Table des matières

1 Suites et Séries de Fonctions **3**
1.1 Suites de fonctions . . . 3
1.1.1 Convergence simple . . . 3
1.1.2 Convergence uniforme . . . 4
1.1.3 Propriétés des limites uniformes de suites de fonctions . 6
1.2 Séries de Fonctions . . . 10
1.2.1 Modes et critères de convergence . . . 10
1.2.2 Propriétés des sommes de séries de fonctions . . . 14

2 Séries Entières **17**
2.1 Séries entières et rayon de convergence . . . 17
2.2 Opérations sur les séries entières . . . 22
2.3 Convergence uniforme et propriétés des sommes de séries entières 24

3 Séries de Fourier **29**
3.1 Séries trigonométriques . . . 29
3.2 Séries de Fourier . . . 31

4 Calculs des Résidus **35**
4.1 Fonctions holomorphes . . . 35
4.1.1 Rappels sur les nombres complexes . . . 35
4.1.2 Quelques parties de bases de l'ensemble $\mathbb{C}$ . . . 35
4.1.3 Fonctions holomorphes . . . 35
4.2 Théorie de Cauchy . . . 37
4.2.1 Intégrale curviligne . . . 37
4.2.2 Théorème et formule de Cauchy . . . 38
4.3 Théorème des résidus et applications . . . 39
4.3.1 Théorème des résidus . . . 39
4.3.2 Applications au calcul d'intégrales . . . 41

Chapitre 1

Suites et Séries de Fonctions

1.1 Suites de fonctions

1.1.1 Convergence simple

Définition 1.1 *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, ou que f est la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$:*

$$\forall x \in I, \ \ \forall \epsilon > 0, \ \ \exists N_{x,\epsilon} \in \mathbb{N}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_{x,\epsilon} \ \ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Remarque 1.1 *Il est naturel de se demander si les propriétés des fonctions f_n se transmettent à leur limite simple f; l'exemple suivant montre que la limite simple de fonctions continues n'est pas continue en général :*

Exemple 1.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0,1]$; alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$, ainsi la limite simple f n'est pas continue sur $[0,1]$ alors que pour tout $n \in N$, la fonction f_n l'est.*

Proposition 1.1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers f, alors on a :*

1. *Si les fonctions f_n sont positives sur I à partir d'un certain rang, f est positive sur I;*
2. *Si les fonctions f_n sont croissantes (resp. décroissantes) sur I à partir d'un certain rang, f est croissante (resp. décroissante) sur I.*

Preuve
La preuve repose sur la conservation des inégalités larges par passage à la limite.

1.1.2 Convergence uniforme

Définition 1.2 (Norme infinie)
Considérons une fonction f définie sur un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; on suppose que f est bornée sur I i.e

$$\exists M > O \text{ tel que } \forall x \in I,\ |f(x)| \leq M$$

Alors la fonction $|f|$ est majorée donc admet une borne supérieure que l'on note $||f||_\infty$ et que l'on appelle norme infinie de f :
Si f n'est pas bornée sur I, on pose $||f||_\infty = +\infty$.

Définition 1.3 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$; on dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si et seulement si la suite numérique $(||(f_n - f)||_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 i.e*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Définition 1.4 *On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ converge uniformément localement sur I si elle converge uniformément sur tout segment contenu dans I.*

Proposition 1.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I ; alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I.*

Exemple 1.2 *Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0,1]$; alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$, ce ne peut être que vers sa limite simple f.*
Etudions donc la suite numérique $(||(f_n - f)||_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$:
Si $x \in [0,1[$, alors $|f_n(x) - f(x)| = x^n$ et $|f_n(1) - f(1)| = 0$ donc

$$||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1$$

et ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément sur* $[0,1]$, *ni sur* $[0,1[$.

Par contre si on fixe $a \in [0,1[$, *alors pour tout* $x \in [0,a]$, $\sup |f_n(x) - f(x)| = a^n$ *qui tend vers* 0 *et ainsi la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $[0,a]$. *On constate donc que la convergence uniforme locale sur* $[0,1[$ *n'entraîne pas la convergence uniforme sur* $[0,1[$.

Il n'est pas toujours possible de calculer explicitement $||f_n - f||_\infty$ comme on vient de le faire, d'où l'utilité de la proposition suivante :

Proposition 1.3 *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *si et seulement si il existe une suite réelle* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergeant vers 0 telle que*

$$\forall x \in I, \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; |f_n(x) - f(x)| \leq a_n.$$

Preuve
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I, il suffit de prendre $a_n = ||(f_n - f)||_\infty$.
Réciproquement, s'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que

$$\forall x \in I, \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$$

alors on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; ||f_n - f||_\infty \leq a_n$$

et ainsi $||f_n - f||_\infty \longrightarrow 0$.

Proposition 1.4 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur un sous-ensemble* I *de* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et soit* f *une fonction définie sur* I *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *; s'il existe une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* I *telle que la suite numérique* $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* 0, *alors la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément vers* f *sur* I.

Preuve
En effet on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq ||f_n - f||_\infty.$$

Alors si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I on a $||f_n - f||_\infty \longrightarrow 0$; on en déduit alors $|f_n(x_n) - f(x_n)| \longrightarrow 0$ ce qui est absurde ; donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur I.

Théorème 1.1 (*Critère de Cauchy de convergence uniforme*)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément si et seulement si on a :

$$\forall\epsilon>0,\ \ \exists N\in\mathbb{N},\ \ \forall m,n\in\mathbb{N},\ \ m>n\geq N\ \ \Longrightarrow ||f_n-f_m||_\infty<\epsilon.$$

Preuve

Supposons le critère de Cauchy vérifié, alors on en déduit que pour tout $\epsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall x\in I,\forall m,n\in\mathbb{N},m>n\geq N\Longrightarrow|f_n(x)-f_m(x)|\leq||f_n-f_m||_\infty<\frac{\epsilon}{2}\ \ (*)$$

par conséquent pour tout $x\in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy donc converge vers une limite que l'on notera $f(x)$. Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I. Or si on fait tendre m vers $+\infty$ dans $(*)$ on obtient

$$\forall x\in I,\ \ \forall n\in\mathbb{N},\ \ n\geq N\Longrightarrow|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$$

et ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.
Réciproquement, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, alors

$$\forall\epsilon>0,\ \ \exists N\in\mathbb{N},\ \ \forall n\in\mathbb{N},\ \ n\geq N\Longrightarrow||f_n-f||_\infty<\frac{\epsilon}{2}.$$

Alors l'inégalité triangulaire nous donne

$$m>n\geq N\Longrightarrow||f_n-f_m||_\infty<||f_n-f||_\infty+||f-f_m||_\infty<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

et le critère de Cauchy de convergence uniforme est vérifié.

1.1.3 Propriétés des limites uniformes de suites de fonctions

Théorème 1.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ de limite uniforme f sur I. Alors la fonction f est bornée sur I si et seulement si il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, la fonction f_n est bornée sur I.*

Preuve
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, donc pour $\epsilon = 1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_1 \Longrightarrow ||f_n - f||_\infty < 1.$$

Supposons qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que les fonctions f_n soient bornées sur I pour tout $n \geq N_2$, alors pour $m = max(N_1, N_2)$, on a :

$$||f||_\infty \leq ||f - f_m||_\infty + ||f_m||_\infty < 1 + ||f_m||_\infty$$

et ainsi f est bornée sur I.

