a, b, c trois nombres réels quelconques. Si f est une fonction intégrable sur l'intervalle compact $[\min(a, b, c), \max(a, b, c)]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. – Le cas où $a < c < b$ a fait l'objet de la oroposition (1.38).
– Supposons maintenent que $a < b < c$. On a alors

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

d'où

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

– Le cas où $b < a < c$ se traite comme le précédent.
– Enfin, si deux des trois points a, b, c sont égaux, la relation à établir est évidente.

1.4 Intégrale Indéfinie et Primitive

Dans toute cette section, a et b sont deux nombres réels vérifiant $a < b$. Si f est une fonction intégrable sur l'intervalle compact $[a, b]$, on sait que, pour tout $t \in [a, b]$ fixé, f est intégrable sur l'intervalle $[a, t]$.

Définition 1.64. Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et soit t_0 un point de $[a, b]$. On appelle intégrale indéfinie de f, la fonction

$$F : \quad [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \int_{t_0}^t f(x)\,dx.$$

Remarque 1.65. Deux intégrales indéfinies de f diffèrent d'une constante additive puisque, d'après la relation de Chasles,

$$\int_{t_0}^t f(x)\,dx - \int_{t_1}^t f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f(x)\,dx = cte.$$

Proposition 1.66

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable . Alors, la fonction

$$F : \quad [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \int_a^t f(x)\,dx.$$

est lipschitzienne, de rapport $k = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$, donc uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration. Par définition du nombre k, on a $|f(x)| < k$ pour tout $x \in [a, b]$. Quels que soient $u, v \in [a, b]$, par application du corollaire (1.45), on a alors

$$|F(u) - F(v)| \leq \left| \int_u^v f(x)\, dx \right| \leq k|u - v|,$$

d'où le résultat annoncé.

Notons par $f(t^+)$ (resp. $f(t^-)$) la limite à droite (resp. à gauche) de f au point t.

Proposition 1.67

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable . Alors, la fonction

$$F : \quad [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \int_a^t f(x)\, dx.$$

admet $f(t^+)$ pour dérivée à droite (resp. $f(t^-)$ pour dérivée à gauche) en tout point où cette limite existe.

Démonstration. Supposons que la limite $f(t^+) := \lim_{u \to t^+} f(u)$ existe.
Quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$ donné, il existe un nombre $h > 0$ tel que les inégalités $t < u < t + h$ entraînent $|f(u) - f(t^+)| < \varepsilon$. Pour tout $u \in [t, t + h]$, on a alors

$$\left| \int_t^u (f(x) - f(t^+))\, dx \right| \leq \varepsilon(u - t), \tag{1.6}$$

en effet l'inégalité $|f(x) - f(t^+)| < \varepsilon$ est vérifiée pour tout $x \in [t, u]$, sauf peut-être au point $x = t$; mais on ne modifie pas la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_u^v f(x)\, dx$ en modifiant la valeur de f au seul point t et en supposant que l'on a $f(t) = f(t^+)$.
L'inégalité (1.6) résulte donc du corollaire (1.45) et elle équivaut à

$$|F(u) - F(t) - (u - t)f(t^+)| \leq \varepsilon(u - t),$$

ou encore, pour $u \in]t, t + h]$:

$$\left| \frac{F(u) - F(t)}{u - t} - f(t^+) \right| \leq \varepsilon.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, cela montre bien que $\displaystyle\lim_{u \to t^+} \frac{F(u) - F(t)}{u - t} = f(t^+)$. En d'autres termes, on a : $F'_d(t) = f(t^+)$. On démontrerait de même que F admet $f(t^-)$ pour dérivée à gauche au point t lorsque cette limite existe.

Corollaire 1.68

Si f est une fonction intégrable sur le compact $[a, b]$, l'intégrale indéfinie :

$$F : \quad [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \int_a^t f(x)\, dx$$

admet $f(t)$ pour dérivée en tout point de $[a, b]$ où f est continue.

Définition 1.69. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie sur I telle que F est dérivable et $F'(t) = f(t)$ pour tout $t \in I$.

Théorème 1.70 (Théorème Fondamental de l'Analyse)

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale indéfinie :

$$F : \quad [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \int_a^t f(x)\,dx$$

est une primitive de f sur $[a, b]$; et si G est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a). \tag{1.7}$$

Démonstration. La première asserion est une conséquence immédiate du corollaire (1.68). La formule (1.7) résulte du fait que la différence $G - F$ des deux primitives de f est constante sur $[a, b]$. On a donc $G(b) - F(b) = G(a) - F(a)$, d'où l'on déduit l'égalité annoncée : $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.

Théorème 1.71 (Existence de Primitives)

Toute fonction continue sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$, admet une infinité de primitives.

Démonstration. Si l'intervalle I est compact, le résultat annoncé est une conséquence du théorème précédent. Sinon, on considère un point quelconque c de I, et on observe que l'intégrale indéfinie donnée par $F : \quad t \mapsto \int_a^t f(x)\,dx$ est une primitive de f sur $[a, b]$.

Proposition 1.72

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Soit a appartenant à I et b un réel. Alors il existe une et une seule primitive G telle que $G(a) = b$.

Démonstration. On a vu qu'il existe une constante k telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$. D'où $G(a) = b$ si et seulement si $F(a) + k = b$ c'est à dire $k = b - F(a)$.

Exemple 1.73. : Il existe une unique primitive F de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$. En effet, les primitives de $x \mapsto x$ sont de la forme $x \mapsto \frac{x^2}{2} + k$ où k est un réel. $F(1) = 2$ impose donc $\frac{1}{2} + k = 2$ d'où $k = \frac{3}{2}$.

Remarque 1.74. 1) Dans le théorème ci-dessus, l'hypothèse de continuité est cruciale. Considérons en effet la fonction f définie sur $[-1,1]$ par

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x\in[-1,0[,\\ 0 & \text{si } x=0,\\ 1 & \text{si } x\in]0,1].\end{cases}$$

On a alors

$$F(x):=\int_0^t f(x)\,dx=\begin{cases}-t & \text{si } x\in[-1,0[,\\ 0 & \text{si } x=0,\\ t & \text{si } x\in]0,1].\end{cases}$$

Donc $F(t)=|t|$ pour tout $t\in[-1,1]$. Comme F n'est pas dérivable en 0, elle ne peut être une primitive de f sur $[-1,1]$.

2) Il existe des fonctions f non Riemann-intégrables (et donc a fortiori non continues) admettant des primitives. Ainsi, la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos(\dfrac{1}{x})+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}\sin(\dfrac{1}{x}) & \text{si } x\in]0,1],\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

admet pour primitive sur $[0,1]$ la fonction F définie par

$$F(x)=\begin{cases}x^{\frac{3}{2}}\sin(\dfrac{1}{x}) & \text{si } x\in]0,1],\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Or la fonction f n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$ puisqu'elle n'est pas bornée vu que

$$f(\frac{1}{2\pi n})=\sqrt{2\pi n}\to+\infty \quad \text{lorsque} \quad n\to+\infty.$$

Théorème 1.75

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. Alors, il existe une et une seule primitive de f qui s'annule en $a\in I$, elle est donnée par

$$F:\quad I\to\mathbb{R},\qquad t\mapsto\int_a^t f(x)\,dx.$$

Toutes les autres primitives de f sur I se déduisent par addition d'une constante.

Démonstration. Découle du théorème précédent. Il suffit en effet de prendre un intervalle fermé borné inclus dans I et contenant a.

Théorème 1.76 (Deuxième formule de la moyenne)

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. On suppose que f est positive et décroissante. Il existe alors un point c de $[a,b]$ tel que l'on ait

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a^+)\int_a^c g(x)\,dx.$$

Démonstration. Exercice.

1.5 Méthode d'intégration, recherche primitive

On donne dans ce qui suit des méthodes de calcul des primitives d'une fonction f.

1.5.1 Primitives des Fonctions Usuelles

On rappelle que, si f est continue sur un intervalle I, elle possède une primitive F dans cet intervalle. L'intégrale de f sur un intervalle $[a,b]$ inclus dans I est donnée par la formule :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Formulaire de primitives usuelles :

1. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + \text{cte}$
2. $\displaystyle\int u'(x)e^{u(x)}\,dx = e^{u(x)} + \text{cte}$
3. $\displaystyle\int u'(x)u^{\alpha}(x)\,dx = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + \text{cte}, \quad \alpha \neq -1$
4. $\displaystyle\int u'(x)\cos(u(x))\,dx = \sin(u(x)) + \text{cte}$
5. $\displaystyle\int u'(x)\sin(u(x))\,dx = -\cos(u(x)) + \text{cte}$
6. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \arctan(u(x)) + \text{cte}$
7. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}\,dx = \arcsin(u(x)) + \text{cte}$
8. $\displaystyle\int \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}\,dx = \arccos(u(x)) + \text{cte}$

Exercice 1.77. Calculer les intégrales ou primitives suivantes :

$$A = \int_1^e \frac{(\ln t)^2}{t}\,dt, \quad B = \int_0^1 \frac{e^t+1}{e^t+t}\,dt, \quad C = \int_0^x (2t+1)e^{t^2+t+2}\,dt \quad D = \int_1^x \frac{\cos(\frac{1}{t})}{t^2}\,dt,$$

$$E = \int_0^x \frac{\tan^3(3x)}{\cos^2(3x)}\,dt \quad F = \int_0^x \frac{t}{t+1}\,dt, \quad G = \int_0^2 \left|t^2 - t\right|\,dt, \quad F = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tant\,dt.$$

1.5.2 Intégration par Parties

Théorème 1.78

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Démonstration. On a : $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ donc

$$\int_a^b (uv)'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Exemple 1.79. : Calculons $\int_1^x \ln(t)\,dt$.