Réciproquement, si f est bornée sur I, on a pour tout $n \geq N_1$,

$$||f_n||_\infty \leq ||f_n - f||_\infty + ||f||_\infty < 1 + ||f||_\infty$$

et ainsi les fonctions f_n sont bornées sur I pour tout $n \geq N_1$.

Théorème 1.3 *(***Théorème d'interversion des limites***)*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, de limite uniforme f sur I et soit a un point de I.
Si les f_n sont continues en $a \in I$, alors f l'est aussi et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to a}(f_n(x))) = \lim_{x\to a}(\lim_{n\to+\infty}(f_n(x)))$$

Théorème 1.4

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction f sur I et soit x_0 un point de I; si f_n est continue en x_0 pour n assez grand, alors f est continue en x_0.*
2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément localement vers une fonction f sur I; si f_n est continue sur I pour n assez grand, alors f est continue sur I.*

Preuve
a) On applique le Théorème précédent pour $a = x_0$:

$$\lim_{x\to+\infty}(\lim_{x\to x_0}(f_n(x))) = \lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to+\infty}(f_n(x)))$$

or la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément donc simplement vers f sur I, et pour tout n, f_n est continue en x_0 d'où

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n(x_0)) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

i.e

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

donc f est continue en x_0.

b) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément localement vers une fonction f sur I, alors pour tout $x \in I$, on considère un segment I_x de I contenant x et on applique $a)$: la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I_x et les fonctions f_n sont continues en x donc f est continue en x. Donc f est continue sur I.

Théorème 1.5 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$; alors la suite numérique $(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, i.e on peut intervertir l'intégrale numérique et la limite :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve
On suppose $a \le b$ (sinon on écrit $\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f_n(x)\mathrm{d}x$). On a alors

$$|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| = |\int_a^b (f_n(x) - f(x))\mathrm{d}x| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x$$

or on a pour tout $x \in [a,b]$, $|f_n(x) - f(x)| \le ||f_n - f||_\infty$, d'où

$$|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x| \le \int_a^b ||f_n - f||_\infty \mathrm{d}x = (b-a)||f_n - f||_\infty.$$

Or $||f_n - f||_\infty$ tend vers 0 puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Théorème 1.6
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; on suppose que les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I;*
2. *la suite des dérivées $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément localement vers une fonction g sur I;*
3. *il existe un point a de I telle que la suite numérique $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément localement sur I vers une fonction f qui est de classe C^1 sur I et telle que $f^{'} = g$.

Preuve
Notons l la limite de la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ et posons pour tout $x \in I$

$$f(x) = l + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

La fonction g étant continue sur I comme limite uniforme des fonctions continues $f_n^{'}$, f est dérivable sur I et $f^{'} = g$. D'autre part, les fonctions f_n étant de classe C^1 sur I, on a pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n^{'}(t)\mathrm{d}t$$

d'où pour tout $x \in I$

$$f_n(x) - f(x) = f_n(a) - l + \int_a^x (f_n^{'}(t) - g(t))\mathrm{d}t$$

Considérons maintenant deux éléments u et v de I tels que $u < v$ et montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[u, v]$: pour tout $x \in [u, v]$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(a) - l| + |\int_a^x (f_n^{'}(t) - g(t))\mathrm{d}t|.$$

Or pour tout $x \in [u, v]$, x et a appartiennent à l'intervalle $[\alpha, \beta]$ où $[\alpha, \beta]$ désigne $[u, v]$ si $u \leq a \leq v$, $[a, v]$ si $a < u$ et $[u, a]$ si $a > v$, d'où

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - l| + |x - a| sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f_n^{'}(t) - g(t)|$$

Or, pour tout $x \in [u, v]$, on a $|x - a| \leq M = max(|a - u|, |v - a|, |v - u|)$ suivant que $a \in [u, v]$ ou pas, d'où

$$sup_{x\in[u,v]} \mid f_n(x) - f(x) \mid \leq \mid f_n(a) - l \mid + M sup_{t\in[\alpha,\beta]} \mid f_n^{'}(t) - g(t) \mid .$$

Or la suite $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément localement vers g sur I, donc la suite $(sup_{t\in[\alpha,\beta]} \mid f_n^{'}(t) - g(t) \mid)_{n\in\mathbb{N}})$ converge vers 0 ; d'autre part la suite $(\mid f_n(a) - l \mid)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, on en déduit aussitôt que la suite $sup_{t\in[u,v]} \mid f_n^{'}(t) - g(t) \mid)_{n\in\mathbb{N}})$ tend vers 0 i.e que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[u, v]$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément localement vers f sur I.

Remarque 1.2 *Une limite uniforme de fonctions dérivables n'est pas dérivable en général. Considérons pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$*

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} .$$

Alors pour tout $n \geq 1$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la fonction $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0.

Théorème 1.7 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit k un entier ≥ 1; on suppose que les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *pourtout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^k sur I;*
2. *la suite des dérivées $k-iemes$ $(f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément localement vers une fonction g sur I;*
3. *il existe un point a de I telle que pour tout entier $m \in [0, k-1]$, la suite numérique $(f_n^m(a))_{n\in\mathbb{N}}$ onverge.*

Alors la suite$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément localement sur I vers une fonction f qui est de classe C^k sur I et telle que $f^{(k)} = g$.

Preuve
Récurrence sur k en utilisant Théorème .....

1.2 Séries de Fonctions

1.2.1 Modes et critères de convergence

Définition 1.5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; considérons la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$$

1. *On dit que la série $\sum u_n$ converge simplement sur I si pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum u_n(x)$ converge, i.e la suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite finie.*

2. *On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument simplement sur I si pour tout $x \in I$, la série réelle $\sum |u_n(x)|$ converge, i.e la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |u_k(x)|$ possède une limite finie.*

3. *On dit que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur I si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I i.e, si S désigne la limite uniforme de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $||S_n - S||_\infty$ tend vers 0.*

4. *On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument uniformément sur I si la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.*

5. *On dit que la série $\sum u_n$ converge normalement sur I si la série numérique $\sum ||u_n||_\infty$ converge.*

Proposition 1.5 (**Critère de Cauchy de convergence uniforme**)
Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; alors la série $\sum u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si

$$\forall \epsilon \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \geq N \Longrightarrow \forall x \in I, \ |\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)| < \epsilon$$

Proposition 1.6

1. *Une série de fonctions convergeant normalement sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ converge absolument uniformément sur I.*
2. *Une série $\sum u_n$ convergeant absolument uniformément sur I converge uniformément sur I et absolument simplement sur I.*
3. *Une série $\sum u_n$ convergeant uniformément sur I converge simplement sur I.*
4. *Une série $\sum u_n$ convergeant absolument simplement sur I converge simplement sur I.*

Preuve
a) Considérons une série de fonctions $\sum u_n(x)$ convergeant normalement sur un intervalle I de $I\!R$; on a pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||u_k||_\infty$$

alors, comme la série $\sum ||u_n||_\infty$ converge, on a d'après le critère de Cauchy des séries numériques,

$$\forall \epsilon \geq 0, \exists N \in I\!N, \forall m, n \in I\!N, m > n \geq N \Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{m} ||u_k||_\infty < \epsilon$$

donc la série de fonctions $\sum |u_n(x)|$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I d'où la série $\sum u_n(x)$ converge donc absolument uniformément sur I.
b) On a pour tout $x \in I$,

$$|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)|$$

donc une série $\sum u_n$ convergeant absolument uniformément sur I converge uniformément sur I par le critère de Cauchy uniforme.
c) La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
d) La convergence absolue d'une série numérique entraîne la convergence.

Proposition 1.7 *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $I\!R$ et à valeurs dans $I\!R$; si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur I, alors la suite $(u_n)_{n\in I\!N}$ converge uniformément vers 0 sur I.*

Preuve
En effet, si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur I, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in I\!N}$ converge uniformément vers une fonction S sur I et alors la suite $u_n = S_n - S_{n-1}$ converge uniformément vers $S - S = 0$.

Théorème 1.8 *(***Critère de Weierstrass** *)*
Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $I\!R$ et à valeurs dans $I\!R$; on suppose qu'il existe une série réelle convergente $\sum a_n$ telle que

$$\forall x \in I, \forall n \in I\!N, \quad |u_n(x)| \leq a_n$$

alors la série $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur I.

Preuve

On a par hypothèse

$$\forall x \in I, \forall n \in I\!N, \quad |u_n(x)| \leq a_n$$

Donc

$$\forall n \in I\!N, \quad ||u_n||_\infty \leq a_n$$

on en déduit aussitôt que la série $\sum |||u_n||_\infty$ converge par les régles de comparaison des série positives. Ainsi la série $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur I.

Théorème 1.9 (**Critère d'Abel uniforme**)
Soit $(u_n)_{n\in I\!N}$ une suite décroissante de fonctions définies sur un intervalle I de $I\!R$ et à valeurs dans $I\!R$ convergeant uniformément vers 0 sur I, et soit $(w_n)_{n\in I\!N}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $I\!R$ ou $C\!\!\!\!I$ vérifiant

$$\exists M > 0, \forall m, n \in I\!N, m > n \Longrightarrow \forall x \in I, |w_n(x)+w_{n+1}(x)+....+w_m(x)| \leq M.$$

Alors la série de fonctions $\sum v_n(x)w_n(x)$ converge uniformément.

Preuve
Par hypothèse on a :

$$\forall x \in I, \forall n \in I\!N, \sum_{k=n+1}^{+\infty} |v_n(x)w_n(x)| \leq M|v_{n+1}(x)|$$

d'où

$$\forall n \in I\!N, | \sum_{k=n+1}^{+\infty} |v_n(x)w_n(x)| \leq M||v_{n+1}(x)||_\infty$$

Or la suite $(v_n)_{n\in I\!N}$ converge uniformément vers 0 sur I donc $||v_{n+1}||_\infty$ tend vers 0 et ainsi le reste de la série $\sum v_n w_n$ converge uniformément vers 0, i.e la série $\sum v_n w_n$ converge uniformément.

Théorème 1.10 (**Critère de Leibniz uniforme**)
Soit $(v_n)_{n\in I\!N}$ une suite décroissante de fonctions définies sur un intervalle I de $I\!R$ et à valeurs dans $I\!R$ convergeant uniformément vers 0 sur I; alors la série alternée $\sum(-1)^n v_n$ converge uniformément sur I.

Preuve
Il suffit d'appliquer le critère d'Abel uniforme à la suite $w_n = (-1)^n$.

1.2.2 Propriétés des sommes de séries de fonctions

Théorème 1.11 *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $I\!R$ et à valeurs dans $I\!R$ convergeant uniformément localement sur I; alors si les fonctions u_n sont continues sur I pour tout $n \in I\!N$, la somme de la série $\sum u_n$ est une fonction continue sur I.*

Preuve
Il suffit d'appliquer le Théorème ...... à la suite des sommes partielles.

Théorème 1.12 *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies continues sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans $I\!R$ convergeant uniformément sur $[a,b]$; alors la série numérique $\sum(\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x)$ converge et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x) = \int_a^b (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x))\,\mathrm{d}x$$

Preuve
Il suffit d'appliquer le Théorème ...... à la suite des sommes partielles.

Théorème 1.13 *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $I\!R$ et à valeurs dans $I\!R$; on suppose que les 3 conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *pour tout $n \in I\!N$, u_n est de classe C^1 sur I;*
2. *la série des dérivées $\sum u_n'$ converge uniformément localement sur I ;*
3. *il existe un point a de I telle que la série numérique $\sum u_n(a)$ converge.*

Alors la série $\sum u_n$ converge uniformément localement sur I, sa somme est une fonction de classe C^1 sur I et on peut "dériver terme à terme"

$$\forall x \in I, (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x))' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

Preuve
Il suffit d'appliquer le Théorème ...... à la suite des sommes partielles.

Théorème 1.14 *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $I\!R$ et à valeurs dans $I\!R$ et soit k un entier ≥ 1 ; on suppose que les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *pour tout $n \in I\!N$, u_n est de classe C^k sur I;*

2. *la série* $\sum u_n^{(k)}$ *converge uniformément localement sur* I;
3. *il existe un point* a *de* I *tel que pour tout entier* $j \in [0, k-1]$ *la série numérique* $\sum u_n^{(j)}(a)$ *converge.*

Alors la série $\sum u_n$ *converge uniformément localement sur* I, *sa somme est une fonction de classe* C^k *sur* I *et on peut "dériver terme à terme "*

$$\forall x \in I, \forall j \in [0, k], (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x))^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}(x).$$

Preuve
Il suffit d'appliquer le Théorème ...... à la suite des sommes partielles.

Chapitre 2

Séries Entières

2.1 Séries entières et rayon de convergence

Définition 2.1 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes ; on appelle série entière de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de fonctions $\sum f_n(z)$ définies sur $\mathbb{C}$ par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \forall z \in \mathbb{C}, \quad f_n(z) = a_n z^n.$$

Théorème 2.1 *(Lemme d'Abel)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit z_0 un nombre complexe tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Preuve
La suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; |a_n z_0^n| \leq M$$

Si $z_0 = 0$, alors il n'existe aucun $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$.
Si $z_0 \neq 0$, on a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n||\frac{z}{z_0}|^n \leq M|\frac{z}{z_0}|^n$$

or $|\frac{z}{z_0}|^n < 1$ donc la série géométrique $\sum |\frac{z}{z_0}|^n$ converge ; on en déduit que la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Corollaire 2.1 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit z_0 un nombre complexe tel que la série numérique $\sum a_n z_0^n$ converge ; alors pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

Preuve
En effet, comme la série $\sum a_n z_0^n$ converge, le terme général $a_n z_0^n$ tend vers 0 donc la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et on applique alors le Lemme d'Abel.

Théorème 2.2 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière ; alors l'ensemble*

$$I = \{r \geq 0/ \text{ la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \}$$

est non vide. De plus I est un intervalle de $\mathbb{R}$ dont la borne inférieure est 0.

Preuve
Considérons $I = \{r \geq 0/$ la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\}$: $I \neq \emptyset$ car il contient 0, donc I admet une borne supérieure $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. De plus pour tout $r_0 \in I$, et pour tout $r \in [0, r_0]$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n r^n| \leq |a_n r_0^n|$$

donc la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée également i.e $r \in I$, alors I est un intervalle de borne inférieure 0.