On pose $u(t) = ln(t)$ et $v'(t) = 1$, donc $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$.

Par conséquent, $\int_1^x ln(t)\,dx = \Big[tln(t)\Big]_1^x - \int_1^x dx = x\ln x - x + 1$.

Exercice 1.80. En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_1^e t^n \ln(t)\,dt, \quad B = \int_0^1 t^3 e^{t^2}\,dt, \quad C = \int_0^\pi e^t \cos(2t)\,dt, \quad D = \int_1^e t(\ln t)^2\,dt.$

1.5.3 Intégration par Changement de Variables

Théorème 1.81

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une fonction de classe C^1 avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

La transformation $x = \varphi(t)$ s'appelle changement de variable.

Démonstration. Si F est une primitive de f alors

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Donc

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (F\circ\varphi)'(t)\,dt = [(F\circ\varphi)(t)]_\alpha^\beta = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarque 1.82. On doit effectuer les trois substitutions suivantes :

1. $x = \varphi(t)$,
2. $dx = \varphi'(t)dt$,

3. On change les bornes d'intégration.

Remarque 1.83. Si F est une primitive de f alors

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C, \quad C \in R.$$

Exemple 1.84. Soit à calculer $\int_{-\sqrt{\pi/2}}^{2\sqrt{\pi/2}} 2t\cos(t^2)\,dt$. On choisit le changement de variable $\varphi(t) = t^2$, et donc $\varphi'(t) = 2t$ avec t variant de $-\sqrt{\pi/2}$ à $2\sqrt{\pi/2}$. Par conséquent, $\varphi(t)$ varie de $\pi/2$ à 2π (φ est de classe C^1 et cos est bien continue sur $\varphi\left(\left[-\sqrt{\pi/2}, 2\sqrt{\pi/2}\right]\right) = [0, 2\pi]$) :

$$\int_{-\sqrt{\pi/2}}^{2\sqrt{\pi/2}} 2t\cos(t^2)\,dt = \int_{-\sqrt{\pi/2}}^{2\sqrt{\pi/2}} \varphi'(t)\cos(\varphi)\,dt = \int_{\pi/2}^{2\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_{\pi/2}^{2\pi} = 0 - 1 = -1.$$

Exercice résolu 6. Calculer $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$ et $\int \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$

Solution : Pour la première intégrale, on pose $t = \sin(x)$ donc $dt = \cos(x)\,dx$. Ainsi
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$
Pour la deuxième intégrale, on effectue le changement de variable suivant : $t = \cos(x)$ d'où $dt = -\sin(x)\,dx$ et donc on a : $J = \int \frac{-dt}{1+t^2} = -\arctan(t) + c = -\arctan(\cos(x)) + c.$

Exercice 1.85. En utilisant l'intégration par changement de variable, calculer les primitives suivantes :

$$F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}, G(x) = \int \frac{1}{t(t+1)}\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)dt, H(x) = \int \frac{\cos(x)}{\sin^2 x + 4\sin x + 13}\,dx.$$

Exercice 1.86. Calculer la primitive $F(x) = \int \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$, poser $y = x^2$.

Proposition 1.87

Soit $a > 0$ et soit f une fonction continue sur $[-a, a]$.

1. Si f est paire, alors on a $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt.$
2. Si f est impaire, alors on a $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0.$

Exemple 1.88. $\int_{-1}^{1} \frac{e^t - e^{-t}}{\ln(1+t^2)}\,dt = 0$ et $\int_{-2}^{2} |t|\,dt = 2\int_0^2 t\,dt = 2.$

1.5.4 Intégrale des Fonctions Rationnelles

Pour intégrer une fonction rationnelle de la forme $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont deux polynômes réels, on effectue la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[x]$ et puis on intégre chaque élément obtenu ; c'est à dire la partie entière, les éléments de première espèce et de seconde espèce suivants :

— **Calcul de** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n}$, on a :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \text{cte} & \text{si } n \neq 1, \\ \ln|x-a| + \text{cte} & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

— **Calcul de** $\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^n}\,dx$, **avec** $b^2-4c<0$.

On écrit x^2+bx+c sous la forme $(x-p)^2+q^2$ $(q \neq 0)$ et on fait le changement de variable $x = p+qt$. On obtient

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \alpha' \int \frac{t}{(t^2+1)^n}\,dt + \beta' \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$$

On pose $I_n = \displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)^n}\,dt$ et $J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$.

Calcul de I_n :

$$I_n = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^n}\,dt = \begin{cases} \dfrac{-1}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \text{cte} & \text{si } n \neq 1, \\ \dfrac{1}{2}\ln(t^2+1) + \text{cte} & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Calcul de J_n :

Pour $n=1$, $\quad J_1 = \displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + \text{cte}.$

Maintenant on va calculer J_{n+1} en fonction de J_n par une intégration par parties. Pour $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} J_n &= \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt = \int \frac{1}{(t^2+1)^n}(t)'\,dt \\ &= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right] + 2n\int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt \\ &= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right] + 2n\Big(\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt - \int \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt\Big) \\ &= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right] + 2n\Big(J_n - J_{n+1}\Big) \end{aligned}$$

Donc,

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}J_n + \frac{1}{2n}\left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right], \qquad n \geq 2.$$

Exercice résolu 7. Calculer $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-x-2}\,dx$

Solution : On a $\deg(x^3+1) > \deg(x^2-x-2)$. On effectue la division euclidienne de x^3+1 par x^2-x-2, on obtient

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x-2)+3x+3$$

D'où

$$\frac{x^3+1}{x^2-x-2} = x+1+\frac{3x+3}{x^2-x-2}.$$

Comme le polynôme x^2-x-2 a deux racines -1 et 2, alors

$$\frac{x^3+1}{x^2-x-2} = x+1+\frac{3x+3}{(x+1)(x-2)} = x+1+\frac{3}{x-2}.$$

Donc,

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-x-2}\,dx = \frac{x^2}{2}+x+3\ln|x-2|+\text{cte}.$$

Exercice résolu 8. Calculer $\displaystyle\int \frac{x-7}{(x^2+4x+13)^2}\,dx$

Solution : On a $\deg(x-7) < \deg(x^2+4x+13)$. Le polynôme $x^2+4x+13$ n'a pas de racines réelles car $\Delta < 0$.
On écrit $x^2+4x+13$ sous la forme $(x-p)^2+q^2$. Un simple calcul donne
$x^2+4x+13 = (x+2)^2+3^2$, on fait le changement de variable $x = 3t-2$, alors

$$\begin{aligned}\int \frac{x-7}{(x^2+4x+13)^2}\,dx = \int \frac{x-7}{((x+2)^2+3^2)^2}\,dx &= \frac{1}{9}\int \frac{t-3}{(t^2+1)^2}\,dt\\ &=\frac{1}{9}\int \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt\end{aligned}$$

On a

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{t^2+1}\right] + \text{cte}.$$

Pour calculer $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$, on calcule $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$ en utilisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}(t)'\,dt = \left[\frac{t}{t^2+1}\right] + 2\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt\\ =\left[\frac{t}{t^2+1}\right] + 2\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt - 2\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt\\ =\left[\frac{t}{t^2+1}\right] + 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt.\end{aligned}$$

Donc,

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^2+1}\right] + \frac{1}{2}\arctan t + \text{cte}.$$

On remplace t par $\dfrac{x+2}{3}$, on obtient

$$\int \frac{x-7}{(x^2+4x+13)^2}\,dx = \frac{-x-3}{2(x^2+4x+13)} - \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) + \text{cte}.$$

1.5.5 Applications

Soit R une fonction rationnelle. Les intégrales suivantes se ramènent aux intégrales des fonctions rationnelles.

1 - Intégrale de la forme $\displaystyle\int R(e^x)\,dx$:

On pose $t = e^x$ alors $x = \ln t$ et $dx = \dfrac{1}{t}dt$. On a donc,

$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt.$$

Exemple 1.89. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - e^{3x}}{1+e^x}\,dx = \int_1^e \frac{\frac{t-t^3}{1+t}}{t}\,dt = \ldots$

2 - Intégrale de la forme $\int R(\cos x)\sin x\, dx$:

On pose $t = \cos x$, alors $dt = -\sin x\, dx$, donc $\int R(\cos x)\sin x\, dx = -\int R(t)\, dt$.