Définition 2.2 *On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure de I (qui est un élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$)*

Théorème 2.3 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière ; alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

1. *pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument ;*
2. *pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge.*

Remarque 2.1

1. *On appelle disque de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R, $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < R\}$.*
2. *Si on se limite à l'étude de la série entière $\sum a_n z^n$ pour z réel , on appelle intervalle de convergence de la série entière l'intervalle ouvert $]-R, R[$.*

Preuve
Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$; montrons que R vérifie les conditions (1) et (2) :
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, alors il existe $r > 0$ tel que $|z| < r < R$, or I est un intervalle de borne inférieure 0 et de borne supérieure R donc $r \in I$ et

ainsi la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; or $|z| < r$, donc d'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, alors $|z| \notin I$ donc la suite $(a_n|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, par conséquent la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, on en déduit que la série $\sum a_n z^n$ diverge.

Réciproquement, soit R' vérifiant les conditions (1) et (2) : montrons que $R' = R$. Considérons un réel r vérifiant $0 \leq r < R'$; alors la série $\sum a_n r^n$ converge, donc la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 donc est bornée, ainsi $r \in I$, on en déduit alors que $[0, R'[\subset I$, d'où $R' \leq R$.
Supposons $R' < R$, alors il existe r_1 et r_2 tels que $R' < r_1 < r_2 < R$; comme $r_2 < R$, $r_2 \in I$ i.e la suite $(a_n r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On en déduit alors que la série $\sum a_n r_1^n$ converge absolument d'après le lemme d'Abel, ce qui est absurde puisque $r_1 > R'$ implique la divergence de la série $\sum a_n r_1^n$. Donc $R = R'$.

Remarque 2.2 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

a) Si $R = 0$, la série $\sum a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$;

b) Si $R = +\infty$, la érie $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$;

c) On ne peut rien dire a priori du comportement de la série $\sum a_n z^n$ si $|z| = R$: on verra dans la suite des exemples pour lesquels la série converge en tout point du bord du disque de convergence, d'autres pour lesquels la série diverge en tout point du bord du disque de convergence et enfin d'autres pour lesquels la série converge seulement en certains points du bord du disque de convergence ;

d) La série entière $\sum |a_n| z^n$ a pour rayon de convergence R.

Exemple 2.1 *La série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1 ; en effet si $|z| < 1$, la série converge absolument et si $|z| > 1$, la suite $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ donc la série $\sum z^n$ diverge.*

Théorème 2.4 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière ; alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est l'unique élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

a) pour tout réel r tel que $0 \leq r < R$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ;

b) pour tout réel r tel que $r > R$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Preuve
Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$; montrons que R vérifie les conditions a) et b) :

On sait que pour tout réel r tel que $0 \leq r < R$, la série $\sum a_n r^n$ converge absolument donc la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Soit r un réel tel que $r > R$: alors $r \notin I$, i.e la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc elle ne tend pas vers 0.

Réciproquement, soit R' vérifiant les conditions a) et b) : montrons que $R' = R$. Considérons un réel r vérifiant $0 \leq r < R'$; alors la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 donc est bornée : ainsi $r \in I$, on en déduit donc que $[0, R'[\subset I$, d'où $R' \leq R$.

Supposons $R' < R$, alors il existe r tel que $R' < r < R$: comme $r < R$, alors la série $\sum a_n r^n$ converge absolument donc la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 ce qui est en contradiction avec le fait que $r > R'$: on en déduit que $R' = R$.

Proposition 2.1 *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On note R_1 le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ et R_2 le rayon de convergence de la série $\sum b_n z^n$.*

a) S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Longrightarrow |a_n| \leq |b_n|$, alors $R_2 \leq R_1$.

b) Si $|a_n| \sim |b_n|$ au voisinage de $+\infty$, alors $R_1 = R_2$.

Preuve
a) S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Longrightarrow |a_n| \leq |b_n|$, alors on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \geq N, \ |a_n z^n| \leq |b_n z^n|$$

or si $|z| < R_2$, la série $\sum b_n z^n$ converge absolument, donc par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument : on en déduit que $R_1 \geq R_2$.

b) Si $|a_n| \sim |b_n|$ au voisinage de $+\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $|a_n z^n| \sim |b_n z^n|$ au voisinage de $+\infty$, donc les deux séries à termes positifs $\sum |a_n z^n|$ et $\sum |b_n z^n|$ sont de même nature : on en déduit alors que $R_1 = R_2$.

Exemple 2.2 *La série entière $\sum \sin(n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, en effet :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |\sin(n)| \leq 1$$

or la série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1, donc $R \geq 1$.
D'autre part, la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc la série entière $\sum \sin(n)z^n$ diverge en $z = 1$, d'où $R = 1$.

Exemple 2.3 *La série entière $\sum \frac{n}{n+1}z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, en effet :*

$$\frac{n}{n+1} \sim 1 \quad \text{au voisinage de} \quad +\infty$$

donc les séries entières $\sum \frac{n}{n+1}z^n$ et $\sum z^n$ ont le même rayon de convergence, à savoir 1.

Théorème 2.5 *(Application des règles de Cauchy et d'Alembert)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

a) S'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $a_n \neq 0$ et si la suite $(|\frac{a_{n+1}}{a_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors $R = \frac{1}{l}$ (avec la convention $\frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

b) Si la suite $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors $R = \frac{1}{l}$.

Preuve
a) On applique la règle d'Alembert à la série $\sum a_n z^n$:

$$\forall z \in C^*, \forall n \geq N, \quad \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| \to l|z|$$

ainsi la série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $l|z| < 1$ i.e si $|z| < \frac{1}{l}$ et diverge si $l|z| > 1$ i.e si $|z| > \frac{1}{l}$: on en déduit que $R = \frac{1}{l}$.

b) Raisonnement analogue en appliquant la règle de Cauchy à la série $\sum a_n z^n$.

Exemple 2.4 *La série entière $\sum \frac{2n+1}{n+3}z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$; en effet si on note $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$ on a*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2n+3}{n+4}\right| \left|\frac{n+3}{2n+1}\right| \to 1.$$

Exemple 2.5 *La série entière $\sum \frac{1}{n!}z^n$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$; en effet si on note $a_n = \frac{1}{n!}$ on a*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0.$$

Proposition 2.2 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*.*

1. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}^*$*, la série entière* $\sum \lambda^n a_n z^n$ *a pour rayon de convergence* $\frac{R}{|\lambda|}$ *;*
2. *Pour tout entier* $p \geq 1$*, la série entière* $\sum a_n z^{np}$ *a pour rayon de convergence* $\sqrt[p]{R}$*.*

Preuve
1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, et tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda^n a_n z^n = a_n(\lambda z)^n$$

ainsi la série $\sum \lambda^n a_n z^n$ converge si $|\lambda z| < R$ i.e si $|z| < \frac{R}{|\lambda|}$ et diverge si $|\lambda z| > R$ i.e si $|z| > \frac{R}{|\lambda|}$, donc le rayon de convergence de la série $\sum \lambda^n a_n z^n$ est $\frac{R}{|\lambda|}$.

2) La série $\sum a_n z^{np}$ converge si $|z|^p < R$ i.e si $|z| < \sqrt[p]{R}$ et diverge si $|z|^p > R$ i.e si $|z| > \sqrt[p]{R}$ donc le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^{np}$ est $\sqrt[p]{R}$.

2.2 Opérations sur les séries entières

Théorème 2.6 *(Multiplication par un scalaire)*
Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *et soit* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *; alors la série entière* $\sum(\lambda a_n)z^n$ *a pour rayon de convergence* R *et pour tout* $z \in D(0,R)$*, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n)z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Preuve
Comme $\lambda \neq 0$, les séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum(\lambda a_n)z^n$ sont de même nature, donc ont le même rayon de convergence ; de plus sur le disque de convergence, on a l'égalité voulue.

Théorème 2.7 *(Somme de deux séries entières)*
Soient $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R_1 *et* $\sum b_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R_2 *; alors le rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum(a_n + b_n)z^n$ *vérifie :*

$$Si\ \ R_1 \neq R_2,\ R = inf(R_1, R_2)$$

$$Si\ \ R_1 = R_2,\ \ R \geq R_1 = R_2.$$

De plus pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \inf(R_1, R_2)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Preuve
Si $|z| < \inf(R_1, R_2)$ alors les séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent donc la série somme $\sum(a_n+b_n)z^n$ converge : on en déduit que $R \geq inf(R_1, R_2)$ et que pour tout z tel que $|z| < \inf(R_1, R_2)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Si $R_1 \neq R_2$, par exemple $R_1 < R_2$, considérons $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_1 < |z| < R_2$; alors la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge et la série numérique $\sum b_n z^n$ converge donc la série somme diverge : on en déduit que $R \leq R_1 = \inf(R_1, R_2)$, d'où $R = \inf(R_1, R_2)$.

Remarque 2.3 *On ne peut rien dire sur le rayon de convergence de la série somme quand $R_1 = R_2$: par exemple les séries entières $\sum z^n$ et $\sum(-1)^n z^n$ ont même rayon de convergence 1 mais leur série somme est la série nulle de rayon $+\infty$.*

Théorème 2.8 *(Produit de deux séries entières)*
Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_1 et $\sum b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_2 ; considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

alors la série entière $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geq \inf(R_1, R_2)$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \inf(R_1, R_2)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Preuve
Si $|z| < \inf(R_1, R_2)$ alors les séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument donc leur série produit également ; or le terme général de cette série produit est donné par

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k z^k)(b_{n-k} z^{n-k}) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = c_n z^n$$

Donc la série entière $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geq \inf(R_1, R_2)$ et si $|z| < \inf(R_1, R_2)$, on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (a_k z^k)(b_{n-k} z^{n-k}) \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

Remarque 2.4 *Il existe des séries entières ayant des rayons de convergence différents et dont la série produit a un rayon de convergence $R > \inf(R_1, R_2)$: posons en effet*

$$a_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \textit{et } b_0 = 1, \ b_1 = -1, \ b_n = 0 \ \textit{pour } n \geq 2$$

alors $R_1 = 1$, $R_2 = +\infty$ et comme $c_n = 0$ pour $n \geq 1$, $R = +\infty$.

2.3 Convergence uniforme et propriétés des sommes de séries entières

Théorème 2.9 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul.*
Alors pour tout réel R' tel que $0 < R' < R$, la série converge uniformément sur le disque fermé $\bar{D}(0, R') = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leq R'\}$.

Preuve
Soit $R' \in]0, R[$ et considérons un réel r tel que $R' < r < R$; alors on a

$$\forall z \in \bar{D}(0, R'), \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |a_n z^n| = |a_n| r^n \left(\frac{|z|}{r} \right)^n$$

or $0 < r < R$ donc la suite $(a_n r^n)$ est bornée : il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$; $|a_n| r^n \leq M$, d'où

$$\forall z \in \bar{D}(0, R'), \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |a_n z^n| \leq M \left(\frac{R'}{r} \right)^n.$$

Or la série géométrique $\sum \left(\frac{R'}{r} \right)^n$ converge puisque $\left| \frac{R'}{r} \right| < 1$. On en déduit alors que la série $\sum a_n z^n$ converge normalement donc uniformément sur $\bar{D}(0, R')$.

Théorème 2.10 *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul ; alors la somme de la série $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une fonction continue sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$.*

Preuve
Pour tout $n \in I\!N$ la fonction $f_n(x) = a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$ et la série converge uniformément localement sur $]-R, R[$ d'après le Théorème précédent, donc la fonction somme de la série entière est continue sur $]-R, R[$.

Proposition 2.3 *Soit $r > 0$ et soit $\sum a_n z^n$ une série entière de somme $S(z)$ qui converge en tout point du disque ouvert $D(0, r)$. On suppose qu'il existe un point z_0 vérifiant $|z_0| = r$ et tel que la fonction $t \mapsto S(tz_0)$ définie sur $[0, 1[$ n'admet pas de limite finie quand $t \to 1^-$. Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à r.*

Preuve
Soit $z \in D(0, r)$, alors si on prend z_1 tel que $|z| < |z_1| < r$ la série numérique $\sum a_n z_1^n$ converge puisque $z_1 \in D(0, r)$, donc la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument. On en déduit que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ vérifie $R \geq r$. Si $R > r = |z_0|$, alors la série entière (de la variable t) $\sum (a_n z_0^n) t^n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ puisque $|tz_0| \leq |x_0| < R$, donc la fonction $t \mapsto S(tz_0)$ est continue en 1^- ce qui contredit l'hypothèse, donc $R = r$.

Théorème 2.11 *(Théorème d'Abel)*
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et de somme S ; on suppose que la série converge en un point z_0 de $\mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R$, alors on a :

$$\lim_{t \to 1^-} S(tz_0) = S(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n.$$

Preuve
On considère la série entière $\sum a_n z_0^n t^n$ de la variable t ; posons pour tout $t \in [0, 1]$ et tout entier n

$$v_n(t) = t^n \quad \text{et} \quad w_n = a_n z_0^n.$$

Comme la série numérique $\sum a_n z_0^n$ converge, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in I\!N,\ \forall n, m \in I\!N,\ m > n \geq N \Longrightarrow \left| \sum_{k=n}^{m} w_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

or la suite $(v_n(t))_{n \in I\!N}$ est une suite décroissante de fonctions positives, donc d'après la transformation d'Abel, on a

$$\forall t \in [0, 1],\ \forall n, m \in I\!N,\ m > n \geq N \Longrightarrow \left| \sum_{k=n}^{m} w_k v_k(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} v_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Il résulte alors du critère de Cauchy uniforme que la série entière $\sum a_n z_0^n t^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ donc la somme de la série est continue sur $[0,1]$. Or on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t) w_n = \begin{cases} S(tz_0) & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n & \text{si} \quad t = 1 \end{cases}$$

La continuité à gauche en 1 nous donne alors

$$\lim_{t \to 1^-} S(tz_0) = S(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n.$$

Définition 2.3 *On appelle série dérivée d'une série entière* $\sum a_n x^n$ *la série* $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$.