Ou bien, de $t = \cos x$ on a $x = \arccos t$, $dx = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ et $\sin x = \sqrt{1-t^2}$. Parconséquent,

$$\int R(\cos x)\sin x\, dx = -\int R(t)\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = -\int R(t)\, dt.$$

Exemple 1.90. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)\sin(x)}{\cos^2(x)+\cos(x)+2}\, dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{t}{t^2+t+2}\, dt = \ldots\cdot$

3 - Intégrale de la forme $\int R(\sin x)\cos x\, dx$:

On pose $t = \sin x$, alors $dt = \cos x\, dx$, donc $\int R(\sin x)\cos x\, dx = \int R(t)\, dt$.

Ou bien, de $t = \sin x$ on a $x = \arcsin t$, $dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ et $\cos x = \sqrt{1-t^2}$. D'où,

$$\int R(\sin x)\cos x\, dx = \int R(t)\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int R(t)\, dt.$$

Exemple 1.91. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)\cos(x)}{\sin^2(x)+3}\, dx = \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+3}\, dt = \ldots\cdot$

4 - Intégrale de la forme $\int R(\tan x)\, dx$:

On pose $t = \tan x$, alors $x = \arctan t$, $dx = \dfrac{1}{1+t^2}\, dt$, $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ et $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. On a donc,

$$\int R(\tan x)\, dx = \int \frac{R(t)}{1+t^2}\, dt.$$

Exemple 1.92. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)+1}{\tan^2(x)+1}\, dx = \int_0^1 \frac{t+1}{(t^2+1)^2}\, dt = \ldots\cdot$

5 - Intégrale de la forme $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ (R est une fonction à deux variables) :

Pour calculer ce type de primitives, deux cas se présentent :

1) $R(x, y)$ est un polynôme.

Dans ce cas, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et le calcul de ses primitives se ramène à celui de la fonction $x \mapsto \sin^p x \cos^q x$ où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

− Si l'un des entiers p ou q est impair (par exemple $q = 2n+1$), alors

$$\int \sin^p x \cos^q x\, dx = \int \sin^p x (1-\sin^2 x)^n \cos x\, dx.$$

Le changement de variable $t = \cos x$ (resp. $t = \sin x$) ramène à cher cher les primitives d'un polynôme puisqu'en effet :

$$\int \sin^p x(1-\sin^2 x)^n \cos x\, dx = \int t^p(1-t^2x)^n\, dt.$$

− Si p et q sont pairs, on linéarise à l'aide de l'exponentielle complexe.

Exercice résolu 9. Calculer $I = \int \sin^4 x\, dx$.

Solution : On a $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$, d'où

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3),$$

Donc, $I = \int \sin^4 x\, dx = \dfrac{1}{32}\sin 4x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{3}{8}x + cte.$

2) $R(x, y)$ n'est pas un polynôme.

La méthode générale consiste à effectuer le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$. On a alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

d'où

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Cette méthode est souvent fastidieuse car elle amène à primitiver des fractions rationnelles dont le dénominateur est de degré élevé. C'est pourquoi on commence en général par utiliser les règles de Bioche. Posons $w(x) = R(\sin x, \cos x)\, dx$. Alors,

- Si $w(-x) = w(x)$, on pose $t = \cos x$.
- Si $w(\pi - x) = w(x)$, on pose $t = \sin x$.
- Si $w(\pi + x) = w(x)$, on pose $t = \tan x$.

Exercice résolu 10. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx$.

Solution : On a $w(x) = \dfrac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx$ est invariante par $w(-x) = w(x)$, on pose donc $t = \cos x$, de sorte que $dt = -\sin x\, dx$ et $\sin^3 x\, dx = (\sin^2 x)\sin x\, dx = -(1-t^2)\, dx$.

Le calcul donne alors

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1-t^2}{1+t^2}\, dt \\ &= -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1+t^2}{1+t^2}\, dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{2}{1+t^2}\, dt \\ &= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} + \arctan(\frac{\sqrt{2}}{2}). \end{aligned}$$

Remarque 1.93.
1. Si deux au moins de ces changements sont vraies, on pose $t = \cos(2x)$.
2. Dans tout les cas, le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$ ramène au calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle en t. mais cela a deux inconvénients :
   - d'une part, les calculs seront plus longs car on obtiendra des polynômes de degré plus élevé.
   - d'autre part, si un point de la forme $\pi + 2k\pi$ fait partie du domaine d'étude, il sera nécessaire de faire une étude particulière pour ce point.

Exemple 1.94. : Calculons une primitive sur $]-\pi,\pi[$ de la fonction

$$f:\ x\mapsto \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}.$$

On a

$$w(-x) = -\frac{\sin(-x)}{1+\cos(-x)}dx = w(x).$$

On utilise donc le changement de variable $t=\cos(x)$, soit $dt = -\sin(x)dx$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx &= -\int \frac{dt}{1+t}\\ &= -\ln|1+t|\\ &= -\ln|1+\cos(x)| = -\ln(1+\cos(x)).\end{aligned}$$

Regardons ce qu'on obtient si on fait le changement de variable $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Dans ce cas, $dt = \frac{1}{2}(1+t^2)dx$ et

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}\\ &= \int \frac{2t}{1+t^2}dt\\ &= \ln(1+t^2)\\ &= \ln\left(1+\tan^2(\frac{x}{2})\right).\end{aligned}$$

Exercice résolu 11. Calculer $\int \frac{dx}{2+\sin x}$.

Solution : On pose $t=\tan(\frac{x}{2})$, alors $x=2\arctan t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. On a donc

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

On écrit le polynôme t^2+t+1 sous la forme $(x-p)^2+q^2$.

Un simple calcul donne $t^2+t+1 = (t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$, par le changement de variable $t=\frac{\sqrt{3}}{2}u-\frac{1}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{u^2+1}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan u + \text{cte}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+\text{cte}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan(\frac{x}{2})+1}{\sqrt{3}}\right)+\text{cte}.$$

6 - Intégrale de la forme $\displaystyle\int R(shx, chx)\, dx$:

On peut employer une méthode analogue à celle du paragraphe précédent en effectuant le changement de variable $t = th(\frac{x}{2})$. On a alors

$$chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad shx = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2},$$

d'où

$$\int R(shx, chx)\, dx = \int R(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2})\frac{2}{1-t^2}\, dt.$$

On peut aussi se ramener facilement à une intégrale de fonction rationnelle au moyen du changement de variable $t = e^x$.

Exercice résolu 12. Calculer $I = \displaystyle\int \frac{dx}{chx}$.

Solution : La fonction $x \mapsto chx$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et on a $chx > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On va alors rechercher ses primitives sur $\mathbb{R}$. On a $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, et en effectuant le changement de variable $t = e^x$ (donc $t > 0$), on obtient

$$I = \int \frac{dx}{chx} = \int \frac{2dt}{1+t^2} = 2\arctan t + cte.$$

D'où

$$\int \frac{dx}{chx} = 2\arctan e^x + cte.$$

7 - Intégrale abélienne de première espèce $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, ad - bc \neq 0$:

On pose $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, alors $x = \dfrac{dt^n - b}{a - ct^n}$ et $dx = n\dfrac{ad-bc}{(ct^n - a)^2}t^{n-1}$.

Exercice résolu 13. Calculer $I = \displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\frac{dx}{2x-1}$

Solution : on pose $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$, alors $x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ et $dx = \dfrac{4t}{(t^2+1)^2}\, dt$, ce qui donne
$I = \displaystyle\int \frac{4t^2 dt}{(t^2-3)(t^2+1)}$.
En décomposant en éléments simples :

$$\frac{4u}{(u-3)(u+1)} = \frac{3}{u-3} + \frac{1}{u+1} \Rightarrow \frac{4t^2}{(t^2-3)(t^2+1)} = \frac{3}{t^2-3} + \frac{1}{t^2+1}.$$

Donc $I = \displaystyle\int \frac{3}{t^2-3}\, dt + \int \frac{1}{t^2+1}\, dt$ et le reste est évident.

8 - Intégrale abélienne de deuxième espèce $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$:

On cherche le ou les intervalles de $\mathbb{R}$ sur le quel le polynôme $ax^2 + bx + c$ est positif ou nul.

On écrit ce polynôme sous forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$ et de a, après avoir sorti suivant le cas $\sqrt{a}$ ou $\sqrt{-a}$ du radical, le changement de variable $t = x + \dfrac{b}{2a}$ nous ramène alors un calcul de l'un des trois types suivants :

a) $\displaystyle\int R_1\left(t, \sqrt{t^2 + A^2}\right) dt$

b) $\displaystyle\int R_1\left(t, \sqrt{t^2 - A^2}\right) dt$

c) $\displaystyle\int R_1\left(t, \sqrt{A^2 - t^2}\right) dt$

A fin de faire disparaitre le radical, on fera un changement de variable utilisant les relations :

$$sh^2 u + 1 = ch^2 u, \quad \tan^2 u + 1 = \frac{1}{\cos^2 u}, \quad 1 - \sin^2 u = \cos^2 u.$$

dans le cas *a*) on fera le changement de variable $t = Ashu$ ou $t = A\tan u$.
dans le cas *b*) on fera le changement de variable $t = Achu$ ou $t = \dfrac{A}{\cos u}$.
dans le cas *c*) on fera le changement de variable $t = A\sin u$.
Dans les trois cas, on est ramené à une fraction rationnelle en sinus-cosinus, ou en ch-sh, c'est à dire en exponentielle.

Exemple 1.95. Calculons $\displaystyle\int_{-4}^{0} \sqrt{-t^2 - 4t}\, dt$.
La fonction $t \mapsto \sqrt{-t^2 - 4t}$ est définie et continue sur $[-4, 0]$ et on a $-t^2 - 4t = -(t + 2)^2 + 4$. donc

$$\int_{-4}^{0} \sqrt{-t^2 - 4t}\, dt = \int_{-4}^{0} \sqrt{4 - (t + 2)^2}\, dt.$$

Le chandement de variable $t + 2 = 2\sin u$ donne

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{0} \sqrt{-t^2 - 4t}\, dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{1 - \sin^2 u} 2\cos u\, du \\ &= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du \\ &= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2u}{2}\, du = 2\pi.\end{aligned}$$

1.6 Exercices

Exercice 1. En utilisant les primitives usuelles, Calculer les intégrales ou primitives suivantes :

$$\int_0^1 x(2x^2 + 4)^3\, dx, \quad \int (x + \sqrt{x})^2\, dx, \quad \int_1^e \frac{dx}{x\ln(3x)}, \quad \int \frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2}\, dx,$$

$$\int \frac{\cos(\ln(t))}{t}\, dt, \quad \int_0^x \frac{e^t}{1 + e^{2t}}\, dt, \quad \int_0^2 \left|t^2 - 3t + 2\right| dt, \quad \int \frac{dt}{t\sqrt{1 - ln^2(t)}}.$$

Exercice 2. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x + x^2}\, dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) est bien définie et calculer I_0.
2. Montrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ \dfrac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 3. Pour tout entier n on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2}\,dx$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n - u_{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$. En déduire u_2 et u_3.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.
4. En minorant $1-x^2$, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \leq \dfrac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4.

1. En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt, \qquad B = \int_0^\pi t^2\cos(t)\,dt.$$

2. En utilisant l'intégration par changement de variable, déterminer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x(\ln^2(x)-4)}, \quad \int \frac{\sin(x)\,dx}{(\cos^2 x + 2\cos x + 5)^2}, \quad \int \frac{e^{3x}+6e^{2x}-e^x}{(e^x-3)^2(e^x-1)}\,dx.$$

$$\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}},$$

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(x-b)}\,dx \quad (a<b), \quad \int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}, \quad \int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx,$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x + 2\tan^2 x}, \quad \int \frac{dx}{chx+\sqrt{ch2x}}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-6}}, \quad \int \cos^4 x\sin^2 x\,dx, \quad \int \frac{dx}{sh^3 x}.$$

Exercice 5. Calculer les limites des suites définies par le terme géneral suivant :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}, \qquad v_n = \left(\prod_{k=1}^n (1+\frac{k^2}{n^2})\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 6.

1. Calculer la primitive $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^2+2}{x^4+x^2}\,dx$, puis, en déduire $\displaystyle\int \frac{\cos^3(t)+\cos^5(t)}{\sin^2(t)+\sin^4(t)}\,dt$.
2. Calculer ces deux primitives $\displaystyle\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx$ et $\displaystyle\int \frac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}\,dx$,

Exercice 7. Calculer les primitives suivantes :

$$\int_0^x \frac{1}{a+b\cos^2(t)}\,dt; a,b>0, \quad \int_0^x \frac{dt}{\sin^2(t)+3\cos^2(t)}, \quad \int_0^x \frac{t^2}{(t\sin(t)+\cos(t))^2}\,dt.$$

Chapitre 2

Intégrales Généralisées

On sait intégrer sur les segments $[a,b]$ et on souhaite étendre la notion à tout intervalle et ainsi donner un sens entre autre à

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

2.1 Définitions

Définition 2.96. Soit f une fonction réelle définie sur $]a,b[$. On dit que f est localement intégrable sur $]a,b[$ si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné $[\alpha,\beta]\subset]a,b[$.

Remarque 2.97. Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors elle est localement intégrable sur I.

Exemple 2.98. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est localement intégrable sur $]0,1]$.

Définition 2.99. Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a,b[$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt$ existe et est finie.

Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt$ est appelée intégrale généralisée ou impropre de la fonction f sur $[a,b[$.

Définition 2.100. Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $]a,b]$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\int_x^a f(t)\,dt$ existe et est finie.

Définition 2.101. Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $]a,b[$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ sont convergentes pour tout $c\in]a,b[$.

On pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$

Exercice résolu 14. Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt.$

Solution : La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$. Soit $x \in [0, +\infty[$, On a
$$\int_0^x e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}.$$
Comme $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente et on a $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$.

Exercice résolu 15. Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

Solution : La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1]$, donc le problème se pose uniquement en 0. Soit $x \in]0, 1]$ On a
$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}.$$
Comme $\lim_{x\to0^+} \displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{x\to0^+} 2 - 2\sqrt{x} = 2$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est convergente et on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

Exercice résolu 16. Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.

Solution : La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$, donc le problème se pose en $+\infty$ et en $-\infty$. On a
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty} [\arctan t]_0^x = \frac{\pi}{2}.$$
et
$$\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to-\infty} [\arctan t]_x^0 = \frac{\pi}{2}.$$
Donc, les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}$ sont convergentes. Par suite, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Remarque 2.102. Dans le cas où $a = -\infty$ et $b = +\infty$, l'existence de $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^x f(t)\,dt$ ne prouve pas la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$. Par exemple, il suffit de considérer une fonction impaire continue. On a $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ diverge alors que $\int_{-x}^x t\,dt = 0$, pour tout $x > 0$.

> **Proposition 2.103**
>
> Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ avec b fini.
>
> Si f est prolongeable par continuité en b, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.

Remarque 2.104. En posant $f(b) = \lim_{x\to b} f(x) = l$ et désignant par F la primitive de f qui s'annule en a, la fonction F est continue en b et on a
$$\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{x\to b} F(x) - F(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Dans ce cas, on dit qu'il y'a une fausse intégrale généralisée.

Remarque 2.105. On a aussi $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente dans les deux cas suivantes :

- f est continue sur $]a, b]$ (a fini) et prolongeable par continuité en a.
- f est continue sur $]a, b[$ (a et b sont finis) et prolongeable par continuité en a et b.

Exercice résolu 17. Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 t\ln(t)\,dt$.

Solution : La fonction $t \mapsto t\ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$. Comme $\lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$, alors f admet un prolongement par continuité en 0. Par suite, $\int_0^1 t\ln(t)\,dt$ est convergente, c'est à dire $\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 t\ln(t)\,dt$ existe et est finie. Pour tout $x > 0$, on a

$$\int_x^1 t\ln(t)\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t}{2}\,dt = -\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4}.$$

Donc

$$\int_0^1 t\ln(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 t\ln(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4} = -\frac{1}{4}.$$

2.2 Propriétés des Intégrales Généralisées

Proposition 2.106 (Linéarité)

Si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont convergentes, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt$; où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$; est convergente et on a

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt + \beta\int_a^b g(t)\,dt$$

Proposition 2.107 (Relation de Chasles)

l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si les intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ sont convergentes pour tout $c \in]a, b[$, et on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

2.3 Calcul Pratique des Intégrales Généralisées

2.3.1 Utilisation des Primitives

Définition 2.108. Soit f une fonction continue sur $]a,b[$.
Si F est une primitive de f, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ existent :
On définit alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Exemple 2.109. On a $F : x \mapsto (\ln x)^2$ est une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{2\ln x}{x}$, donc

$$\int_0^1 \frac{2\ln t}{t}\,dt = F(1) - \lim_{x\to 0^+} F(x) = 0 - (+\infty) = -\infty.$$

Exercice 2.110. En utilisant les primitives, déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx, \quad \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}, \quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}.$$

2.3.2 Intégration par Parties

Théorème 2.111

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $]a,b[$.
On suppose que $\lim\limits_{x\to a^+} u(x)v(x) = L^+$ et $\lim\limits_{x\to b^-} u(x)v(x) = L^-$ existent. Alors, $\int_a^b u(t)v'(t)\,dt$ est convergente si et seulement si $\int_a^b u'(t)v(t)\,dt$ est convergente et on a

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = L^- - L^+ - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Exercice résolu 18. Calculer $\int_0^1 (\ln t)^2\,dt$.

Solution : On pose $u(t) = (\ln t)^2$ et $v'(t) = 1$ donc $u'(t) = \dfrac{2\ln t}{t}$ et $v(t) = t$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\ln t)^2\,dt &= -\lim_{x\to 0^+} t(\ln t)^2 - \int_0^1 t\frac{2}{t}\ln t\,dt \\
&= -2\int_0^1 \ln t\,dt = -2\int_0^1 (t)'\ln t\,dt \\
&= 2\lim_{x\to 0^+} t\ln t + 2\int_0^1 t\frac{1}{t}\,dt = 2.
\end{aligned}$$

Exercice 2.112. En utilisant l'intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \dfrac{1}{\lambda}$.