Proposition 2.4 *Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

Preuve
Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et R' le rayon de convergence de la série dérivée $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$. On a

$$\forall n \in I\!N, \quad |a_{n+1} z^{n+1}| \leq (n+1)|a_{n+1} z^{n+1}| = (n+1)|a_{n+1} z^n||z|.$$

Si $|z| < R'$, la série $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ converge absolument, il en est donc de même de la série $\sum a_{n+1} z^{n+1}$ et donc de la série $\sum a_n z^n$. On en déduit que $R \geq R'$.
Si $|z| < R$, considérons un réel r tel que $|z| < r < R$, alors on a

$$\forall n \in I\!N, \; |(n+1) a_{n+1} z^n| = \frac{n+1}{r} \left(\frac{|z|}{r} \right)^n |a_{n+1}| r^{n+1}.$$

Or $\frac{|z|}{r} < 1$, donc la suite $\left(\frac{n+1}{r} \left(\frac{|z|}{r} \right)^n \right)$ converge vers 0 donc est bornée : il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in I\!N, \; \frac{n+1}{r} \left(\frac{|z|}{r} \right)^n \leq M$$

d'où

$$\forall n \in I\!N, \; |(n+1) a_{n+1} z^n| \leq M |a_{n+1}| r^{n+1}.$$

Or la série $\sum a_{n+1} r^{n+1}$ converge absolument puisque $r < R$ donc il en est de même de la série $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$, on en déduit $R' \geq R$ et ainsi $R' = R$.

Théorème 2.12 *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul; alors sa somme S est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-R,R[$ de convergence et on peut "dériver terme à terme" : pour tout entier $p \geq 1$, et tout $x \in]-R,R[$ on a :*

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)....(n-p+1)a_n x^{n-p}.$$

Exemple 2.6 *Considérons la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$. Il est simple de voir que $R = 1$, alors la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et on peut dériver terme à terme sur $]-1,1[$ et on a pour tout $x \in]-1,1[$*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

D'où $S(x) = -\ln(1-x)$ puisque $S(0) = 0$. Or d'après le critère de Leibninz la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est continue en $x = -1$; on en déduit alors l'identité suivante $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

Théorème 2.13 *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul de somme $S(x)$, alors on a :*

1. *La fonction $S(x)$ est intégrable sur tout segment $[a,b]$ contenu dans l'intervalle de convergence $]-R,R[$ et on a*

$$\int_a^b (\sum a_n x^n)dx = \sum a_n \int_a^b x^n dx = \sum a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

2. *La fonction $S(x)$ admet pour ensemble de primitives sur l'intervalle de convergence $]-R,R[$ les fonctions $F_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \lambda$ où λ décrit $\mathbb{R}$.*

Définition 2.4 *On définit les fonctions $\cos(z)$, $\sin(z)$, $ch(z)$ et $sh(z)$ comme suit :*

$\cos(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
$\sin(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$sh(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$ch(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Proposition 2.5 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :*
$\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
$\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
$sh(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$
$ch(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$

Remarque 2.5 *Les deux fonctions* $\cos(z)$ *et* $\sin(z)$ *ne sont pas bornées sur* $\mathbb{C}$.

Chapitre 3

Séries de Fourier

Séries trigonométriques.
Séries de Fourier.

3.1 Séries trigonométriques

1. Soit $(c_n)_{n\in Z}$ une famille de nombres complexes : la notation $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ désigne $c_0 + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (c_n + c_{-n})$. En cas de convergence de la série, on notera
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n = c_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (c_n + c_{-n})$$
2. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: la notation $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n$ désigne la série de fonctions $\varphi_0 + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (\varphi_n + \varphi_{-n})$. En cas de convergence de la série, on notera
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n = \varphi_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\varphi_n + \varphi_{-n})$$

Remarque 3.1 *Pour que la série converge simplement (resp. uniformément) sur une partie I de $\mathbb{R}$, il est suffisant (mais non nécessaire) que les deux séries convergent simplement (resp. uniformément) sur I.*

Définition 3.1 *On dit qu'une série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est une série trigonométrique si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

1. *f_0 est une appplication constante que l'on notera $f_0(x) = \frac{a_0}{2}$ pour un certain a_0 dans $\mathbb{R}$;*

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe a_n et b_n dans $\mathbb{C}$ tels que f_n s'écrit sous la forme pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.*

Une série trigonométrique s'écrit donc sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

En convenant que $b_0 = 0$, et en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad et \quad c_{-n} = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

elle s'écrit aussi sous la forme (à voir)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

Réciproquement une série de fonctions de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

si on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad et \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Ainsi une série trigonométrique peut être considérée comme une série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$

Proposition 3.1 *Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes et notons*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad et \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

1. *Si les séries à termes positifs $\sum \mid c_n \mid$ et $\sum \mid c_{-n} \mid$ sont convergentes, alors la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est normalement (donc uniformément) convergente sur $\mathbb{R}$.*
2. *Si les séries à termes positifs $\sum \mid a_n \mid$ et $\sum \mid b_n \mid$ sont convergentes, alors la série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est normalement (donc uniformément) convergente sur $\mathbb{R}$.*
3. *Les séries à termes positifs $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ sont convergentes si et seulement si les séries à termes positifs $\sum |c_n|$ et $\sum |c_{-n}|$ sont convergentes.*

Proposition 3.2

1. *S'il existe un entier* $n_0 \in I\!N$ *tel que les suites* $(c_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(c_{-n})_{n\geq n_0}$ *sont réelles, décroissantes et tendent vers* 0*, alors la série trigonométrique* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ *converge simplement sur* $I\!R - 2\pi\mathbb{Z}$ *et uniformément sur tout intervalle de la forme* $[\alpha + 2k\pi, 2\pi - \alpha + 2k\pi]$ *où* $0 < \alpha < \pi$ *et* $k \in \mathbb{Z}$.
2. *S'il existe un entier* $n_0 \in I\!N$ *tel que les suites* $(a_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(b_n)_{n\geq n_0}$ *sont réelles, décroissantes et tendent vers* 0*, alors la série trigonométrique* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ *converge simplement sur* $I\!R - 2\pi\mathbb{Z}$ *et uniformément sur tout intervalle de la forme* $[\alpha + 2k\pi, 2\pi - \alpha + 2k\pi]$ *où* $0 < \alpha < \pi$ *et* $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3.3

1. *L'ensemble* E *des points de* $I\!R$ *en lesquels une série trigonométrique converge est stable par toute translation* $x \to x + 2k\pi$ *où* $k \in \mathbb{Z}$ *et la fonction somme de cette série définie sur* E *est* 2π*-périodique.*
2. *La fonction somme d'une série trigonométrique est continue sur tout intervalle de* $I\!R$ *sur lequel la série converge uniformément.*

Théorème 3.1 *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ *une série trigonométrique convergeant uniformément sur un intervalle de la forme* $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ *où* $\alpha \in I\!R$ *(donc sur* $I\!R$*) et* f *sa somme, alors on a :*

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

et si on écrit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

alors

$$\forall n \in I\!N,\ \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad et \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

3.2 Séries de Fourier

On vient de voir que pour toute série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ convergeant uniformément sur $I\!R$, on peut exprimer les coefficients de la série en fonction de la fonction somme f de la série par la formule

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

On peut examiner le problème inverse suivant : si f est une fonction 2π-périodique telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction $x \to f(x)e^{-inx}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$, et si on pose

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge-t-elle simplement ou uniformément et si oui, sa somme est-elle égale à f ? On va voir que c'est le cas sous certaines conditions.

Proposition 3.4 *Soit f une fonction 2π-périodique et localement intégrable, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction $x \to f(x)e^{-inx}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ et on peut alors poser*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions $x \to f(x)\cos(nx)$ et $x \to f(x)\sin(nx)$ sont intégrables sur $[0, 2\pi]$ et on peut alors poser

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad et \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Exemple 3.1 *Blablabla*

Définition 3.2

1. *Les coeffcients $c_n(f)$ sont appelés coeffcients de Fourier exponentiels de f.*
2. *Les coeffcients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont appelés coeffcients de Fourier trigonométriques de f.*
3. *La série trigonométrique*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

est appelée série de Fourier de f.