2.3.3 Intégration par Changement de Variables

Théorème 2.113

Soient $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une bijection de classe C^1 avec $\lim_{x\to\alpha^+}\varphi(x) = a$ et $\lim_{x\to\beta^-}\varphi(x) = b$. Alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si et seulement si $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ est convergente et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Exercice résolu 19. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

Solution : On pose $t = \sin(x)$, alors $dt = \cos(x)\,dx$. La fonction $\sin :]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to]-1,1[$ est une bijection de classe C^1. Donc,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{|\cos(x)|}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \pi.$$

Exercice 2.114. En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{1+e^x}$, déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

2.4 Intégrales Généralisées des Fonctions à Signe Constant

Il est facile de voir que la convergence de l'intégrale $-\int_a^b f(t)\,dt$ se ramène à celle de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$. Par conséquent, dans la suite on ne considère que le cas des fonctions positives.

2.4.1 Critère de la Convergence Majorée

Proposition 2.115

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue et positive. Alors, $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si et seulement s'il existe $M \geq 0$ (M est indépendante de x) tel que $\int_a^b f(t)\,dt \leq M$ pour tout $x \in [a,b[$.

2.4.2 Critère de Cauchy

Proposition 2.116

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. l'intégrale impropre en b, $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si (et seulement si)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in [a, b[\quad \forall x, y \in [c, b[\quad \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \varepsilon.$$

2.4.3 Critère de Comparaison

Proposition 2.117

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives.
S'il existe $M \neq 0$ (M est indépendante de x) tel que $f(x) \leq Mg(x)$ pour tout $x \in [a, b[$. Alors,

- $\int_a^b g(t)\,dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ converge.
- $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

Exercice résolu 20. Etudier la nature de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Solution : Pour tout $t \geq 1$, on a $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Comme $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente, alors d'après le critère de comparaison, $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge.
D'autre part, comme la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, 1]$, alors $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ est une intégrale simple convergente. On déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est convergente car c'est la somme de deux intégrales convergentes.

2.4.4 Critère de Négligeabilité

Proposition 2.118

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que :
$f(t) = \underset{b}{O}(g(t))$ (en particulier $f(t) = \underset{b}{o}(g(t))$) et g est de signe constant, alors, si l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente, alors, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ l'est aussi.

Remarque 2.119. La condition "de signe constant" est indispensable. Par exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ diverge, bien qu'en $+\infty$, $\frac{|\sin t|}{t} = o\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$.

2.4.5 Critère d'Equivalence

Proposition 2.120

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues et positives telles que $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.

Remarque 2.121. Si f est continue et positive sur $[a, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l > 0$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente.

Exemple 2.122. Puisque $\sin(t) - t$ est équivalent en 0 à $\dfrac{-t^3}{6} \leq 0$, alors, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\lambda \left(\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\right) dt$ converge si et seulement si $\lambda < 2$.

Remarque 2.123. La condition "de signe constant" est, là encore, indispensable. Par exemple, $\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}} + \dfrac{|\sin t|}{t}$ et $\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$ sont équivalentes en $+\infty$ mais ; d'après la remarque 2.119 ; leurs intégrales ne sont pas de même nature.

2.4.6 Integrales de Référence

1 - Intégrales de Riemann

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.
- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.

Exemple 2.124. On a

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$ diverge car $\dfrac{1}{4} < 1$ ($\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$).
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[4]{x^3+1}}\,dx$ converge car $\dfrac{1}{x\sqrt[4]{x^3+1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\frac{7}{4}}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{7}{4}}}\,dx$ est convergente.
3. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$ est convergente.

2 - Intégrales de Bertrand

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (lnx)^\beta}\,dx$ où $a > 1$, converge si $\alpha > 1$ (β quelconque) ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
- $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{x^\alpha |lnx|^\beta}\,dx$ où $0 < a < 1$, converge si $\alpha < 1$ (β quelconque) ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exemple 2.125. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} (lnx)^2\,dx$ est divergente, car c'est une intégrale de Bertrand avec $\alpha = 0$ et $\beta = -2 < 1$.

Exercice résolu 21. Etudier la nature de $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$, où $0<\alpha<1$.

Solution : La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ n'est pas définie en 0.
On a $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{t^{\alpha-1}} = \lim_{t\to 0} e^{-t} = 1$. Donc $t^{\alpha-1}e^{-t} \sim t^{\alpha-1}$ au voisinage de 0. Comme $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$ est une intégrale de Riemann convergente car $1-\alpha<1$, alors d'après le critère de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$ est convergente.

Exercice 2.126. Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$A=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx,\quad B=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-x^4}\,dx,\quad C=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x+e^{-x}}\,dx,$$

$$D=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx,\quad E=\int_0^{+\infty}\cos(\beta x)e^{-x^2}\,dx,\quad F=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x(\ln x)^{\beta}},$$

$$G=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2)\,dx,\quad H=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{1+t^2}\,dt,\quad I=\int_0^1\frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,dt.$$

2.5 Intégrales Absolument Convergentes

Définition 2.127. Soit $f:\ [a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente

Théorème 2.128

Soit $f:\ [a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarque 2.129. La réciproque du théorème est fausse. Dans ce cas, une intégrale généralisée convergente et non absolument convergente est dite semi-convergente.

Exemple 2.130. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ est semi-convergente.
(Indication : $\displaystyle\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geq \frac{(\sin t)^2}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}$.)

Exercice résolu 22. Etudier la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}\,dt$.

Solution : Pour tout $t\geq 1$, on a $\displaystyle 0\leq\left|\frac{\sin t}{t^3}\right|\leq\frac{1}{t^3}$.
Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^3}\,dt$ est une intégrale de Riemann convergente, alors, d'après le critère de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t^3}\right|\,dt$ est convergente. Ce qui veut dire que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^3}\,dt$ est absolument convergente.

Proposition 2.131 (Critère de Riemann)

(i) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ telle que $\lim_{t\to+\infty} x^{\alpha} f(x) = k$ existe.

• Si $\alpha > 1$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente.

• Si $\alpha \leq 1$ et $k \neq 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente.

(ii) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $]a, b]$ telle que $\lim_{t\to a^+} (x-a)^{\alpha} f(x) = k$ existe.

• Si $\alpha < 1$, alors $\int_a^{b} f(t)\,dt$ est absolument convergente.

• Si $\alpha \geq 1$ et $k \neq 0$, alors $\int_a^{b} f(t)\,dt$ est divergente.

Exercice résolu 23. Etudier la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1}\,dt$.

Solution : La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ est continue sur $[2, +\infty[$ et $\lim_{t\to+\infty} x^2 f(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$. Donc d'après le critère de Riemann ($\alpha = 2$), l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1}\,dt$ est absolument convergente. Par suite elle est convergente.

Exercice résolu 24. Etudier la nature de l'intégrale $\int_{-1}^{0} \frac{1}{t^2-1}\,dt$.

Solution : La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ est continue sur $]-1, 0]$ et $\lim_{t\to-1^+} (x+1)^1 f(x) = \lim_{t\to-1^+} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{t\to-1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{2}$. Donc, d'après le critère de Riemann ($\alpha = 1$), l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1}\,dt$ est divergente.

Pour montrer qu'une intégrale converge, quand elle n'est pas absolument convergente, on dispose du théorème suivant.

Théorème 2.132 (Règle d'Abel)

Soit f, g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$, telles que

(i) f est de C^1 sur $[a, +\infty[$,

(ii) f est décroissante et de limite 0 en $+\infty$,

(iii) il existe un réel $M \geq 0$ tel que, pour tout $x \in [a, +\infty[$, $\left| \int_a^x g(t)\,dt \right| \leq M$.

Alors l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,g(t)dt \quad \text{converge.}$$

Exercice résolu 25. Etudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,dt$, suivant les valeurs de $\alpha > 0$.

Solution : (i) Pour $\alpha > 1$, cette intégrale est absolument convergente.

(ii) Si $0 < \alpha \leq 1$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha}}$ est de C^1 et décroissante sur $[1, +\infty[$. De plus $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

La fonction $g: \; t \mapsto \sin t$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $\left| \int_1^x \sin t \, dt \right| \leq 2$ pour tout x.
La règle d'Abel nous donne la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} \, dt$.

2.6 Exercices

Exercice 1. En utilisant les primitives usuelles, déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) \, dx, \qquad B = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{x} \, dx.$$

Exercice 2. Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)} \, dx, \quad B = \int_1^{+\infty} x^{2019} e^{-x} \, dx, \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2 - cos(x)} \, dx,$$

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} \, dx, \quad E = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} \, dx, \quad F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin(x)) \, dx.$$

Exercice 3. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \, dt$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Pour $\varepsilon > 0$, établir la relation :
$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \, dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} \, dt.$$
3. En déduire le calcule de I (utiliser la première formule de la moyenne).
4. En déduire le calcul de $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} \, dx$ (Poser $x = e^{-t}$).

Exercice 4. Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^3+1)^n}$, où n est un entier naturel.

1. Etudier pour quelles valeurs de n l'intégrale I_n converge.
2. Calculer I_1.
3. Montrer que si $n \geq 2$, on a : $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$.
4. En déduire l'expression de I_n.

Exercice 5. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)}$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Calculer $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.
3. En déduire I (poser $x = \sqrt{t}$).

Exercice 6. Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(1+t)^\beta}\,dt; \quad \alpha,\beta > 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t}\,dt, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt.$$

Exercice 7. Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(1+t)^\beta}\,dt; \quad \alpha,\beta > 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} t^3 e^{-3t^2}\,dt,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sqrt{t}}\,dt.$$

Chapitre 3

Equations Différentielles Linéaires

3.1 Equations Différentielles du Premier Ordre

3.1.1 Définition

Définition 3.133. Soit ϕ une fonction de trois variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On appelle équation différentielle du premier ordre, une relation de la forme $\phi(x, y, y') = 0$ faisant intervenir une variable x, une fonction $y = y(x)$ et sa dérivée $y'(x)$.
Une fonction f dérivable est dite solution de cette équation sur $I \subset \mathbb{R}$ si $\phi(x, f(x), f'(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exemple 3.134. L'équation $x^3 y' - 2 = 0$ est équation différentielle du premier ordre, elle admet $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ comme solution sur $I = \mathbb{R}^*$.

3.1.2 Equation à Variables Séparées

Définition 3.135. Une équation différentielle du premier ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Méthode de Résolution : On a

$$\begin{aligned} y' = \frac{f(x)}{g(y)} \Rightarrow \quad & \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ \Rightarrow \quad & g(y)dy = f(x)dx \\ \Rightarrow \quad & \int g(y)dy = \int f(x)dx \end{aligned}$$

Le problème se ramène à deux intégrations.

Exercice résolu 26. Résoudre l'équation différentielle $(1 + x^2)y' + 3xy = 0$

Solution : On a

$$\begin{aligned}
(1+x^2)y'+3xy=0 \Rightarrow \quad & y' = \frac{-3x}{1+x^2}y \\
\Rightarrow \quad & \frac{dy}{y} = -\frac{3x}{1+x^2} \\
\Rightarrow \quad & \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-3x}{1+x^2} \\
\Rightarrow \quad & \ln(|y|) = -\frac{3}{2}\ln(1+x^2) + \text{cte} \\
\Rightarrow \quad & y = \pm e^{\text{cte}} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)}},
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation différentielle $(1+x^2)y'+3xy=0$ est

$$y(x) = \frac{K}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)}}, \qquad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Définition 3.136 (Cas Particulier : Equation Autonome)**.** L'équation autonome est un cas particulier d'équations à variables séparées, elle est de la forme $y' = g(y)$.

Exercice 3.137. Résoudre l'équation autonome $y' = y^2 + y$.

3.1.3 Equation Linéaire

Définition 3.138. L'équation différentielles linéaire du premier ordre est de la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = f(x); \qquad (E).$$

Où $a(x)$, $b(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$, avec $\forall x \in I : a(x) \neq 0$.

On appelle *équation homogène* ou encore *équation sans second membre* associée à (E), l'équation :

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (E.H).$$

Exemple 3.139. (i) L'équation $xy' + (\cos x)y = 2x^2$ est linéaire.
(ii) L'équation $yy' + xy = 2x^2 - 1$ n'est pas linéaire.

Proposition 3.140

L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (E.H) une solution particulière de (E).

1 - Résolution de l'équation homogène associée :

On a

$$\begin{aligned} a(x)y' + b(x)y = 0 \Rightarrow \quad & y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b(x)}{a(x)} \\ \Rightarrow \quad & \frac{dy}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}dx \\ \Rightarrow \quad & \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{b(x)}{a(x)}dx \\ \Rightarrow \quad & \ln|y| = -\int \frac{b(x)}{a(x)}dx + \text{cte} \end{aligned}$$

On pose $A(x) = \displaystyle\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx$. Alors, $\ln|y| = -A(x)$cte. Donc, $y = e^{\text{cte}}e^{-A(x)}$ et par suite $y = \pm e^{\text{cte}}e^{-A(x)}$. Par conséquent, $y_h = Ce^{-A(x)}; \quad C \in \mathbb{R}$ est la solution générale de l'équation homogène $(E.H)$.

Remarque 3.141. L'équation linéaire sans second membre est à variables séparées.

2 - Recherche d'une Solution Particulière de (E) :

Pour déterminer une solution particulière de (E) on va utiliser la méthode de variation de la constante. Soit y_h la solution générale de l'équation homogène $(E.H)$. Donc, $y_h = Ce^{-A(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$ et $A(x) = \displaystyle\int \frac{b(x)}{a(x)}dx$.

La méthode de variation de la constante consiste à remplacer la constante C par une fonction $C(x)$ et chercher une solution particulière de l'équation avec second membre (E) de la forme $y = C(x)e^{-A(x)}$. On calcule y', puis on remplace y et y' par leurs expressions dans l'équation (E) et on utilise le fait que $e^{-A(x)}$ est solution de $(E.H)$, on trouve

$$C'(x) = \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)},$$

ce qui implique

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)}\, dx + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Donc, la solution générale de l'équation avec second membre (E) est

$$y(x) = C(x)e^{-A(x)} = e^{-A(x)}\int \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)}\, dx + ke^{-A(x)}, \quad k \in \mathbb{R},$$

c'est à dire $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ avec $y_h(x) = ke^{-A(x)}; \quad k \in \mathbb{R}$ est la solution générale de l'équation homogène $(E.H)$ et $y_p(x) = e^{-A(x)}\displaystyle\int \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)}\, dx$ est une solution particilière de (E).

Exercice résolu 27. Résoudre l'équation linéaire $xy' - y = \dfrac{x}{x^2-1}, \quad (E)$.

Solution : On commence par résoudre l'équation homogène $xy' - y = 0, \quad (E.H)$. On a

$$\begin{aligned} xy' - y = 0 \Rightarrow \quad & \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \quad & \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \quad & \ln|y| = \ln|y| + \text{cte} \\ \Rightarrow \quad & y = C.x, \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On cherche maintenant une solution particulière de (E) ; sous la forme $y_p = C(x).x$; par la méthode de variation de la constante :

$$\begin{aligned}
y_p \quad \text{est solution de} \quad (E.H) \Rightarrow\ & xy_p' - y_p = \frac{x}{x^2-1} \\
\Rightarrow\ & x^2C'(x) + xC(x) - xC(x) = \frac{x}{x^2-1} \\
\Rightarrow\ & C'(x) = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} \\
\Rightarrow\ & C'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \\
\Rightarrow\ & C(x) = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| \\
\Rightarrow\ & y_p = C(x).x = x(-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|).
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation (E) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Cx + x(-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.142. Si $y_1$et y_2 sont deux solutions particulières de (E), alors $y_1 - y_2$ est solution de $(E.H)$, et la solution générale de (E) est

$$y = y_1 + c(y_1 - y_2), c \in \mathbb{R} \text{ arbitraire.}$$

3.1.4 Équations Différentielles Particulières

Dans cette section, on va présenter quelques équations différentielles du premier ordre non linéaires se ramenant à des équations différentielles linéaires.

1 - Équation de Bernoulli

Définition 3.143. Une équation différentielle est dite de Bernoulli si elle est de la forme :

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, n \in \mathbb{R} \qquad (Ber)$$

Remarque 3.144. Si $n = 1$, l'équation différentielle de Bernoulli est une équation différentielle linéaire.

Pour résoudre cette équation, on suppose qu'elle admet une solution y qui ne s'annule pas. On divise l'équation (Ber) par y^n, on obtient

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} - q(x) = 0.$$

On pose $u = y^{1-n}$, et donc $u' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$. Cette substitution transforme l'équation (Ber) en une équation différentielle linéaire en la nouvelle variable u.

Exercice résolu 28. Résoudre l'équation de Bernoulli suivante : $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{\sqrt{y}}$, $\quad (Ber)$.

Solution : C'est une équation de Bernoulli avec $n = -\frac{1}{2}$, divisons tous les termes par $y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{y}}$, on obtient l'équation suivante

$$\sqrt{y}y' + \frac{2}{x}\sqrt{y}y = e^x, \quad (Ber').$$

Introduisant la nouvelle fonction $u = y^{\frac{3}{2}} = \sqrt{y}y$, d'où $u' = \frac{3}{2}\sqrt{y}y'$, portons ces expressions dans l'équation (Ber'), nous obtenons l'équation différentielle linéaire

$$\frac{2}{3}u' + \frac{2}{x}u = e^x, \quad (E)$$

qu'on peut résoudre facilement par la méthode de variation de la constante.