Proposition 3.5
Soit f une fonction 2π-périodique et localement intégrable

1. *Si f est une fonction à valeurs réelles, alors ses coefficients de Fourier trigonométriques sont réels ; de plus $c_0(f)$ est réel et pour tout $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$*

2. *Les applications ci-dessous sont* $\mathbb{C}$*-linéaires*

$$f \to c_n(f), \quad f \to a_n(f) \quad et \quad f \to b_n(f)$$

3. *Si f est paire, alors $b_n(f) = 0$.*
4. *Si f est impaire, alors $a_n(f) = 0$.*

Théorème 3.2 (Formule de Parseval)
Soit f une fonction 2π-périodique et localement intégrable, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge et on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n\geq 1}(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(x) \mid^2 dx$$

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n\geq 1}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(x) \mid^2 dx$$

Exemple 3.2 *Considérons la fonction f 2π-périodique définie par*

$$\forall x \in]-\pi,\pi[, f(x) = x \quad et \quad f(\pi) = 0$$

alors f est localement intégrable et est impaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$; de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$b_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = (-1)^{n-1}\frac{2}{n}$$

L'identité de Parseval nous donne alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$$

Corollaire 3.1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$; si tous les coefficients de Fourier exponentiels (resp. trigonométriques) de f sont nuls, alors f est la fonction nulle.*

Exemple 3.3 *Considérons la fonction f 2π-périodique définie par*

$$\forall x \in]-\pi,0[\cup]0,\pi[, \quad f(x) = 0 \quad et \quad f(\pi) = f(-\pi) = f(0) = 1$$

alors f est localement intégrable, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = b_n(f) = 0$ et f est non nulle car f n'est pas continue.

Théorème 3.3 (Théorème de Dirichlet de la convergence simple) *Soit f une fonction 2π-périodique, dérivable par morceaux sur $[0, 2\pi]$; alors la série de Fourier de f converge simplement en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ vers $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$.*
Donc la série de Fourier de f converge simplement vers f en tout point où f est continue.

Exemple 3.4 *Considérons les deux fonctions 2π-périodiques f et g définies par*

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & si & 0 \leq x < \pi \\ -1 & si & \pi \leq x < 2\pi \end{array} \right)$$

et

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & si & 0 < x \leq \pi \\ -1 & si & \pi < x \leq 2\pi \end{array} \right)$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f) = c_n(g) = \frac{1 - (-1)^n}{in\pi}$$

Ainsi f et g ont même série de Fourier
Comme f et g sont 2π-périodiques et dérivables par morceaux sur $[0, 2\pi]$, le Théorème de Dirichlet s'applique : Cette série converge vers $f(x) = g(x)$ pour tout $x \notin \pi\mathbb{Z}$ et vers 0 pour tout $x \in \pi\mathbb{Z}$ vers la fonction 2π-périodique h définie par

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & si & 0 < x < \pi \\ 0 & si & x = k\pi \\ -1 & si & \pi < x < 2\pi \end{array} \right)$$

Ainsi les deux fonctions distinctes f et g ont la même série de Fourier dont la somme est une fonction h elle-même distincte de f et g.

Théorème 3.4 (Théorème de la convergence normale) *Soit f une fonction 2π-périodique continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$; alors la série de Fourier de f converge normalement (et donc uniformément) sur $\mathbb{R}$ et sa somme est f.*

Chapitre 4

Calculs des Résidus

Fonctions holomorphe.
Fonctions complexes classiques $(Log(z), exp(z), ...)$.
Formule intégrale de Cauchy
Séries de Laurent.
Théorème des résidus et application au calcul intégral.

================

4.1 Fonctions holomorphes

4.1.1 Rappels sur les nombres complexes

Soint $z \in \mathbb{C}$ ceci équivaut à dire $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$
$a = Re(z)$, $b = Im(z)$, $\overline{z} = a - ib$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{zw}$
$Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$, $|z|^2 = z\overline{z}$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ et $z = |z|e^{i\theta}$ avec $\theta = arg(z)$

4.1.2 Quelques parties de bases de l'ensemble $\mathbb{C}$

Cercle
Disque
Couronne
Un ouvet de $\mathbb{C}$

4.1.3 Fonctions holomorphes

Définition 4.1 *On appelle fonction complexe à une variable complexe, une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$*

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longrightarrow f(z)$$

Remarque 4.1 *Posons* $z = x + iy$ *et* $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$*, on est donc ramené à une application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *et ceci en posant* $\Psi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$

Définition 4.2 *On dit que* f *est continue en* z_0*, si elle admet une limite en* z_0 *et que cette limite vaut* $f(z_0)$*, ie,*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Proposition 4.1 f *est continue sur* $\mathbb{C}$ *ssi* P *et* Q *sont continues sur* $\mathbb{R}^2$*.*

Proposition 4.2 *Les propriétés de la continuité sur* $\mathbb{R}$ *se transmettent sur* $\mathbb{C}$*.*

Définition 4.3 *Soit une application de* $D(z_0, r)$ *dans* $\mathbb{C}$*. On dit que* f *est holomorphe en* z_0 *si* $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ *exite et dans ce cas elle sera notée par* $f'(z_0)$*.*

$$f \text{ holomorphe en } z_0 \Leftrightarrow f \text{ dérivable en } z_0.$$

Proposition 4.3
$(f + g)' = f' + g'$
$(fg)' = f'g + fg'$
$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$
$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Théorème 4.1 (Conditions de Cauchy-Riemann) *La fonction* $z \to f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ *est différentiable dans le champ complexe, au point* $z_0 = x_0 + iy_0$ ***si et seulement si****, les fonctions* $(x, y) \to P(x, y)$ *et* $(x, y) \to Q(x, y)$ *sont différentiables au point* (x_0, y_0) *et si leurs dérivées vérifient les Conditions de Cauchy-Riemann.*

La dérivée, en un point z quelconque est donnée par

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \\ &= -i\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Exemple 4.1

1. $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$
2. $g(z) = x^3 + 3x^2y - y^3 - x^2 - 2y^2 + i(-x^3 + 3xy^2 - y^3 + 4xx + 3y)$
3. $h(z) = z\overline{z}$

4.2 Théorie de Cauchy

4.2.1 Intégrale curviligne

Définition 4.4 *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction, on dit que γ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < a_2 < ...... < a_n = b$ telle que $\gamma/[a_i, a_{i+1}]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ pour $i \in \{0, 1...., n-1\}$*

Définition 4.5 *Un chemin dans $\mathbb{C}$ est une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue de calsse $\mathcal{C}^1$ par morceaux, où $[a,b]$ est un segment non réduit à un point*

- *L'origine de γ est le point $\gamma(a)$*
- *L'extrimité de γ est le point $\gamma(b)$*
- *Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ on dit que le chemin est fermé.*

Exemple 4.2 *L'application $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $\gamma(t) = e^{it}$ est un chemin fermé*

Définition 4.6 *Le chemin opposé à $([a,b], \gamma)$ est le chemin $([a,b], \gamma^*)$ défini pour tout $t \in [a,b]$ par $\gamma^*(t) = \gamma(a + b - t)$*