Exercice 3.145. Résoudre les équations de Bernoulli suivantes :

$$xy' + y = y^2 \ln x, \quad y - \frac{x}{2}y' = \sqrt{y}, \quad y' - y = xy^6.$$

2 - Équation de Riccati

Définition 3.146. Les équations de Riccati sont des équations différentielles de la forme :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \qquad (Ric)$$

Pour résoudre cette équation, on a besoin de connaitre une solution particulière y_p. On pose le changement de fonction suivant :

$$y = y_p + \frac{1}{z}.$$

Cette substitution transforme l'équation (Ric) en une équation linéaire en z.

Exercice résolu 29. Résoudre l'équation de Riccati suivante :

$$y' - y + y^2 = 4x^2 + 2x + 2, \quad (Ric).$$

Sachant que $y_p = 2x + 1$ est une solution particulière.

Solution : Soit le changement de variables :

$$y = y_p + \frac{1}{z} = 2x + 1 + \frac{1}{z}.$$

Substituons cette expression dans l'équation (Ric), afin d'obtenir une équation linéaire non homogène de la forme

$$z' + (-4x - 1)z = -1,$$

qui se résout par la méthode de variation de la constante.

Exercice 3.147. Résoudre les équations de Riccati suivantes :

$$(x^2 + 1)y' = y^2 - 1 \quad (y_p = 1), \quad x^3y' + y^2 + x^2y + 2x^4 = 0 \quad (y_p = -x^2).$$

3 - Équation de Lagrange

Définition 3.148. Les équations de Lagrange sont des équations différentielles de la forme :

$$y = xf(y') + g(y') \qquad (Lag)$$

Pour résoudre ce type d'équations, on commence par dériver (Lag) par rapport à x, nous obtenons :

$$y' = f(y') + xf'(y')y'' + g'(y')y'' \qquad (Lag).$$

Le changement de fonction $t(x) = y'(x)$ conduit à l'équation :

$$t = f(t) + xf'(t)t' + g'(t)t' \qquad (Lag').$$

c-à-d

$$f(t) - t + (xf'(t) + g'(t))t' = 0 \qquad (Lag')$$

Sachant que $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ (relation entre dérivées de fonctions réciproques) l'équation précédente se transforme en une équation différentielle linéaire en $x(t)$:

$$(f(t) - t)x' + f'(t)x = -g'(t) \qquad (E)$$

La résolution de cette équation linéaire admet pour solution : $x(t) = x_H + x_p = F(t)$, par conséquent, $y(t) = xf(t) + g(t) = G(t)$.
Nous obtenons des équations paramétriques $F(t)$ et $G(t)$ pour des courbes intégrales.

Exercice 3.149. Résoudre les équations de Lagrange suivantes :

$$y' = x(y')^2 - \frac{1}{y'}, \quad y = -xy' - \ln(y').$$

3.2 Equations Différentielles Linéaire du Second Ordre à Coefficients Constants

3.2.1 Définition

Définition 3.150. Une équation différentielle du second ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad \text{(E)}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, et f une fonction continue sur I ouvert de $\mathbb{R}$. L'équation homogène (ou sans second membre) associée est

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{(E.H)}$$

3.2.2 Résolution de l'Équation Homogène

Définition 3.151. Deux fonctions y_1 et y_2 sont dites linéairement indépendantes si

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Théorème 3.152

L'équation homogène $(E.H)$ possède deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2. De plus, toute solution y de $(E.H)$ est de la forme

$$y = Ay_1 + By_2, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Méthode de Résolution : Pour résoudre l'équation homogène $(E.H)$, on cherche une solution de la forme $y(x) = e^{rx}$.

En remplaçant dans l'équation, on trouve *l'équation caractéristique*

$$ar^2 + br + c = 0, \qquad (E.C)$$

La résolution de l'équation $(E.H)$ dépend du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$. On a donc, les trois cas suivants.

Cas 1 : $\Delta > 0$:

L'équation caratéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Alors, La solution générale de l'équation homogène $(E.H)$ est

$$y_h = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cas 2 : $\Delta = 0$:

L'équation caratéristique admet une racine réelle double $r = \dfrac{-b}{2a}$. Donc, la solution générale de l'équation homogène $(E.H)$ est :

$$y_h = (Ax + B)e^{rx}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cas 3 : $\Delta < 0$:

L'équation caratéristique admet deux racines complexes conjugées $r_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
On pose $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Alors, la solution générale de l'équation homogène $(E.H)$ est :

$$y_h(x) = e^{\alpha x}\Big(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\Big); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

On peut l'écrire aussi sous la forme

$$y_h(x) = Ke^{\alpha x}\cos(\beta x + C); \qquad K, C \in \mathbb{R}.$$

Exercice résolu 30. Résoudre l'équation $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Solution : L'équation caractéristique est : $r^2+3r-4 = 0$ dont le $\Delta = b^2-4ac = (3)^2-4\times1\times(-4) = 25 > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles $r_1 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$ et $r_2 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$.
Donc, la solution générale est

$$y_h = Ae^{x} + Be^{-4x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice résolu 31. Résoudre l'équation $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Solution : L'équation caractéristique est : $r^2 - 4r + 4 = 0$ dont le $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine double $r = \frac{4}{2} = 2$. Donc, la solution générale est

$$y_h = (Ax + B)e^{2x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice résolu 32. Résoudre l'équation $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Solution : L'équation caractéristique est : $r^2+4r+5 = 0$ dont le $\Delta = (4)^2-4\times1\times5 = -4 = (2i)^2 < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{-4+2i}{2} = -2+i$ et $r_2 = \overline{r}_1 = -2 - i$. Dans ce cas, la solution générale est

$$y_h = e^{-2x}\Big(A\cos(x) + B\sin(x)\Big); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

3.2.3 Résolution de l'Équation avec Second Membre

Proposition 3.153

L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (E.H) une solution particulière de (E).

Pour résoudre l'équation avec le second membre, on va présenter une méthode pour les cas classiques et une autre pour le cas général.

Cas classique : $f(x) = e^{mx}\Big(P_n(x)\cos(\omega x) + Q_{n'}(x)\sin(\omega x)\Big)$ **avec** $m, \omega \in \mathbb{R}^*$:

Si le second membre de l'équation (E) est de la forme :

$f(x) = e^{mx}\Big(P_{n'}(x)\cos(\omega x) + Q_{n''}(x)\sin(\omega x)\Big)$ où $P_{n'}$ et $Q_{n''}$ sont deux polynômes et $m, \omega \in \mathbb{R}^*$, alors on cherche une solution particulière y_p telle que

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{mx}\Big(R_n(x)\cos(\omega x) + T_n(x)\sin(\omega x)\Big) & \text{si } m + i\omega \text{ n'est pas racine de } (E.C), \\ xe^{mx}\Big(R_n(x)\cos(\omega x) + T_n(x)\sin(\omega x)\Big) & \text{si } m + i\omega \text{ est racine simple de } (E.C), \\ x^2e^{mx}\Big(R_n(x)\cos(\omega x) + T_n(x)\sin(\omega x)\Big) & \text{si } m + i\omega \text{ est racine double de } (E.C). \end{cases}$$

Avec R_n et T_n sont deux polynômes de degré $n = \max(n'; n'')$.

Remarque 3.154. Ceci inclut le cas où les polynômes $R_{n'}$ et $Q_{n''}$ sont simplement des constantes ($n = n' = 0$), dont l'une peut être nulle, et / ou f ne contient pas d'exponentielle ($m = 0$) et / ou pas de fonction trigonométrique ($\omega = 0$).

Exercice résolu 33. Résoudre l'équation $y'' - 5y' + 6y = x^2 + 1, \qquad (E_1)$.

Solution : On commence par résoudre l'équation homogène associée $y'' - 5y' + 6y = 0$. l'équation caractéristique est : $r^2 - 5r + 6 = 0$ dont le $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$, alors elle admet deux racines réelles $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$ Donc, la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h = Ae^{2x} + Be^{3x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Le second membre est de la forme $e^{mx}\Big(P_2(x)\cos(\omega x) + Q_{-\infty}(x) = \sin(\omega x)\Big)$ avec $m = 0$, $\omega = 0$, $P_2(x) = x^2 + 1$ et $Q_{-\infty}(x) = 0$. Or $m + i\omega = 0$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme :
$y_p = e^{mx}\Big(R_2(x)\cos(\omega x) + T_2(x)\sin(\omega x)\Big) = ax^2 + bx + c$.
Puisque

$$y_p'' - 5y_p' + 6y = 6ax^2 + 2(3b - 5a)x + 6c - 5b + 2a = x^2 + 1.$$

Par identification, on obtient $a = \frac{1}{6}, b = \frac{5}{18}$ et $c = \frac{37}{108}$, par conséquent,

$$y_p(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{37}{108}.$$

Donc, les solutions de (E_1) sont

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{37}{108}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice résolu 34. Résoudre l'équation $y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}, \qquad (E_2)$.