Définition 4.7 *Deux chemins $([a,b], \gamma)$ et $([c,d], \delta)$ sont dits équivalents s'il existe une application $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ vérifiant les conditions suivantes :*

1. *φ est bijective croissante de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que φ^{-1}*
2. *$\gamma = \delta \circ \varphi$*

Définition 4.8 *Soient $([a,b], \gamma)$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ et f une fonction continue sur $Im(\gamma)$. L'intégrale de f sur γ notée : $\int_\gamma f(z)dz$ et définie par*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Remarque 4.2 *Pratiquement cet intégrale se calcule en posant $z(t) = \gamma(t)$ et $dz = \gamma'(t)dt$.*

Exemple 4.3 *AAAAAAAAAAAAA*

Définition 4.9 *Soient $([a,b], \gamma)$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $a = a_0 < a_1 < a_2 < ...... < a_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\gamma_k]a_k, b_{k+1}[$, $0 \leq k \leq n-1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour toute fonction f continue sur $Im(\gamma)$, on a :*

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} f(z)dz$$

Proposition 4.4 *Si $([a,b],\gamma)$ et $([c,d],\delta)$ sont deux chemins équivalents et si f est une fonction continue sur $Im(\gamma)$, alors on a :*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\delta f(z)dz$$

Proposition 4.5 *Soient $([a,b],\gamma)$, $c \in]a,b[$, $\gamma_1 = \gamma/[a,c]$ et $\gamma_2 = \gamma/[c,b]$, alors*

1. $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$ *(la relation de Chasles).*
2. $\displaystyle\int_{\gamma^*} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$

Proposition 4.6 *Soient $([a,b],\gamma)$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$; si f et g sont deux fonctions continues sur $Im(\gamma)$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$, alors on a :*

$$\int_\gamma (\lambda f + \mu g)(z)dz = \lambda\int_\gamma f(z)dz + \mu\int_\gamma g(z)dz$$

Proposition 4.7 *Si $F : U \to \mathbb{C}$ (où U est un ouvert de $\mathbb{C}$) est une fonction holomorphe sur U et si $F' = f$ sur U, alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Où $([a,b],\gamma)$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ contenu dans U.

Remarque 4.3 *Si de plus $([a,b],\gamma)$ est un chemin fermé, alors $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

4.2.2 Théorème et formule de Cauchy

Théorème 4.2 (Première formule de Cauchy) *Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert U et γ un chemin fermé de U d'interieur Δ entièrement contenu dans U, alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Théorème 4.3 (Deuxième formule de Cauchy) *Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert U et γ^+ un chemin fermé de U orienté dans le sens positif d'interieur entièrement contenu dans U et z_0 est un point de Δ, alors*

$$\int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

Remarque 4.4 *Ce résultat nous permet de calculer les valeurs en tout points intérieur de γ si on connaît la fonction holomorphe f sur ce chemin fermé.*

4.3 Théorème des résidus et applications

4.3.1 Théorème des résidus

Théorème 4.4 (Equivalence entre holomorphie et analycité) *Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. On prend*

$$R = sup\{r > 0/D(z_0, r) \subset U\}$$

Alors pour tout point $z \in D(z_0, R)$ on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \quad où \quad \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$$

Remarque 4.5 *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ (U un ouvert), on a :*
f holomorphe sur U ssi f est analytique sur U.

Définition 4.10 *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes et $z_0 \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ s'appelle* ***série de Laurent*** *de centre z_0 et de coefficients a_n*

Exemple 4.4

1. *Une série entière est une séries de Laurent au point* 0.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n$ *est une série de Laurent qui n'est pas entière.*

Lemme 4.1 *Soient f une fonction analytique dans une couronne $A(z_0, R_1, R_2)$ et r_0, r_1 deux réels tel que $R_1 < r_0 < r_1 < R_2$, alors pour tout $z \in A(z_0, r_0, r_1)$ on a :*

$$f(z) = \int_{C^+(z_0,r_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \int_{C^+(z_0,r_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

Théorème 4.5 (Développement en série de Laurent) *Toute fonction holomorphe sur une couronne $A(z_0, R_1, R_2)$ est développable en série de Laurent dans cette couronne.*
Les coefficients de ce développement se calculent par la formule

$$a_n = \int_{C^+(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta = \frac{f^n(z_0)}{n!}$$

$r \in]R_0, R_1[$ *arbitraire*

Exemple 4.5 $f(z) =$

Définition 4.11 (Points singuliers) *Un point z_0 est une singularité isolée pour une fonction f si la fonction f est holomorphe dans un disque pointé $\{z/0 < |z - z_0| < R\}$ centré en z_0.*

Exemple 4.6

1. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ *admet* 0 *comme singularité isolée,*
2. $g(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ *admet* 0 *comme singularité isolée,*
3. $h(z) = \frac{e^z}{z-1}$ *admet* 1 *comme singularité isolée.*

Remarque 4.6 *Suivant la nature du développement de Laurent en z_0, on distingue trois cas :*

1. *Une singularité isolée est apparente si le développement de Laurent ne contient aucun terme $(z - z_0)^k$ avec $k < 0$*
2. *Une singularité isolée est un pôle d'ordre m si $f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k$ avec $a_{-m} \neq 0$*
3. *Une singularité isolée est essentielle si le développement de Laurent contient un nombre infini de terme $(z - z_0)^k$ avec $k < 0$.*

Exemple 4.7 $\frac{\sin(z)}{z^3}$, $\frac{\cos(z)}{z^n-1}$, $\tan(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$

Définition 4.12 *Soit z_0 un point singulier isolé de f, $D(z_0, r)$ un disque pointé ne contient pas de points singulier de f, alors pour tout $z \in D(z_0, r)$, on a $f(z) = \sum_{n\geq 2} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ le coefficient b_1 est appelé le résidu de f au point z_0 et on le note $Res(f, z_0)$ et on a donc*

$$Res(f, z_0) = b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz$$

où γ est un chemin orienté positivement inclu dans $D(z_0, r)$ et entourant z_0

Lorsque z_0 est un pôle d'ordre m pour f, le résidu peut aussi y être calculé par la formule

$$Res(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z - z_0)^m f(z))$$

Exemple 4.8

$$Res(\frac{\sin(z)}{z^3}, 0) = 0$$

$$Res(e^{\frac{1}{z}}, 0) = 1$$

Proposition 4.8 *Soient f et g deux fonctions analytiques sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et z_0 un point de U*

1. *Si $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$ avec $g(z_0) \neq 0$, alors $Res(f, z_0) = g(z_0)$*
2. *Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ avec $g(z_0) \neq 0$ et z_0 est un zéro simple de h, alors $Res(f, z_0) = \frac{g(z)}{h'(z)}$*

Exemple 4.9 $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ *Le point $z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ est un pôle simple, on prend $g(z) = z^2$ et $h(z) = 1 + z^4$*

$$Res(f, z_0) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

Théorème 4.6 (Théorème des résidus) *Soient $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans D à l'exception de singularités isolées. Soit γ un chemin fermé contenu ainsi que son intérieur dans D, ne passant par aucune singularité de f et en contenant un nombre fini $z_1, z_2, ..., z_n$ dans son intérieur, alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

Le chemin étant parcouru dans le sens positif.

4.3.2 Applications au calcul d'intégrales

1. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{13+12\cos(\theta)} d\theta$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3} dx$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$