Solution : L'équation caractéristique est : $r^2 - 2r - 3 = 0$ et $\Delta = 16 > 0$, alors $r_1 = -1$ et $r_2 = 3$. Donc, la solution générale de l'équation homogène est donnée par :

$$y_h = Ae^{-x} + Be^{3x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Le second membre est de la forme $e^{mx}\Big(P_1(x)\cos(\omega x) + Q_{-\infty}(x)\sin(\omega x)\Big)$ avec $m = -1$, $\omega = 0$, $P_1(x) = -3x$ et $Q_{-\infty}(x) = 0$. Or $m + i\omega = -1$ est racine simple de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p = xe^{mx}\Big(R_1(x)\cos(\omega x) + T_1(x)\sin(\omega x)\Big) = x(ax + b)e^{-x}.$$

On calcule $y_p' = e^{-x}(-ax^2 + (2a - b)x + b)$ puis $y_p'' = e^{-x}(ax^2 + (-4a + b)x + 2b - 2a)$ et on remplace dans l'équation (E_2), on obtient $a = \frac{3}{8}$ et $b = \frac{3}{16}$, par conséquent

$$y_p(x) = x(\frac{3}{8}x + \frac{3}{16})e^{-x}.$$

Donc, la solution générale de (E_2) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} + x(\frac{3}{8}x + \frac{3}{16})e^{-x}; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice résolu 35. Résoudre l'équation $y'' + 9y = e^{-x}\cos x, \qquad (E_3)$.

Solution : L'équation caractéristique est : $r^2 + 9 = 0$, elle admet deux racines complexes $r_1 = 3i$ et $r_2 = -3i$. Donc, la solution générale de l'équation homogène est donnée par :

$$y_h = A\cos(3x) + B\sin(3x); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Le second membre est de la forme $e^{mx}\Big(P_0(x)\cos(\omega x) + Q_0(x)\sin(\omega x)\Big)$ avec $m = -1$, $\omega = 1$, $P_0(x) = 1$ et $Q_{-\infty}(x) = 0$. Or $m + i\omega = 1 + i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p = e^{mx}\Big(R_0(x)\cos(\omega x) + T_0(x)\sin(\omega x)\Big) = e^{-x}\Big(a\cos(x) + b\sin(x)\Big).$$

On calcule y'_p et y''_p et on remplace dans l'équation (E_3), on obtient

$$(2b + 9a - 1)\cos x + (9b - 2a)\sin x = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $a = \dfrac{9}{85}$ et $b = \dfrac{2}{85}$.
Donc, la solution particuliére de (E_3) est

$$y_p(x) = e^{-x}\Big(\frac{9}{85}\cos(x) + \frac{2}{85}\sin(x)\Big); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (E_3) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) + e^{-x}\Big(\frac{9}{85}\cos(x) + \frac{2}{85}\sin(x)\Big); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

2- Principe de Superposition :
Si le second membre de l'équation (E) est de la forme $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$, on cherche une solution particulière y_{p_i} des équations

$$(E_i): \quad ay'' + by' + cy = f_i(x), \quad i = 1, ..., n.$$

Une solution particulière y_p de (E) est alors donnée par

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + ... + y_{p_n}(x).$$

Exercice résolu 36. Résoudre l'équation $y'' + y = x + \cos 3x, \qquad (E).$

Solution : L'équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$, elle admet deux racines complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$. Donc, la solution générale de l'équation homogène est donnée par :

$$y_h = A\cos(x) + B\sin(x); \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

On remarque que $y_1(x) = x$ est solution particulière de l'équation $y'' + y = x, \qquad (E_1)$.
Une solution particulière de (E_2) : $\quad y'' + y = \cos 3x$, est de la forme $y_{p_2} = a\cos 3x + b\sin 3x$. En remplaçant dans (E_2) , on trouve que

$$-8a\cos 3x - 8b\sin 3x = \cos 3x,$$

donc $a = -\dfrac{1}{8}$ et $b = 0$. Par conséquent, une solution particulière de l'équation (E) est donnée par

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = x - \frac{1}{8}\cos 3x.$$

Et la solution générale de (E) est

$$y = y_h + y_p = A\cos(x) + B\sin(x) + x - \frac{1}{8}\cos 3x; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.155. Lorsque le second membre n'est pas l'une des formes indiquées précédemment, on cherche une solution particulièere de (E) en utilisant la méthode de variation de la constante.

3- Cas général : Méthode de Variation de la Constante :
Soit y_h la solution de l'équation sans second membre $(E.H)$. Donc, $y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, où y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de $(E.H)$.
La méthode de variation de la constante consiste à remplaçer les deux constantes A et B par des fonctions $A(x)$ et $B(x)$ et chercher une solution particulière de (E) de la forme

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x).$$

On impose de plus la condition suivante

$$A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0.$$

Ce qui donne

$$y_p'(x) = A(x)y_1'(x) + B(x)y_2'(x).$$

On calcule ensuite y'', on remplace dans l'équation (E) et on utilise le fait que y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation $(E.H)$, on trouve que

$$A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a}.$$

Il faut donc résoudre le système suivant dont les inconnus sont $A'(x)$ et $B'(x)$

$$\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0, \\ A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = \dfrac{f(x)}{a} \end{cases}$$

Comme y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, alors le déterminant

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_1'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0.$$

Les deux solutions du système sont

$$A'(x) = \frac{-f(x)y_2(x)}{aW} \quad \text{et} \quad B'(x) = \frac{-f(x)y_1(x)}{aW}.$$

On obtient donc les fonctions A et B en intégrant A' et B'.
Par suite, la solution particulière de (E) est

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x).$$

Exercice résolu 37. Résoudre l'équation $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}, \qquad (E).$

Solution : L'équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0$, est de racine double $r = 1$. Donc, la solution générale de l'équation homogène associée à (E) est donnée par :

$$y_h(x) = (Ax + B)e^x; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p(x) = xA(x)e^x + B(x)e^x, \quad \text{avec} \quad A, B \quad \text{sont deux fonctions dérivables.}$$

On a
$$y_p'(x) = A'(x)xe^x + B'(x)e^x + A(x)(x+1)e^x + B(x)e^x.$$
On impose la condition
$$A'(x)xe^x + B'(x)e^x = 0.$$
On trouve que
$$y_p''(x) = A'(x)(x+1)e^x + B'(x)e^x + A(x)(x+2)e^x + B(x)e^x.$$
En remplaçant dans l'équation (E), on obtient
$$A'(x)(x+1)e^x + B'(x)e^x = \frac{e^x}{1+x^2}.$$
Résolvons donc le système
$$\begin{cases} A'(x)xe^x + B'(x)e^x = 0, \\ A'(x)(x+1)e^x + B'(x)e^x = \dfrac{e^x}{1+x^2}. \end{cases}$$
On obtient
$$\begin{cases} A'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \\ B'(x) = -\dfrac{x}{1+x^2}. \end{cases}$$
C'est à dire $A(x) = \arctan x$ et $B(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
Donc, une solution particulière de l'équation (E) est donnée par
$$y_p(x) = \frac{1}{2}\Big(2x\arctan x - \ln(1+x^2)\Big)e^x.$$
Par conséquent, la solution générale de (E) est
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax+B)e^x + \frac{1}{2}\Big(2x\arctan x - \ln(1+x^2)\Big)e^x; \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

3.3 Exercices

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
(E_1) : $(1+x^2)y' + 2xy + x^2 = 0$,
(E_2) : $\sin^2(x)y' - \tan(x)y = \tan(x)$,
(E_3) : $y'' - 3y' + 2y = x^3$,
(E_4) : $y'' + y' + y = \cos(2x)$,
(E_5) : $y'' - 2y' + y = x + xe^{-x}$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
(Sep) : $(\cos t)y' = (\sin t)y^4$,
(Ber) : $y' = y + ty^3$,
(Ric) : $y' = (t-1)y + y^2 - t$, sachant qu'elle admet une solution particulière constante.

Exercice 3. En posant $u(x) = (1 + x^2)y(x)$, résoudre l'équation différentielle suivantes :

$$(E) : \quad (1 + x^2)y'' + 4xy' + (1 - x^2)y = 0.$$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \quad y'' - 4y' + 4y = f(x).$$

Où f est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière dans ces deus cas : $f(x) = e^{2x}$ et $f(x) = e^{-2x}$.
3. Donner les solutions de (E) si $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$. Puis, déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $h(0) = 1 = h'(0)$.

Bibliographie

[1] Mohammed El Amrani, Suites et séries numériques Suites et séries de fonctions, Ellipes, ISBN 978-2-7298-70393.

[2] B. Beck, I. Selon et C. Feuillet, Maths MP Tout en un, Hachette Éducation, 2006.

[3] Jean-Yves Briend, Petit traité d'intégration, EDP Sciences, 2014.

[4] N.Piskounov, Calcul Différentiel et Intégral. Tome II. Edition Mir.(1980)Moscou.

[5] J.Dixmier, Cours de mathématiques du premier cycle. 2^{eme} année. Edition Bordas, Paris 1977.

[6] B.Calvo, J.Doyen, A.Calvo, F.Boschet, Exercices d'analyse. 1^{er} cycle scientifique préparation aux grandes écoles.2^{eme} Année. Edition Armand Colin, Paris1971.